Exame Nacional do Ensino Secundário | Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Sites: http://www.sinalmaismat.com/ | http://recursos-para-matematica.webnode.pt/

Facebook: https://www.facebook.com/sinalmaismat/ | https://www.facebook.com/recursos.para.matematica

Prova Modelo n.º 12

Julho de 2019

Proposta de Resolução

CADERNO 1

1.

1.1. Seja X a variável aleatória:

X : «número de aves desta espécie numa amostra de nove com a anomalia genética»

Esta variável aleatória segue uma distribuição binomial de parâmetros $n=9$ e $p=7\%=0,07$, isto é:

$$X \sim \text{Bin}(9;0,07)$$

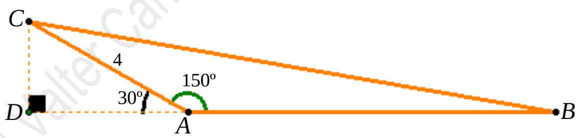
Pretende-se determinar $P(\text{Estudo ser considerado válido}) = P(X \le 2)$.

Assim, $P(X \le 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) =$

$$= {}^9C_0 \times (0,07)^0 \times (0,93)^9 + {}^9C_1 \times (0,07)^1 \times (0,93)^8 + {}^9C_2 \times (0,07)^2 \times (0,93)^7 \approx 0,98$$

Resposta: D

1.2. Consideremos a seguinte figura:



Tem-se que a área do triângulo é dada por $\frac{\overline{AB} \times \overline{CD}}{2}$.

Como $\text{sen}(30^\circ) = \frac{\overline{CD}}{4} \Leftrightarrow \overline{CD} = 4 \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow \overline{CD} = 2$, vem que $\frac{\overline{AB} \times \overline{CD}}{2} = 8 \Leftrightarrow \frac{\overline{AB} \times \cancel{2}}{\cancel{2}} = 8 \Leftrightarrow \overline{AB} = 8$.

Logo, pelo lei dos co-senos, tem-se:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB} \times \overline{AC} \cos(150^\circ) = 4^2 + 8^2 - \cancel{2} \times 4 \times 8 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right) = 80 + 32\sqrt{3}$$

Como $\overline{BC} > 0$, vem que $\overline{BC} = \sqrt{80 + 32\sqrt{3}} \approx 11,64$.

Resposta: B

2.

2.1. Tem-se que:

- o ponto A pertence à recta t, pelo que as suas coordenadas (x_A, y_A, z_A), são da forma:

$$(x_A, y_A, z_A) = (0,0,1) + k(4,0,-1) = (4k, 0, 1-k),\ k \in \mathbb{R}$$

$\therefore\ A(4k, 0, 1-k),\ k \in \mathbb{R}$

- $\overrightarrow{AV} = V - A = (4,-5,5) - (4k,0,1-k) = (4-4k, -5, 4+k)$

- $\overrightarrow{CA} = A - C = (4k,0,1-k) - (0,0,3) = (4k, 0, -k-2)$

Logo, como $\overrightarrow{AV} \cdot \overrightarrow{CA} = -56$, vem:

$$\overrightarrow{AV} \cdot \overrightarrow{CA} = -56 \Leftrightarrow (4-4k, -5, 4+k) \cdot (4k, 0, -k-2) = -56 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4k(4-4k) + 0 + (4+k)(-k-2) = -56$$

$$\Leftrightarrow 16k - 16k^2 - 4k - 8 - k^2 - 2k = -56$$

$$\Leftrightarrow -17k^2 + 10k + 48 = 0$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \times (-17) \times 48}}{2 \times (-17)}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{-10 \pm 58}{-34} \Leftrightarrow k = -\frac{24}{17} \ \vee \ k = 2$$

Assim, se:

- $k = -\frac{24}{17}$ então, $A(4k, 0, 1-k) = \left(4 \times \left(-\frac{24}{17}\right), 0, 1 + \frac{24}{17}\right) = \left(-\frac{96}{17}, 0, \frac{41}{17}\right)$

- $k = 2$ então, $A(4k, 0, 1-k) = (4 \times 2, 0, 1-2) = (8, 0, -1)$

$\therefore$ Como a abcissa de A é positiva, vem que $A(8, 0, -1)$.

