Prova Modelo de Exame Nacional
Prova 4 – 2017

Proposta de Resolução
Matemática A

Nuno Miguel Guerreiro

I

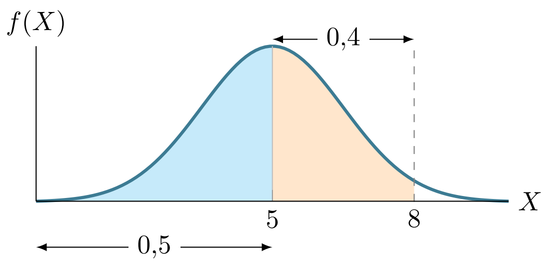
Chave da Escolha Múltipla
CDABADCA

1. Como A e B são acontecimentos incompatíveis, tem-se $P(A \cap B) = 0$, e portanto:

$$P(B|\overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \frac{0{,}3 - 0}{1 - 0{,}4} = \frac{0{,}3}{0{,}6} = 0{,}5$$

Resposta Correcta: (C)

2. Tem-se $P(2 < X < 5) = 0{,}4$, logo como $\mu = 5$, tem-se $P(5 > X > 8) = 0{,}4$.



e então $P(X < 8)P = P(0 < X < 8) = P(0 < X \leq 5) + P(5 < X < 8) = 0{,}5 + 0{,}4 = 0{,}9$

Resposta Correcta: (D)

3. Tem-se que $\log_a b = 3$, logo $b = a^3$, e uma vez que $3\log_b a = \log_b a^3 = \log_b b = 1$, vem $a^{3\log_a b} = a^1 = a$

Resposta Correcta: (A)

4. Tem-se $\lim u_n = \lim \frac{n+1}{n} = \lim \left(\frac{n}{n} + \frac{1}{n}\right) = 1 + 0^+ = 1^+$, e então:

$$\lim g(u_n) = \lim_{x \to 1^+} \frac{\sin(-2x+2)}{3x-3} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\sin\big(-2(x-1)\big)}{3(x-1)} \overset{y=x-1}{=} \lim_{y \to 0^+} \frac{\sin(-2y)}{3y} = -\frac{2}{3} \lim_{y \to 0^+} \frac{\sin(-2y)}{-2y} = -\frac{2}{3}$$

em que $\lim\limits_{y \to 0^+} \frac{\sin(-2y)}{-2y} = 1$ é limite notável.

Resposta Correcta: (B)

5. O plano β é paralelo à reta r, logo o vetor normal ao plano β, $\overrightarrow{n_\beta}$, é perpendicular ao vetor diretor da reta r, $\overrightarrow{u_r}$.

Tem-se que $x = z \wedge y = 2x$, logo $x = z \wedge x = \frac{y}{2}$, isto é $x = \frac{y}{2} = z$, e um vetor diretor de r é $(1{,}2{,}1)$.

Como $\overrightarrow{n_\beta} = (a{,}2{,}1)$, tem-se: $\overrightarrow{n_\beta} \cdot \overrightarrow{u_r} = 0 \Leftrightarrow (a{,}2{,}1) \cdot (1{,}2{,}1) = 0 \Leftrightarrow a + 4 + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -5$.

Resposta Correcta: (A)

6. A circunferência representada tem raio 1. O ponto A tem coordenadas $(1,1)$, e o ponto B tem coordenadas $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, em que α é um ângulo do quarto quadrante.

Desta forma tem-se:

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(1-\cos\alpha)^2 + (1-\sin\alpha)^2}\\ &= \sqrt{1 - 2\cos\alpha + \cos^2\alpha + 1 - 2\sin\alpha + \sin^2\alpha}\\ &= \sqrt{3 - 2(\sin\alpha + \cos\alpha)}\end{aligned}$$

Resposta Correcta: (B)

7. Tem-se que $z = a + bi$, com a e b positivos tais que $b > a$ e $|z| = 1$

Como $b > a$ e a e b são números reais positivos tem-se que $\frac{\pi}{4} < \arg(z) < \frac{\pi}{2}$, logo $\frac{\pi}{2} < \arg(z^2) < \pi$.

Logo z^2 pertence ao 2º quadrante e como $|z| < 1$, tem-se $|z^2| < 1$, e $\mathrm{Im}(z^2) < 1$, de tal forma que $\mathrm{Im}(z^2 - i) < 0$. Repare-se ainda que $\mathrm{Re}(z^2) = \mathrm{Re}(z^2 - i) < 0$, concluindo-se que como ambas as partes real e imaginária de $z^2 - i$ são negativas, então a imagem geométrica deste complexo está no terceiro quadrante.

