EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO | MATEMÁTICA A

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Sites: http://www.sinalmaismat.com/ | http://recursos-para-matematica.webnode.pt/

Facebook: https://www.facebook.com/sinalmaismat/ | https://www.facebook.com/recursos.para.matematica

PROVA MODELO N.º 3

JULHO DE 2019

CADERNO 1

Neste grupo a utilização de calculadora gráfica é permitida.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, seleccione a opção correcta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos itens de resposta aberta apresente todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exacto.

1.1.	1.2.
P2001/2002	PMC2015

1.1. Numa população de aves de uma determinada espécie sabe-se que 7% têm uma anomalia genética.

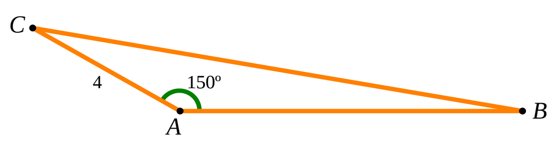
Um grupo de cientistas vai fazer um estudo sobre essa espécie de aves e para tal precisa de nove exemplares. Para que o estudo seja considerado válido o número de exemplares com a referida anomalia entre os nove escolhidos tem de ser no máximo 2.

O grupo de cientistas escolheu uma amostra de nove exemplares dessa espécie de aves.

Qual é a probabilidade, aproximada às centésimas, de o estudo ser considerado válido?

A $0,02$ **B** $0,11$ **C** $0,89$ **D** $0,98$

1.2. Na figura está representado o triângulo escaleno $[ABC]$ de área 8.

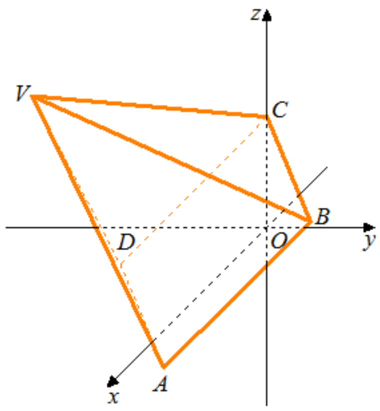


Sabe-se que a amplitude do ângulo BAC é 150° e $\overline{AC} = 4$.

Qual é o valor de $\overline{BC}$, arredondado às centésimas?

A $10,58$ **B** $11,64$ **C** $12,74$ **D** $13,61$

2. Na figura está representada, em referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide $[ABCDV]$ cuja base é o quadrilátero $[ABCD]$.



Sabe-se que:

- $C(0,0,3)$ e $V(4,-5,5)$
- o ponto A tem abcissa positiva e pertence à recta t definida por $(x,y,z)=(0,0,1)+k(4,0,-1)$, $k\in\mathbb{R}$
- $\overrightarrow{AV}\cdot\overrightarrow{CA}=-56$

2.1. Mostre que $A(8,0,-1)$.

2.2. Admita que $D(0,-4,-1)$.

Mostre que uma equação cartesiana do plano ABC é $x-2y+2z=6$ e determine a altura da pirâmide.

3. Considere o desenvolvimento do binómio $\left(\frac{2}{x}-x^2\right)^n$, com $x\neq 0$ e $n\in\mathbb{N}$.

Sabe-se que n satisfaz a equação ${}^nC_3-{}^nC_7=0$.

Qual é o coeficiente do termo cuja parte literal é x^{11}?

A -960

B -360

C 360

D 960

4. Um saco contém dez bolas, seis vermelhas e quatro brancas. As bolas da mesma cor são indistinguíveis

4.1. Considere a experiência aleatória que consiste em extrair, simultaneamente e ao acaso três bolas do saco.

Qual a probabilidade de as três bolas extraídas não serem todas da mesma cor?

Apresente o resultado na forma de fracção irredutível

4.2. Colocaram-se n bolas pretas indistinguíveis no saco, com $n \in \mathbb{N}$.

Considere a experiência aleatória que considere em extrair, sucessivamente e sem reposição, seis bolas do saco.

Sejam, A, B e C os acontecimentos:

A: «as seis bolas extraídas são todas da mesma cor»

B: «as cinco primeiras bolas extraídas são da mesma cor»

C: «nenhuma das cinco primeiras bolas extraídas é preta»

Sabe-se que $P\left(\overline{A}\middle|\left(B \cap C\right)\right) = 96\%$

Sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada, determine o valor de n.

Comece por interpretar o significado de $P\left(\overline{A}\middle|\left(B \cap C\right)\right)$ no contexto da situação descrita.

5. O Bairro do Garrafão vai ser desocupado e os seus habitantes serão realojados no Bairro da Fonte. Este processo irá iniciar-se no dia 1 de Setembro de 2019 e decorrerá durante oito meses.