2.2. Tem-se que:

▪ por três pontos não colineares passa um único plano. Os pontos A, C e D pertencem ao plano ABC e não são colineares. Logo, se os pontos A, C e D pertencerem ao plano definido por $x-2y+2z=6$, então esse plano é o ABC:

$A(8,0,-1) \to 8-2\times 0+2\times(-1)=6 \Leftrightarrow 8-2=6 \Leftrightarrow 6=6 \to$ Proposição verdadeira.

$C(0,0,3) \to 0-2\times 0+2\times 3=6 \Leftrightarrow 6=6 \to$ Proposição verdadeira.

$D(0,-4,-1) \to 0-2\times(-4)+2\times(-1)=8-2 \Leftrightarrow 6=6 \to$ Proposição verdadeira.

Logo, uma equação cartesiana do plano ABC é $x-2y+2z=6$.

▪ a altura da pirâmide é dada por $\overline{VP}$, em que P é o ponto de intersecção da recta r, perpendicular ao plano ABC e que contém o ponto V, com o plano ABC.

Um vector normal ao plano ABC é $\vec{n}(1,-2,2)$, pelo que como r é perpendicular a ABC, este vector é também director de r e portanto, $r:(x,y,z)=(4,-5,5)+k(1,-2,2)$, $k\in\mathbb{R}$.

Como o ponto P pertence a r, tem-se que: $P(4+k,-5-2k,5+2k)$, $k\in\mathbb{R}$. Mas P também pertence a ABC, pelo que:

$$4+k-2(-5-2k)+2(5+2k)=6 \Leftrightarrow 4+k+10+4k+10+4k=6 \Leftrightarrow 9k=-18 \Leftrightarrow k=-2$$

Portanto, $P(4-2,-5-2\times(-2),5+2\times(-2))=(2,-1,1)$, pelo que:

$$\overline{VP}=\sqrt{(4-2)^2+(-5+1)^2+(5-1)^2}=\sqrt{2^2+(-4)^2+4^2}=\sqrt{4+16+16}=\sqrt{36}=6$$

$\therefore$ A altura da pirâmide é 6.

3. Tem-se que ${}^{n}C_3-{}^{n}C_7=0 \Leftrightarrow {}^{n}C_3={}^{n}C_7 \Leftrightarrow n-3=7 \Leftrightarrow n=10$.

Logo, a forma geral dos termos deste desenvolvimento é ${}^{10}C_p\times\left(\dfrac{2}{x}\right)^{10-p}\times\left(-x^2\right)^p$, de onde:

$${}^{10}C_p\times\left(\frac{2}{x}\right)^{10-p}\times\left(-x^2\right)^p={}^{10}C_p\times 2^{10-p}\times\frac{1}{x^{10-p}}\times(-1)^p\times\left(x^2\right)^p={}^{10}C_p\times 2^{10-p}\times(-1)^p\times x^{p-10}\times x^{2p}=$$

$$={}^{10}C_p\times 2^{10-p}\times(-1)^p\times x^{p-10+2p}={}^{10}C_p\times 2^{10-p}\times(-1)^p\times x^{3p-10}$$

Logo, como se pretende o coeficiente do termo em x^{11}, vem $3p-10=11 \Leftrightarrow 3p=21 \Leftrightarrow p=7$.

$\therefore$ O coeficiente do termo em x^{11} é ${}^{10}C_7 \times 2^{10-7} \times (-1)^7 = 120 \times 2^3 \times (-1) = -960$.

Resposta: A

4.

