www.sinalmaismat.com
facebook.com/sinalmaismat
instagram.com/sinalmaismat

Prova Modelo de Exame Final Nacional

Prova 1 | Ensino Secundário | 2019

12.º Ano de Escolaridade

Nuno Miguel Guerreiro

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2) : 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos

---

Caderno 1: 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.
É permitido o uso de calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Só é permitido o uso de calculadora gráfica no Caderno 1.

Não é permitido o uso do corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o caderno e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se na margem de cada página.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Todos os itens desta prova são originais do autor – referência ao autor no rodapé da prova. Prova realizada em maio de 2019. Última atualização às 14:33 de 17 de Junho de 2019.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos A$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $(\rho\, e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\; e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

($k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Cotações

1. Considere, num referencial o.n xOy, uma elipse centrada na origem do referencial e de focos pertencentes ao eixo Ox. **8**

Sabe-se que:

- o valor do eixo maior da elipse é o dobro do valor do eixo menor da mesma.
- a distância focal da elipse é $8\sqrt{3}$.

Qual é o valor do eixo maior da elipse ?

(A) 4 **(B)** 8 **(C)** 16 **(D)** 32

2. Considere, num referencial o.n $Oxyz$, o prisma triangular reto $[ABCDEF]$ representado na Figura 1.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao eixo coordenado Oz;
- o ponto F tem coordenadas $(3,0,1)$;
- o plano ABC é definido pela equação $-x + 2y + 2z = 8$.

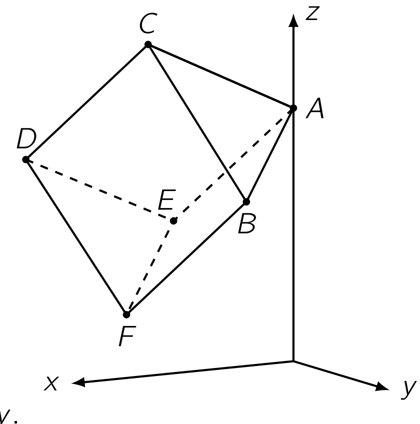

Figura 1

2.1. Seja P o ponto simétrico do ponto F relativamente ao plano xOy. **12**

Determine a amplitude do ângulo POA.

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

2.2. Determine as coordenadas do ponto E. **13**

2.3. Dispõe-se de oito cores diferentes para colorir as cinco faces do prisma $[ABCDEF]$. **12**

Cada face do prisma vai ser colorida com uma única cor.

Sabe-se que o prisma deve ser pintado de forma a que exatamente duas faces sejam pintadas da mesma cor, e as restantes três faces sejam pintadas com cores diferentes entre si.

De quantas formas diferentes se pode pintar o prisma?

3. De uma progressão geométrica não monótona (u_n), sabe-se que o valor do seu décimo termo é o quádruplo do valor do seu oitavo termo. **12**

Seja k uma constante real, e (v_n) uma sucessão tal que $\begin{cases} v_{n+1} = \left(k + \dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) v_n \\ v_1 = 1 \end{cases}$.

Determine o conjunto de valores k que garante que (v_n) é limitada.

8 **4.** Considere, no referencial o.n xOy, o triângulo $[ABC]$ representado na Figura 2.

Sabe-se que:

- a reta AB é paralela ao eixo Ox;
- $\overline{AC} = \overline{AB} = 4$;
- o declive da reta AC é $\sqrt{15}$.

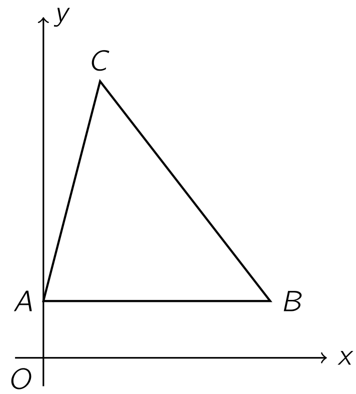

Figura 2

Qual é o valor de $\overline{BC}$, arredondado às décimas ?

(A) 1,0 **(B)** 3,4 **(C)** 4,9 **(D)** 6,3

5. Na Figura 3, está representado, no plano complexo, o octógono regular $[ABCDEFGH]$ centrado na origem do referencial e uma circunferência.

Tal como a figura sugere, o vértice O coincide com a origem do referencial.

O ponto B é afixo do número complexo z_1.