Resposta Correcta: (C)

8. (u_n) é uma progressão aritmética tal que $u_1 = 2 + k$ e $u_8 = 16 + k$, logo:

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_8 = \frac{u_1 + u_8}{2} \times 8 = 4 \times (2 + k + 16 + k) = 4 \times (18 + 2k)$$

e portanto:

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_8 = 56 \Leftrightarrow 4 \times (18 + 2k) = 56 \Leftrightarrow 18 + 2k = 14 \Leftrightarrow 2k = -4 \Leftrightarrow k = -2$$

Resposta Correcta: (A)

FIM GRUPO I

II

1. Tem-se que:

$$\begin{aligned}z &= \frac{2\,e^{i\frac{3\pi}{4}} + 2\sqrt{2}}{k + i^7} = \frac{2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) + 2\sqrt{2}}{k + (-i)} = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{2}i + 2\sqrt{2}}{k - i}\\ &= \sqrt{2} \times \frac{1+i}{k-i} = \sqrt{2} \times \frac{(1+i)(k+i)}{(k-i)(k+i)} = \sqrt{2} \times \frac{k - 1 + i\,(1+k)}{k^2+1} =\\ &= \sqrt{2} \times \frac{k-1}{k^2+1} + \sqrt{2} \times i \times \frac{k+1}{k^2+1}\end{aligned}$$

De forma a que z seja um imaginário puro, tem-se que $\mathrm{Re}(z) = 0$, logo:

$$\mathrm{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} \times \frac{k-1}{k^2+1} = 0 \overset{k^2+1\neq 0}{\Leftrightarrow} k - 1 = 0 \Leftrightarrow k = 1$$

Conclui-se que para $k = 1$, z é um imaginário puro.

$$i^7 = i^4 \times i^3 = i^3 = -i$$

$$\begin{aligned}e^{i\frac{3\pi}{4}} &= \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\end{aligned}$$

2.

2.1. O ponto C tem coordenadas $(0{,}4{,}3)$, logo, C', ponto simétrico de C em relação ao plano xOz tem coordenadas $(0,-4{,}3)$. Um plano paralelo a AEC é tal que o seu vetor normal tem a mesma direção do vetor normal de AEC: $(1{,}2{,}0)$. Logo tem-se que uma equação do plano é $x+2y+d=0$, e uma vez que passa em C' tem-se: $0+2\times(-4)+d=0 \Leftrightarrow d=8$

Uma equação de um plano paralelo a AEC e que passa em C' é $x+2y+8=0$.

2.2. O ponto E tem coordenadas $(4{,}2{,}3)$ e o ponto D tem coordenadas $(0{,}0{,}3)$, e, desta forma, o vetor diretor da reta é $\overrightarrow{ED}=D-E=(0{,}0{,}3)-(4{,}2{,}3)=(-4,-2{,}0)$.

Logo tem-se que uma condição cartesiana da reta ED é: $\dfrac{x-0}{-4}=\dfrac{y-0}{-2}\wedge z=3 \Leftrightarrow \dfrac{-x}{4}=\dfrac{-y}{2}\wedge z=3$.

2.3. O plano OBE contém os pontos O, B e E, de coordenadas $(0{,}0{,}0)$, $(0{,}4{,}0)$ e $(4{,}2{,}3)$, respetivamente.

O vetor normal a OBE, $\vec{n}=(a{,}b{,}c)$, é perpendicular aos vetores $\overrightarrow{OE}$ e $\overrightarrow{OB}$, por exemplo.

Desta forma, tendo em conta, que $\overrightarrow{OE}=E=(4{,}2{,}3)$ e $\overrightarrow{OB}=B=(0{,}4{,}0)$, tem-se:

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{OE}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{OB}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a{,}b{,}c)\cdot(4{,}2{,}3)=0\\ (a{,}b{,}c)\cdot(0{,}4{,}0)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4a+2b+3c=0\\ 4b=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4a=-3c\\ b=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-\dfrac{3}{4}\times c\\ b=0\end{cases}$$

desta forma tem-se que $\vec{n}=\left(-\dfrac{3}{4}\times c\,,0,c\right)$, e para $c=4$ vem $\vec{n}=(-3{,}0{,}4)$.

A equação do plano OBE é da forma $-3x+4z+d=0$, e passando em $O(0{,}0{,}0)$, conclui-se que $d=0$, e portanto a equação geral do plano OBE é $-3x+4z=0$.

3.

3.1. Vão ser escolhidas 8 das 9 bolas do saco, logo, existem duas das três cores que vão estar completamente representadas nas bolas escolhidas. Definindo quais duas dessas três cores é que estarão: ${}^3C_2$.

As bolas de cada cor podem permutar (repare-se que estão numeradas) entre elas: $3!\times 3!\times 2!$

Os conjuntos de bolas de cada cor podem trocar entre eles: $3!$

O número total de maneiras que se podem dispôr as bolas, de modo que as bolas com a mesma cor fiquem juntas é: ${}^3C_2\times 3!\times 3!\times 2!\times 3!=1296$

3.2. No contexto da situação descrita, $P(B|A)$, representa probabilidade do produto dos números retirados ser par e as bolas retiradas serem de cores diferentes, sabendo que na primeira extração é retirada uma bola ímpar vermelha.