4.1. O número de casos possíveis é ${}^{10}C_3$, que é o número de escolher três bolas entre um conjunto de dez.

Para que no conjunto das três bolas, não sejam todas da mesma cor, temos de considerar dois casos: duas vermelhas e uma branca, o número de maneiras de extrair três bolas nestas condições é ${}^{6}C_2 \times {}^{4}C_1$; uma vermelha e duas brancas, o número de maneiras de extrair três bolas nestas condições é ${}^{6}C_1 \times {}^{4}C_2$.

Logo, o número de casos favoráveis é ${}^{6}C_2 \times {}^{4}C_1 + {}^{6}C_1 \times {}^{4}C_2$.

A probabilidade pedida é $\dfrac{{}^{6}C_2 \times {}^{4}C_1 + {}^{6}C_1 \times {}^{4}C_2}{{}^{10}C_3} = \dfrac{96}{120} = \dfrac{4}{5}$.

4.2. $P\left(\overline{A} \middle| (B \cap C)\right)$ é a probabilidade de as seis bolas extraídas não serem todas da mesma cor, sabendo que as cinco primeiras são todas da mesma cor mas nenhuma delas é preta.

Como as cinco primeiras são todas da mesma cor, mas nenhuma é preta, conclui-se que as cinco primeiras extraídas são vermelhas.

Logo, para a sexta extracção estão na caixa $n+10-5=n+5$ bolas, sendo que n são pretas, quatro são brancas e uma é vermelha.

Portanto, o número de casos possíveis é $n+5$. Como queremos que as seis bolas não sejam todas da mesma cor, então na sexta extracção não pode sair uma bola vermelha, tem de sair uma preta ou uma branca. Logo, o número de casos favoráveis é $n+4$ e portanto $P\left(\overline{A} \middle| (B \cap C)\right) = \dfrac{n+4}{n+5}$.

Assim, como $P\left(\overline{A} \middle| (B \cap C)\right) = 96\%$, vem que:

$$\frac{n+4}{n+5} = 96\% \Leftrightarrow \frac{n+4}{n+5} = 0{,}96 \Leftrightarrow n+4 = 0{,}96(n+5) \Leftrightarrow n+4 = 0{,}96n + 4{,}8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n - 0{,}96n = 4{,}8 - 4 \Leftrightarrow 0{,}04n = 0{,}8 \Leftrightarrow n = \frac{0{,}8}{0{,}04} \Leftrightarrow n = 20$$

$\therefore\ n = 20$

5. Sabe que haverá um dia t_0 em que passados exactamente dois meses desse dia, o número de habitantes no Bairro da Fonte será 92% superior ao número de habitantes que viviam no Bairro do Garrafão no dia t_0.

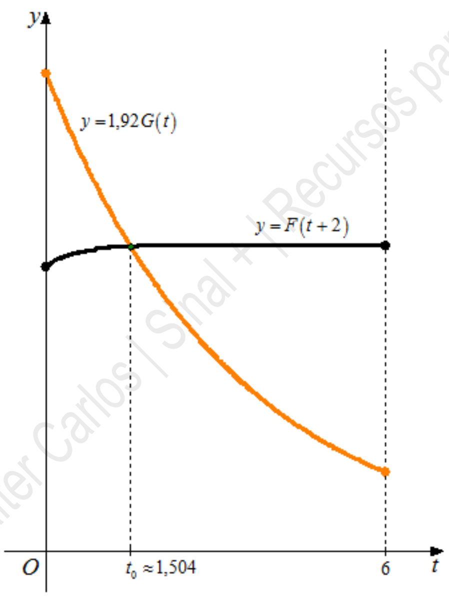
Tem-se que:

- passados dois meses do dia t_0 o número de habitantes no Bairro da Fonte é dado por $F(t_0+2)$;

- passados dois meses do dia t_0 o número de habitantes no Bairro da Fonte será 92% superior ao número de habitantes que viviam no Bairro de Garrafão no dia t_0, isto é, é igual a $G(t_0)+0{,}92G(t_0)=1{,}92G(t_0)$.

Portanto, t_0 é solução da equação $F(t+2)=1{,}92G(t)$.