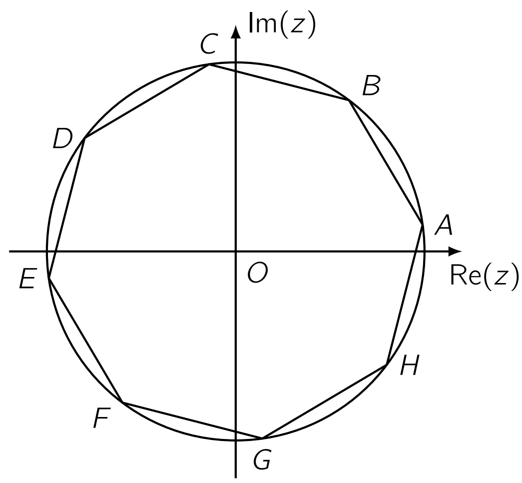

Figura 3

8 **5.1.** Seja w o número complexo definido por $w = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.

Qual é o afixo do número complexo z_2 tal que $z_2 = \frac{z_1}{w}$?

(A) A **(B)** C **(C)** E **(D)** G

8 **5.2.** Considere a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, três vértices do octógono $[ABCDEFGH]$.

Qual a probabilidade do triângulo que une os três vértices escolhidos ter um lado que constitui um diâmetro da circunferência?

(A) $\frac{2}{7}$ **(B)** $\frac{3}{7}$ **(C)** $\frac{4}{7}$ **(D)** $\frac{5}{7}$

6. Uma companhia de seguros classifica os seus clientes em duas categorias: os clientes propensos a acidentes, e os clientes não propensos a acidentes. **13**

Sabe-se que:

- 25% dos clientes dessa companhia têm um acidente no período de cobertura do seguro;
- 5% dos clientes não propensos a acidentes têm um acidente no período de cobertura do seguro;
- 80% dos clientes propensos a acidentes têm um acidente no período de cobertura do seguro.

Escolhe-se ao acaso um cliente dessa companhia de seguros.

Qual é a probabilidade desse cliente estar categorizado como propenso a acidentes?

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

7. Um engenheiro aeroespacial está a projetar um sistema para o controlo lateral de uma aeronave. Para tal o engenheiro estuda as respostas no tempo do ângulo de rolamento quando os lemes da aeronave se movem 1 grau. **12**

Sabe-se que o ângulo de rolamento, ϕ, em graus, t segundos após o movimento do leme é dado por

$$\phi(t) = 5 - 8e^{-Kt} \sin\left(Kt + \frac{\pi}{6}\right), t \in [0,5]$$

em que K é um fator de controlo que fica ao critério do engenheiro, tal que $K > 0$.

O engenheiro pretende escolher o valor de K, tal que o valor do ângulo de rolamento aumentou, em média, 1 grau por segundo nos primeiros três segundos após o início do movimento do leme.

Determine o valor de K, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora.

Na sua resposta deve:

- equacionar o problema;
- determine, analiticamente, o valor inicial do ângulo de rolamento;
- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificados;
- indicar o valor de K, com arrendondamento às centésimas.

Fim do Caderno 1

PÁGINA EM BRANCO

www.sinalmaismat.com
facebook.com/sinalmaismat
instagram.com/sinalmaismat

Prova Modelo de Exame Final Nacional

Prova 1 | Ensino Secundário | 2019

12º Ano de Escolaridade

Nuno Miguel Guerreiro

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2) : 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos

---

Caderno 2: 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.

Não é permitido o uso de calculadora.

Todos os itens desta prova são originais do autor – referência ao autor no rodapé da prova. Prova realizada em maio de 2019.

8. Um ponto P desloca-se numa reta numérica, no intervalo de tempo I, de forma que a respetiva abcissa é dada por 8

$$x(t) = 4\sin\left(-\frac{\pi}{2}t - \frac{5\pi}{3}\right), t \in I$$

Qual é a fase deste oscilador harmónico ?

(A) $\frac{\pi}{6}$ **(B)** $\frac{\pi}{3}$ **(C)** $\frac{5\pi}{3}$ **(D)** $\frac{11\pi}{6}$

9. Considere a função f definida por $f(x) = \arccos(x)$. 8

Seja a uma constante real definida por $a = \cos^2\left(\frac{4\pi}{5}\right) - \sin^2\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

Qual é o valor de $f(a)$?

