www.sinalmaismat.com
facebook.com/sinalmaismat

Prova Modelo de Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 4 | Ensino Secundário | 2017

12º Ano de Escolaridade

Nuno Miguel Guerreiro

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

---

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso do corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Todos os itens desta prova são originais do autor – referência ao autor no rodapé da prova. Prova realizada em junho de 2017.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ($k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x + 1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Página em branco

GRUPO I

1. Seja Ω, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$) tais que:

- A e B são incompatíveis;
- $P(A) = 0{,}4$
- $P(B) = 0{,}3$

Qual o valor de $P(B|\overline{A})$?

(A) $0{,}3$ **(B)** $0{,}4$ **(C)** $0{,}5$ **(D)** $0{,}6$

2. Considere uma variável aleatória X que segue uma distribuição normal de valor médio 5

Sabe-se que $P(2 < X < 5) = 0{,}4$

Qual é o valor de $P(X < 8)$?

(A) $0{,}6$ **(B)** $0{,}7$ **(C)** $0{,}8$ **(D)** $0{,}9$

3. Considere as constantes reais a e b ($a > 1$ e $b > 1$), tais que $\log_a b = 3$

Qual é, para esses valores de a e de b, o valor de $a^{3\log_b a}$?

(A) a **(B)** b **(C)** a^3 **(D)** b^3

4. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, definida por $g(x) = \dfrac{\sin(-2x+2)}{3x-3}$

Considere a sucessão de termo geral $u_n = \dfrac{n+1}{n}$

Qual o valor de $\lim g(u_n)$?

(A) -1 **(B)** $-\dfrac{2}{3}$ **(C)** 0 **(D)** $+\infty$

5. Considere, num referencial o.n $Oxyz$, a reta r definida por: $\begin{cases} x = z \\ y = 2x \end{cases}$

Seja β o plano definido pela equação $ax + 2y + z = 5$

Qual é o valor de a, sabendo que a reta r é paralela ao plano β ?

(A) -5 **(B)** -1 **(C)** 1 **(D)** 5

6. Considere num referencial o.n $Oxyz$ o segmento de reta $[AB]$ representado na figura 2.

Sabe-se que:

- O é a origem do referencial
- A pertence à reta de equação $x = 1$
- d representa a distância entre os pontos A e B
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo orientado cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta $\dot{O}B$ $\left(\alpha \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[\right)$

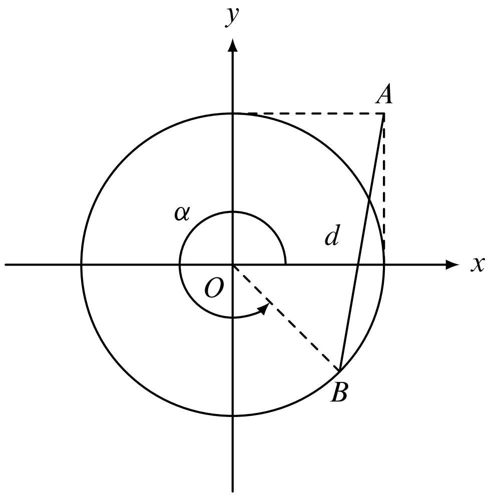

Figura 2

Qual das expressões seguintes dá a distância dos pontos A a B, d, em função de α?

(A) $\sqrt{3 + 2(\cos\alpha + \sin\alpha)}$ **(B)** $\sqrt{3 - 2(\cos\alpha + \sin\alpha)}$

(C) $\sqrt{3 + 2(\cos\alpha - \sin\alpha)}$ **(D)** $\sqrt{3 + 2(\sin\alpha - \cos\alpha)}$

7. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $z = a + bi$

Sejam a e b números reais positivos tais que $b > a$ e $|z| = 1$

A que quadrante do plano complexo pertence a imagem geométrica de $z^2 - i$?

(A) Primeiro **(B)** Segundo **(C)** Terceiro **(D)** Quarto

8. Considere uma progressão aritmética (u_n), tal que $u_n = 2n + k$, em que k designa um número real.

Qual é o valor de k, sabendo que $u_1 + u_2 + \cdots + u_8 = 56$?

(A) -2 **(B)** -1 **(C)** 0 **(D)** 4

GRUPO II

1. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

Considere o número complexo $z = \dfrac{2\,e^{i\,\frac{3\pi}{4}} + 2\sqrt{2}}{k + i^{7}}$

Para um certo número real k, o número complexo z é um número imaginário puro.