No editor de funções da calculadora gráfica define-se $y_1=F(t+2)$ e $y_2=1{,}92G(t)$ na janela $[0,6]\times[0,22]$:



Portanto, $F(t+2)=1{,}92G(t)\Leftrightarrow t=t_0$, com $t_0\approx 1{,}504$. Como $0{,}504\times 30\approx 15$, o dia correspondente a t_0 é o dia 15 de Outubro de 2019.

6. Seja z_1 o afixo do único ponto definido pela condição dada. Assim z_1 satisfaz a condição pelo que:

▪ $|2z_1+iz_1|=|z_1(2+i)|=|z_1|\times|2+i|=|z_1|\times\sqrt{2^2+1^2}=|z_1|\times\sqrt{5}$.

Portanto, $|2z_1+iz_1|=1\Leftrightarrow|z_1|\times\sqrt{5}=1\Leftrightarrow|z_1|=\frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow|z_1|=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

▪ $3z_1-3iz_1=z_1(3-3i)$.

Sendo θ um argumento de $3-3i$, vem que $\operatorname{tg}\theta=\frac{-3}{3}=-1$ e $\theta\in 4.^{\circ}Q$, pelo que $\theta=-\frac{\pi}{4}$. Portanto, sendo α um argumento de z_1, vem que:

$$3z_1-3iz=z_1(3-3i)=|z_1|e^{i\alpha}\times|3-3i|e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\times=|z_1|\times|3-3i|e^{i\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}$$

Mas como $\operatorname{Arg}(3z_1-3iz_1)=\frac{\pi}{2}$, vem que $\alpha-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\alpha=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, pelo que um argumento de z_1 é $\frac{3\pi}{4}$.

Logo, $z_1=\frac{\sqrt{5}}{5}e^{i\frac{3\pi}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=-\frac{\sqrt{10}}{10}+\frac{\sqrt{10}}{10}i$.

Resposta: C

7. Tem-se que:

▪ para $n\in\mathbb{N}$ e $n<10$, o número de termos de (u_n) é finito. Neste caso, o menor termo da sucessão é $u_1=2^1=2$ e o maior termo é $u_9=2^9=512$.

Portanto, para $n\in\mathbb{N}$ e $n<10$, vem que $2\leq u_n\leq 512$.

▪ para $n\in\mathbb{N}$ e $n\geq 10$, $u_n=\frac{2n+3}{n+2}$.

Fazendo a divisão inteira, vem:

$$\begin{array}{rcr|l}
2n & + & 3 & n+2 \\ \cline{4-4}
-2n & - & 4 & 2 \\ \hline
 & & -1 &
\end{array}$$

Logo, $u_n = 2 - \frac{1}{n+2}$, pelo que, para $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 10$, vem que:

$$n \geq 10 \Leftrightarrow n+2 \geq 12 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{12} \Leftrightarrow -\frac{1}{12} \leq -\frac{1}{n+2} < 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{12} \leq \underbrace{2 - \frac{1}{n+2}}_{u_n} < 2 \Leftrightarrow \frac{23}{12} \leq u_n < 2$$

Portanto, para $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 10$, vem que $\frac{23}{12} \leq u_n < 2$.

$\therefore \ \frac{23}{12} \leq u_n \leq 512$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, (u_n) é limitada.

8. Seja t a recta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1. Assim, o declive de t, m_t, é dado por $g'(1)$.

Como $g'(x) = (ax)' e^{2x} + ax\left(e^{2x}\right)' = ae^{2x} + ax(2x)' e^{2x} = ae^{2x} + 2axe^{2x} = ae^{2x}(1+2x)$, vem que:

$$m_t = g'(1) = ae^{2\times 1}(1 + 2\times 1) = 3ae^2$$

Mas a inclinação da recta t é 85°, pelo que, por outro lado, $m_t = \operatorname{tg}(85^{\circ})$.

Logo, $3ae^2 = \operatorname{tg}(85^{\circ}) \Leftrightarrow a = \frac{\operatorname{tg}(85^{\circ})}{3e^2} \approx 0{,}52$.