O Departamento de Habitação da Câmara Municipal estima que o número aproximado de habitantes, em centenas, t meses após o dia 1 de Setembro de 2019, no Bairro da Fonte e no Bairro do Garrafão, será dado, respectivamente por:

$$F(t)=\frac{13,5}{1+4e^{-2t}} \quad \text{e} \quad G(t)=11e^{-0,3t}, \quad \text{com } t\in[0,8]$$

O Departamento de Habitação sabe que haverá um dia t_0 em que passados exactamente dois meses desse dia, o número de habitantes no Bairro da Fonte será 92% superior ao número de habitantes que viviam no Bairro do Garrafão no dia t_0.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determine t_0.

Na sua resposta deve:

- equacionar o problema;

- reproduzir o(s) gráfico(s) que considerar necessário(s) para a resolução do problema bem como a(s) coordenada(s) de algum (ou alguns) ponto(s) relevante(s);

- apresentar t_0 arredondado às milésimas;

- indicar o dia e o mês correspondente ao dia t_0.

6. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere a condição:

$$|2z+iz|=1 \ \wedge \ \operatorname{Arg}(3z-3iz)=\frac{\pi}{2}$$

No plano complexo esta condição define um único ponto.

Qual é o número complexo cujo afixo é o ponto definido pela condição dada?

A $\frac{\sqrt{10}}{2}+\frac{\sqrt{10}}{2}i$

B $\frac{\sqrt{10}}{10}+\frac{\sqrt{10}}{10}i$

C $-\frac{\sqrt{10}}{10}+\frac{\sqrt{10}}{10}i$

D $-\frac{\sqrt{10}}{2}+\frac{\sqrt{10}}{2}i$

7. Seja (u_n) a sucessão definida por:

$$u_n = \begin{cases} 2^n & \text{se} \quad n < 10 \\ \dfrac{2n+3}{n+2} & \text{se} \quad n \geq 10 \end{cases}$$

Mostre que (u_n) é limitada.

8. Seja g uma função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $g(x) = axe^{2x}$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Sabe-se que a inclinação da recta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1 é $85°$.

Qual é o valor de a, arredondado às centésimas?

A $0,01$

B $0,52$

C $0,77$

D $1,55$

FIM DO CADERNO 1

CADERNO 2

Neste grupo a utilização de calculadora gráfica não é permitida.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, seleccione a opção correcta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos itens de resposta aberta apresente todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exacto.

9.1.	9.2.
P2001/2002	PMC2015

9.1. Considere num referencial o.n. $Oxyz$ a recta r e o plano α definidos respectivamente por:

$$r: \frac{x-2}{a} = y = \frac{2-z}{3a^2} \qquad \text{e} \qquad \alpha: x + by + \frac{z}{a} = 1, \qquad \text{com } a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Sabendo que a recta r é paralela ao plano α, quais podem ser os valores de a e de b?

A $a = 1$ e $b = 1$

B $a = 2$ e $b = 1$

C $a = 1$ e $b = 2$

D $a = 0$ e $b = 0$

9.2. Seja a um número real não nulo tal que $\cos\left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)\right) = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{a}\right)\right)$

Qual é o valor de a?

A $a = -4$

B $a = -2$

C $a = 2$

D $a = 4$

10. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere:

- $z_1 = \frac{1+i^{17}}{1-i} - \frac{1-i^{4n+5}}{1+i}$, com $n \in \mathbb{N}$
- $z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right)$
- $z_3 = z_1 \times z_2$

Para um certo número real positivo k, sabe-se que z_3 é a raiz cúbica de um número complexo $k - ki$.

Qual é o valor de k?

11.1.	11.2.
P2001/2002	PMC2015

11.1. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é a seguinte:

x_i	-2	-1	1	2
$P(X = x_i)$	$1-6a$	a	$2a$	$3a$

com $a \in \mathbb{R}$.

Sabe-se que $P(X > -1) = \frac{1}{2}$.

Qual é o valor médio da variável aleatória X?

A $-\frac{5}{12}$

B $-\frac{1}{10}$

C $\frac{1}{4}$

D $\frac{1}{10}$

11.2. Seja g uma função duas vezes derivável em $[0,4]$ tal que $g(0)=1$, $g(2)=3$ e $g(4)=5$.

Considere as seguintes afirmações:

I. Existem c_1 e c_2 distintos e pertencentes ao intervalo $]0,4[$ tais que $g'(c_1)=g'(c_2)$.

II. A função g'', segunda derivada de g, tem pelo menos um zero no intervalo $]0,4[$.

Qual das opções é a correcta?