Determine esse número k

2. Considere o prisma triangular $[OABCDE]$, representada num referencial o.n $Oxyz$, na Figura 2

Sabe-se que:

- a face $[OAB]$ está contida no plano xOy
- o plano CDE tem equação $z = 3$
- o plano AEC tem equação $x + 2y = 8$
- o triângulo $[OAB]$ é isósceles $\left(\overline{OA} = \overline{BA}\right)$
- $\overline{OB} = 4$

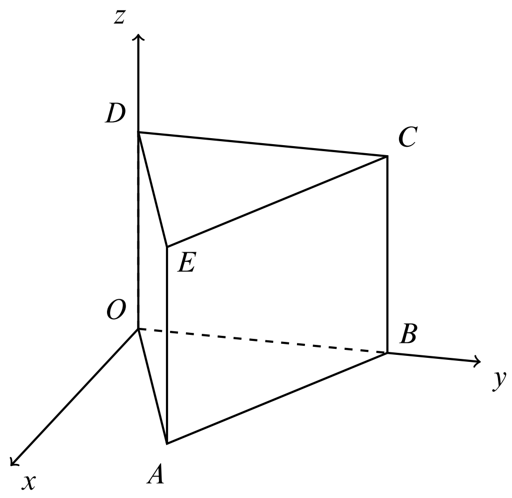

Figura 2

2.1. Seja C' o simétrico do ponto C, relativamente ao plano xOz

Determine a equação de um plano paralelo a AEC e que passe em C'

2.2. Determine uma condição cartesiana da reta ED

2.3. Determine uma equação geral do plano OBE

3. Um saco contém nove bolas coloridas numeradas de 1 a 9, indistinguíveis ao tato, tais que:

- as bolas numeradas de 1 a 3 são amarelas;
- as bolas numeradas de 4 a 6 são vermelhas;
- as bolas numeradas de 7 a 9 são azuis.

3.1. Considere que são selecionadas 8 das 9 bolas e estas são dispostas lado a lado.

De quantas maneiras se podem dispôr as bolas, de modo que as bolas com a mesma cor fiquem juntas?

3.2. Foram adicionadas ao saco n bolas ímpares amarelas.

Considere a experiência aleatória que consiste em retirar duas bolas, ao acaso e sem reposição, do saco e observar as respetivas cores e números.

Sejam A e B os acontecimentos:

A: "Na primeira extração é retirada uma bola ímpar vermelha"

B: "O produto dos números retirados é par e as bolas retiradas são de cores diferentes"

Indique o valor de $P(B|A)$, em função de n, sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada.

Justifique a sua resposta, começando por explicar o significado de $P(B|A)$ no contexto da situação descrita.

4. Considere a estação espacial representada na figura 3. É crítico manter a estação na orientação correta em relação ao Sol e à Terra, garantido energia e comunicações.

De forma a desenvolver um sistema estável, um engenheiro projetou um controlador tal que para uma dada propulsão, a orientação, θ, é dada, em radianos, t segundos após o início do efeito de propulsão por:

$$\theta(t) = \frac{1}{5} - \frac{1}{5} e^{-5t} \, (12{,}5\, t^2 + 5t + 1), \; t \geq 0$$

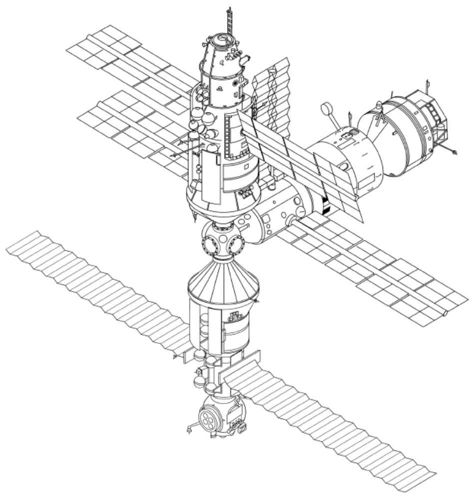

Figura 3

4.1. A segunda derivada de θ, θ'', pode ser tratada como uma aceleração angular.

Estude o sinal da aceleração, para retirar conclusões acerca da concavidade e existência de pontos de inflexão no gráfico da orientação.

4.2. Mostre que no primeiro segundo de movimento, a orientação da nave espacial foi, num dado instante, de $0{,}1$ radianos e, utilizando a calculadora gráfica, determine esse instante, arredondado às centésimas.

Na sua resposta:

- recorra ao teorema de Bolzano para provar que no primeiro segundo $(0 \leq t \leq 1)$, houve pelo menos um instante em que a orientação foi $0{,}1$ radianos;
- reproduza, num referencial o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora, devidamente identificado(s);
- apresente a solução pedida.

5. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x\,(1-e^{x})+1 & \text{se } x \leq 3 \\ x^2-2x-6\ln(x-3) & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

5.1. Resolva, para $x > 3$, a inequação $f(x) \leq x^2 - 2x - 6\ln(2x-8)$

Apresente a sua resposta na forma de intervalo de números reais.

5.2. O gráfico de f tem uma assíntota oblíqua quando $x \to -\infty$

Determine a equação reduzida dessa assíntota.

5.3. Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos do seu gráfico para $x > 3$

6. Considere uma função g definida em $\mathbb{R}$

Seja a uma constante real.

Prove que se g é uma função par, então $g'(a) + g'(-a) = 0$

Nota: Considere que $g'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(-a+h)-g(-a)}{h}$, e realize a mudança de variável $h = -y$, quando achar adequado.

FIM

COTAÇÕES

Grupo	Item												
	Cotação (em pontos)												
I	1. a 8.												
	8 x 5 pontos												40
II	1	2.1	2.2	2.3	3.1	3.2	4.1	4.2	5.1	5.2	5.3	6	
	15	15	5	10	15	15	15	15	15	15	15	10	160
TOTAL													200