Resposta: B

CADERNO 2

9.

9.1. Tem-se que:

- um vector director da recta r é $\vec{r}\left(a,1,-3a^2\right)$
- um vector normal ao plano α é $\vec{n}\left(1,b,\frac{1}{a}\right)$

Como a recta r é paralela ao plano α, vem que os vectores $\vec{r}$ e $\vec{n}$ são perpendiculares, pelo que $\vec{r}\cdot\vec{n}=0$. Assim:

$$\vec{r}\cdot\vec{n}=0 \Leftrightarrow \left(a,1,-3a^2\right)\cdot\left(1,b,\frac{1}{a}\right)=0 \Leftrightarrow a\times 1+1\times b-3a^{\cancel{2}}\times\frac{1}{\cancel{a}}=0 \underset{a\neq 0}{\Leftrightarrow} a+b-3a=0 \Leftrightarrow b-2a=0 \Leftrightarrow b=2a$$

Logo, como b é igual ao dobro de a e ambos são diferentes de zero, a única opção que verifica estas duas condições é a **C**.

Resposta: C

9.2. Tem-se que:

- para $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $\operatorname{sen} x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ se e somente se $x=\frac{\pi}{3}$, pelo que $\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$;
- para $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $\operatorname{tg} x=-\sqrt{3}$ se e somente se $x=-\frac{\pi}{3}$, pelo que $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{\pi}{3}$;
- $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{a}\right)\right)=\frac{2}{a}$

Logo:

$$\cos\left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)\right)=\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{a}\right)\right) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=\frac{2}{a} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{2}{a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}=\frac{2}{a} \Leftrightarrow a=-4$$

Resposta: A

10. Tem-se que:

- $i^{17}=i^{16}\times i=\left(i^4\right)^4\times i=1^4\times i=i$ e $i^{4n+5}=i^{4n}\times i^5=\left(i^4\right)^n\times i^4\times i=1^n\times 1\times i=i$, pelo que:

$$z_1=\frac{1+i^{17}}{1-i}-\frac{1-i^{4n+5}}{1+i}=\frac{1+i}{1-i}-\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1+i)^2-(1-i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i+i^2-\left(1-2i+i^2\right)}{1^2-i^2}=$$

$$=\frac{\cancel{1}+2i-\cancel{1}-\cancel{1}+2i+\cancel{1}}{1+1}=\frac{4i}{2}=2i=2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

- $z_2=\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right)=e^{i\frac{\pi}{12}}$

Portanto, $z_3=z_1\times z_2=2e^{i\frac{\pi}{2}}\times e^{i\frac{\pi}{12}}=2e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right)}=2e^{i\frac{7\pi}{12}}$.

Como z_3 é uma das raízes cúbicas de $k-ki$, vem que $\left(z_3\right)^3=k-ki$, pelo que:

$$\left(z_3\right)^3=k-ki\Leftrightarrow\left(2e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)^3=k-ki\Leftrightarrow 2^3e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\times 3\right)}=k-ki\Leftrightarrow 8e^{i\frac{7\pi}{4}}=k-ki\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)=k-ki\Leftrightarrow 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=k-ki$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{2}-4\sqrt{2}\,i=k-ki\Rightarrow k=4\sqrt{2}$$

$\therefore\ k=4\sqrt{2}$

11.

11.1. Tem-se que $P(X>-1)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow P(X=1)+P(X=2)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2a+3a=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 5a=\frac{1}{2}\Leftrightarrow a=\frac{1}{10}$.

Logo, $P(X=-2)=1-6\times\frac{1}{10}=\frac{4}{10}$, $P(X=-1)=\frac{1}{10}$, $P(X=1)=2\times\frac{1}{10}=\frac{2}{10}$ e $P(X=2)=3\times\frac{1}{10}=\frac{3}{10}$.