(A) $\frac{2\pi}{5}$ **(B)** $\frac{3\pi}{5}$ **(C)** $\frac{4\pi}{5}$ **(D)** $\frac{8\pi}{5}$

10. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere 12

$$w_1 = 6i^{4n+3} + \frac{(1-i)^6 + 12i}{2-i} \text{ e } w_2 = 2 + \frac{\overline{w_1}}{2}$$

Escreva uma condição que define a circunferência de centro no afixo de w_1 e que passa no afixo de w_2.

11. Determine o conjunto dos números reais que são soluções da inequação 13

$$\log_2(2x-4) \leq 2\log_2(4-x) + 1$$

Apresente a resposta usando a notação de intervalos de números reais.

12. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, cuja primeira derivada, f', é dada por $f'(x) = \ln(x^2+2)$. 8

Sabe-se ainda que a função f admite um zero no ponto de abcissa 1.

Qual das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira ?

(A) Existe uma reta tangente ao gráfico de f paralela à bissetriz dos quadrantes pares.

(B) O gráfico da função f pode admitir uma assíntota vertical.

(C) A função f não é invertível.

(D) A função f não pode ter contradomínio $\mathbb{R}_0^+$.

8 **13.** Na figura 4, estão representados, num referencial o.n xOy, uma circunferência de centro O e raio 2, e um pentágono $[ABCDE]$.

Sabe-se que:

- os pontos A, B, C, D, E e F pertencem à circunferência;
- os pontos C e F pertencem ao eixo das abcissas;
- os segmentos $[AB]$ e $[DE]$ são paralelos ao eixo Ox;
- os segmentos $[AE]$ e $[BD]$ são paralelos ao eixo Oy;
- $\alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$ é a amplitude, em radianos, do ângulo orientado FOD em que $\dot{O}F$ é o lado origem e $\dot{O}D$ é o lado extremidade.

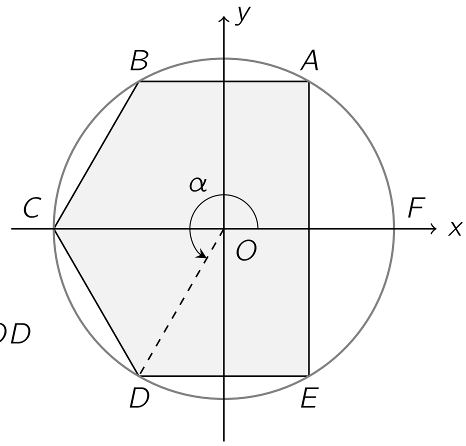

Figura 4

Qual das seguintes expressões representa, em função de α, a área do pentágono $[ABCDE]$?

(A) $4\sin\alpha + 6\sin(2\alpha)$ **(B)** $-4\sin\alpha + 6\sin(2\alpha)$

(C) $4\sin\alpha - 6\sin(2\alpha)$ **(D)** $-4\sin\alpha - 6\sin(2\alpha)$

14. Seja g uma função, de domínio $\left]-\infty, \frac{\pi}{2}\right[$, definida por $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x - 2}{\cos x} & \text{se } 0 \leq x < \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{x}{1 - e^{-2x}} & \text{se } x < 0 \end{cases}$.

12 **14.1.** Estude o gráfico da função g quanto à existência de assíntotas paralelas aos eixos coordenados.

13 **14.2.** Estude a função g quanto à monotonia no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e determine, caso existam, os extremos relativos.

13 **14.3.** Seja h uma função contínua e diferenciável em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Sabe-se que $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\pi - 3x}{h(x) - h\left(\frac{\pi}{3}\right)} = 3\pi$, e que a reta tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa $\dfrac{\pi}{3}$ interseta o gráfico de g no ponto de abcissa $\dfrac{\pi}{4}$.

Determine uma equação reduzida da reta tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa $\dfrac{\pi}{3}$.

12 **15.** Sejam a e b duas constantes reais, e f uma função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{\cos x - 1} + g(x)$.

A função g é contínua em $\mathbb{R}$, e o seu gráfico admite duas assíntotas horizontais definidas pelas equações $y = -2$ e $y = 2$. Sabe-se ainda que g admite um mínimo absoluto em $x = a$ e um máximo absoluto em $x = b$.

Prove que a função f admite pelo menos um zero em $]a, b[$.

Fim do Caderno 2