A Ambas as afirmações são falsas.

B Apenas a afirmação **I.** é verdadeira.

C Apenas a afirmação **II.** é verdadeira.

D Ambas as afirmações são verdadeiras.

12. Considere a função f de domínio $\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{xe^{x-3}-4e}{x-4} & \text{se} \quad x>4 \\ \dfrac{3x+8}{\sqrt{x^2+9}} & \text{se} \quad x\leq 4 \end{cases}$$

12.1. Seja g a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $g(x)=3x-1$.

Qual é o valor de $(f\circ g^{-1})(-1)$?

A $\frac{8}{9}$

B $\frac{8}{3}$

C e

D $4e$

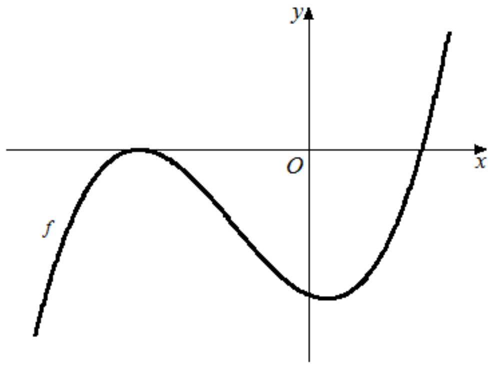
12.2. Mostre que o gráfico da função f não admite assíntotas verticais, mas que admite uma assíntota horizontal quando $x\to-\infty$, escrevendo a sua equação.

13. Determine o conjunto solução da inequação:

$$\log_4(x+3)-\log_4(4-x)\geq\frac{1}{2}+\log_4 x$$

Apresente resultado na forma de intervalo ou união de intervalos de números reais.

14. Na figura está representado parte do gráfico de uma função f, polinomial de grau 3 com dois zeros.



Seja (u_n) uma sucessão tal que $u_n \to a$, sendo a o zero de multiplicidade 2 de f.

Acerca do $\lim \dfrac{\ln(u_n - a)^2}{f(u_n)}$ pode afirmar-se que:

A Não existe

B é igual a $-\infty$

C é igual a 0

D é igual a $+\infty$

15. Considere a função h de domínio $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ definida por $h(x) = 2x^2 + \ln(\cos x)$.

15.1. Mostre que $h''(x) = \dfrac{4\cos^2 x - 1}{\cos^2 x}$ e estude a função h quando ao sentido das concavidades e à existência de pontos de inflexão do seu gráfico.

15.2. Mostre que a equação $h(x) = 1$ tem pelo menos uma solução em $[0,1]$.

Sugestão: tenha em atenção que $1 < \dfrac{\pi}{3}$ e que $2 < e$.

FIM DO CADERNO 2

FIM DA PROVA MODELO 3

Cotações

Caderno 1

1.		8 pontos
2.		
	2.1.	12 pontos
	2.2.	12 pontos
3.		8 pontos
4.		
	4.1.	12 pontos
	4.2.	13 pontos
5.		12 pontos
6.		8 pontos
7.		12 pontos
8.		8 pontos
	Total Caderno 1	105 pontos

Caderno 2

9.		8 pontos
10.		13 pontos
11.		8 pontos
12.		
	12.1.	8 pontos
	12.2.	13 pontos
13.		13 pontos
14.		8 pontos
15.		
	15.1.	14 pontos
	15.2.	10 pontos
	Total Caderno 2	95 pontos

Total Caderno 1 + Caderno 2 200 pontos

Solucionário

Caderno 1

1.1. D

1.2. B

2.2. 6

3. A

4.1. $\frac{4}{5}$

4.2. $P\left(\overline{A}\middle|\left(B\cap C\right)\right)$ é a probabilidade de as seis bolas extraídas não serem todas da mesma cor, sabendo que as cinco primeiras são todas da mesma cor mas nenhuma delas é preta; $n=20$.

5. $t_0 \approx 1,504$; t_0 corresponde ao dia 15 de Outubro de 2019.

6. C

8. B

Caderno 2

9.1. C

9.2. A

10. $k=4\sqrt{2}$

11.1. B

11.2. D

12.1. B

12.2. A.H.: $y=-3$, quando $x\to -\infty$.

13. $\left]0,\frac{1}{2}\right]\cup[3,4[$

14. D

15.1. O gráfico de h tem a concavidade voltada para baixo em $\left]-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right]$ e em $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right[$, tem a concavidade voltada para cima em $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$ e tem ponto de inflexão em $x=-\frac{\pi}{3}$ e em $x=\frac{\pi}{3}$.