Portanto, o valor médio μ, da variável aleatória X é:

$$\mu=-2\times\frac{4}{10}-1\times\frac{1}{10}+1\times\frac{2}{10}+2\times\frac{3}{10}=-\frac{8}{10}-\frac{1}{10}+\frac{2}{10}+\frac{6}{10}=-\frac{1}{10}$$

Resposta: B

11.2. A função g é duas vezes derivável em $[0,4]$, pelo que é contínua e derivável em $[0,2]$ e em $[2,4]$ e portanto, pelo teorema de Lagrange tem-se:

- $\exists c_1 \in]0,2[: \ g'(c_1) = \dfrac{g(2)-g(0)}{2-0}$.

Mas $\dfrac{g(2)-g(0)}{2-0} = \dfrac{3-1}{2-0} = 1$, pelo que $\exists c_1 \in]0,2[: \ g'(c_1) = 1$.

- $\exists c_2 \in]2,4[: \ g'(c_2) = \dfrac{g(4)-g(2)}{4-2}$.

Mas $\dfrac{g(4)-g(2)}{4-2} = \dfrac{5-3}{2} = 1$, pelo que $\exists c_2 \in]2,4[: \ g'(c_2) = 1$.

Como $c_1 \in]0,2[$ e $c_2 \in]2,4[$, vem que $c_1 \neq c_2$ e portanto, existem c_1 e c_2 distintos e pertencentes ao intervalo $]0,4[$ tais que $g'(c_1) = g'(c_2)$.

A afirmação **I.** é verdadeira.

Por outro lado, como g é duas vezes derivável em $[0,4]$, vem que g' é derivável em $[0,4]$ e portanto é derivável e contínua em $]c_1, c_2[\subset [0,4]$ (c_1 e c_2 são os pontos distintos onde $g'(c_1) = g'(c_2)$ que já provámos existir).

Logo, pelo teorema de Lagrange $\exists c \in]c_1, c_2[: \ g''(c) = \dfrac{\overbrace{g'(c_2) - g'(c_1)}^{=0}}{c_2 - c_1} \Leftrightarrow \exists c \in]c_1, c_2[: \ g''(c) = 0$, ou seja, g'' tem pelo menos um zero no intervalo $]0,4[$.

A afirmação **II.** é verdadeira.

Resposta: D

12.

12.1. Tem-se que $\left(f \circ g^{-1}\right)(-1) = f\left(g^{-1}(-1)\right)$.

Como $g(x) = -1 \Leftrightarrow 3x - 1 = -1 \Leftrightarrow 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, vem que $g(0) = -1$. Logo, como a função g é bijectiva, pois o seu gráfico é uma recta de declive não nulo, vem que $g^{-1}(-1) = 0$.

Então $\left(f \circ g^{-1}\right)(-1) = f\left(g^{-1}(-1)\right) = f(0) = \dfrac{3 \times 0 + 8}{\sqrt{0^2 + 9}} = \dfrac{8}{\sqrt{9}} = \dfrac{8}{3}$.

Resposta: B

12.2. Assimptotas verticais:

- $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{3x+8}{\sqrt{x^2+9}} = \dfrac{3\times 4+8}{\sqrt{4^2+9}} = \dfrac{20}{\sqrt{25}} = \dfrac{20}{5} = 4$

- $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{xe^{x-3}-4e}{x-4} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{i)}{=}} \lim\limits_{y\to 0^+} \dfrac{(y+4)e^{y+4-3}-4e}{y} = \lim\limits_{y\to 0^+} \dfrac{ye^{y+1}+4e^{y+1}-4e}{y} =$

$$= \lim_{y\to 0^+} \frac{\cancel{y}e^{y+1}}{\cancel{y}} + \lim_{y\to 0^+} \frac{4e^{y+1}-4e}{y} = e^{0+1} + \lim_{y\to 0^+} \frac{4e\left(e^y-1\right)}{y} = e + 4e \underbrace{\lim_{y\to 0^+} \frac{e^y-1}{y}}_{\text{Limite notável}} = e + 4e = 5e$$

***i*) Mudança de variável:** se $x \to 4^+$ então $x-4 \to 0^+$. Seja $y = x-4 \Leftrightarrow x = y+4$, $y \to 0^+$.

Logo, o gráfico de f não tem assimptota vertical em $x=4$.

Como f é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{4\}$, o seu gráfico não tem mais assimptotas verticais.

Assimptota horizontal quando $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{3x+8}{\sqrt{x^2+9}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to -\infty} \frac{x\left(3+\frac{8}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{9}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x\left(3+\frac{8}{x}\right)}{\sqrt{x^2}\times\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}} \underset{ii)}{=} \lim_{x\to -\infty} \frac{\cancel{x}\left(3+\frac{8}{x}\right)}{-\cancel{x}\times\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}} =$$

$$= \frac{3+\frac{8}{-\infty}}{-\sqrt{1+\frac{9}{(-\infty)^2}}} = \frac{3-0}{-\sqrt{1+\frac{9}{+\infty}}} = \frac{3}{-\sqrt{1+0}} = -3$$

Logo, a recta de equação $y=-3$ é assimptota horizontal ao gráfico de f quando $x\to -\infty$.

***ii*)** Como $x \to -\infty$, vem que $x<0$, pelo que $\sqrt{x^2} = |x| = -x$.

13. Tem-se que:

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} : \underbrace{x+3>0}_{x>-3} \ \wedge \ \underbrace{4-x>0}_{x<4} \ \wedge \ x>0\right\} = \left\{x\in\mathbb{R} : x>-3 \ \wedge \ x<4 \ \wedge \ x>0\right\} =$$

$$= \left\{x\in\mathbb{R} : x<4 \ \wedge \ x>0\right\} = \left]0,4\right[$$

Neste domínio tem-se:

$$\log_4(x+3)-\log_4(4-x)\geq\frac{1}{2}+\log_4 x \underset{\frac{1}{2}=\log_4\left(4^{\frac{1}{2}}\right)}{\Leftrightarrow} \log_4(x+3)\geq\log_4\left(4^{\frac{1}{2}}\right)+\log_4 x+\log_4(4-x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_4(x+3)\geq\log_4\sqrt{4}+\log_4\left(x(4-x)\right)$$

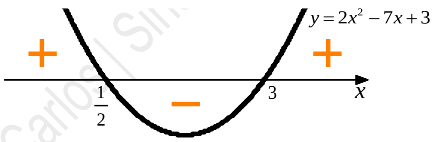
$$\Leftrightarrow \log_4(x+3)\geq\log_4\left(2x(4-x)\right)$$

$$\Leftrightarrow x+3\geq 2x(4-x)\Leftrightarrow x+3\geq 8x-2x^2\Leftrightarrow 2x^2-7x+3\geq 0$$

Cálculo auxiliar:

$$2x^2-7x+3=0\Leftrightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{(-7)^2-4\times2\times3}}{2\times2}\Leftrightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{25}}{4}\Leftrightarrow x=\frac{7-5}{4}\vee x=\frac{7+5}{4}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\vee x=3$$

Como a função $y=2x^2-7x+3$ é quadrática e o seu gráfico tem a concavidade voltada para cima, vem que as soluções da inequação $2x^2-7x+3\geq 0$ são os valores de x tais que $x\in\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup[3,+\infty[$.



Intersectando com $D=]0,4[$, vem que o conjunto solução da inequação é:

$$\left(\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup[3,+\infty[\right)\cap]0,4[=\left]0,\frac{1}{2}\right]\cup[3,4[$$

14. A função f é polinomial de grau 3 e tem exactamente dois zeros, pelo que um deles é necessariamente de multiplicidade 1 e o outro é de multiplicidade 2. Assim, observando o gráfico, conclui-se que o zero de multiplicidade 2 da função f é o negativo.

Logo, como $u_n\to a$ e a o zero de multiplicidade 2 de f, vem que $\lim f(u_n)=\lim\limits_{x\to a}f(x)=0^-$, pelo que:

$$\lim\frac{\ln(u_n-a)^2}{f(u_n)}=\frac{\lim\ln(u_n-a)^2}{\lim f(u_n)}=\frac{\ln\left(\lim(u_n-a)^2\right)}{0^-}=\frac{\ln(0^+)}{0^-}=\frac{-\infty}{0^-}=+\infty$$

Resposta: D

15.

15.1. Tem-se que:

- $h'(x)=\left(2x^2+\ln(\cos x)\right)'=\left(2x^2\right)'+\left(\ln(\cos x)\right)'=4x+\dfrac{(\cos x)'}{\cos x}=4x-\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}=4x-\operatorname{tg} x$

- $h''(x)=(4x-\operatorname{tg} x)'=4-\dfrac{1}{\cos^2 x}=\dfrac{4\cos^2 x-1}{\cos^2 x}$

- $h''(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{4\cos^2 x-1}{\cos^2 x}=0 \Leftrightarrow 4\cos^2 x-1=0 \ \wedge \ \underbrace{\cos^2 x\neq 0}_{\substack{\text{Condição universal}\\ \text{em } \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}} \Leftrightarrow \cos^2 x=\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \cos x=\pm\sqrt{\dfrac{1}{4}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\cos x=-\frac{1}{2}}_{\substack{\text{Equação impossível}\\ \text{em } \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}} \ \vee \ \cos x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}$$

Como $x\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, vem que os zeros de h'' são $-\dfrac{\pi}{3}$ e $\dfrac{\pi}{3}$.

Fazendo um quadro de variação do sinal de h'', vem:

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$4\cos^2 x-1$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$\cos^2 x$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0
$h''(x)$	n.d.	$-$	0	$+$	0	$-$	n.d.
Gráfico de h	n.d.	$\frown$	p.i.	$\smile$	p.i.	$\frown$	n.d.

O gráfico de h tem a concavidade voltada para baixo em $\left]-\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{3}\right]$ e em $\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right[$, tem a concavidade voltada para cima em $\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right]$ e tem ponto de inflexão em $x=-\dfrac{\pi}{3}$ e em $x=\dfrac{\pi}{3}$.

15.2. A função h é contínua em $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ por ser a soma e a composição entre funções contínuas no seu domínio (funções polinomiais, trigonométricas e logarítmicas).

Logo, h é contínua em $[0,1]\subset\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

Tem-se que:

- $h(0)=2\times0^2+\ln(\cos(0))=0+\ln(1)=\ln(1)=0\Rightarrow h(0)<1$
- $h(1)=2\times1^2+\ln(\cos(1))=2+\ln(\cos(1))$

A função $y=\cos x$ é decrescente em $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ e como 1 e $\frac{\pi}{3}$ pertencem a $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, e $1<\frac{\pi}{3}$, vem que:

$$1<\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow\cos(1)>\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow\cos(1)>\frac{1}{2}\underset{\substack{y=\ln x\text{ é}\\ \text{crescente em }\mathbb{R}^+}}{\Leftrightarrow}\ln(\cos(1))>\ln\left(\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ln(\cos(1))>-\ln2\Leftrightarrow2+\ln(\cos(1))>2-\ln2\Leftrightarrow h(1)>2-\ln2$$

Mas, $2<e\Leftrightarrow e>2\underset{\substack{y=\ln x\text{ é}\\ \text{crescente em }\mathbb{R}^+}}{\Leftrightarrow}\ln e>\ln2\Leftrightarrow1>\ln2\Leftrightarrow-\ln2>-1\Leftrightarrow2-\ln2>2-1\Leftrightarrow2-\ln2>1$

Logo, $h(1)>2-\ln2>1\Rightarrow h(1)>1$

$\therefore$ Como h é contínua em $[0,1]$ e como $h(0)<1<h(1)$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy existe pelo menos um $c\in\,]0,1[$ tal que $h(c)=1$, ou seja, a equação $h(x)=1$ tem pelo menos uma solução em $[0,1]$.

FIM