Repare-se que numa segunda extração, de forma a que o produto seja par, tem de ser retirada uma bola par amarela ou azul, uma vez que as bolas retiradas devem ser de cores diferentes, logo os casos favoráveis são as bolas 2 e 8.

Numa segunda extração existem 2 bolas vermelhas, $n+3$ bolas amarelas e 3 bolas azuis, num total de $n+8$ bolas.

A probabilidade pedida é dada, em função de n, por $P(B|A)=\dfrac{2}{n+8}$.

4.

4.1. Deve-se determinar o sinal da aceleração angular, θ''. Tem-se então:

$$\theta'(t) = \left(\frac{1}{5}\right)' - \frac{1}{5}\left((e^{-5t})'(12{,}5t^2+5t+1) + e^{-5t}(12{,}5t^2+5t+1)'\right)$$
$$= 0 - \frac{1}{5}\left(-5e^{-5t}(12.5t^2+5t+1) + e^{-5t}(25t+5)\right)$$
$$= e^{-5t}(12{,}5t^2+5t+1-5t-1) = 12{,}5\,e^{-5t}\,t^2$$

e então:

$$\theta''(t) = 12{,}5\left((e^{-5t})'t^2 + e^{-5t}(t^2)'\right) = 12{,}5\left(-5e^{-5t}t^2 + 2te^{-5t}\right)$$
$$= 12{,}5\,e^{-5t}\,(-5t^2+2t) = 12{,}5\,t\,e^{-5t}\,(-5t+2)$$

Através de uma tabela de sinais:

t	0		$\frac{2}{5}$	$+\infty$
$\theta''(t)$	0	$+$	0	$-$
$\theta(t)$		$\cup$	P.I	$\cap$

Conclui-se então que:

- o gráfico de θ tem concavidade virada para cima em $\left]0, \frac{2}{5}\right[$
- o gráfico de θ tem concavidade virada para baixo em $\left]\frac{2}{5}, +\infty\right[$
- o gráfico de θ tem um ponto de inflexão para $t = \frac{2}{5}$

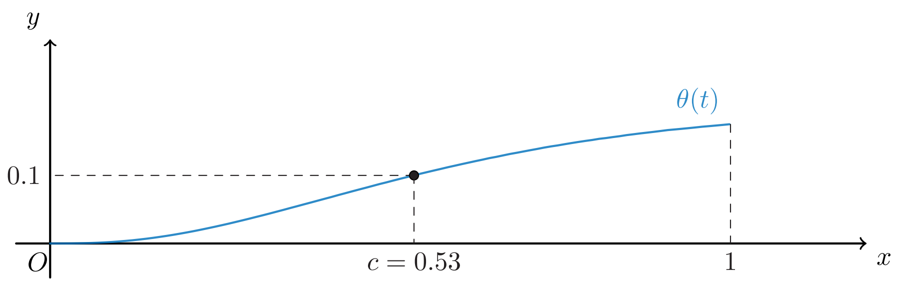
4.2. A função θ é contínua no seu domínio pois resulta de operações básicas entre funções contínuas (polinomial e exponencial), logo, é contínua em $[0,1]$.

Determine-se $\theta(0)$ e $\theta(1)$ tal que:

$$\theta(0) = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}e^{-0}\,(0+0+1) = \frac{1}{5} - \frac{1}{5} = 0$$
$$\theta(1) = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}e^{-1}\,(12{,}5+5+1) \approx 0{,}175$$

e tem-se $\theta(0) < 0{,}1 < \theta(1)$, logo, pode-se concluir pelo Teorema de Bolzano: $\exists\, c \in]0{,}1[: \theta(c) = 0{,}1$.

Através dos recursos gráficos da calculadora pode-se determinar o instante de tempo para o qual $\theta(c) = 0{,}1$.



Logo, conclui-se, que o instante em que a orientação da nave espacial foi de $0{,}1$ radianos foi $t = 0{,}53$ segundos.

5.

5.1. Para $x > 3$ tem-se $f(x) = x^2 - 2x - 6\ln(x-3)$, e então para resolver $f(x) \leq x^2 - 2x - 6\ln(2x-8)$, deve-se ter atenção que $6\ln(2x-8)$ está apenas definido para $2x - 8 > 0 \Leftrightarrow x > 4$.

Desta forma:

$x^2 - 2x - 6\ln(x-3) \leq x^2 - 2x - 6\ln(2x-8) \Leftrightarrow 6\ln(2x-8) - 6\ln(x-3) \leq 0 \Leftrightarrow$

$6\ln\left(\dfrac{2x-8}{x-3}\right) \leq 0 \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{2x-8}{x-3}\right) \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x-8}{x-3} \leq 1 \Leftrightarrow \dfrac{2x-8}{x-3} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow$

$\dfrac{2x-8-(x-3)}{x-3} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-5}{x-3} \leq 0 \Leftrightarrow x - 5 \leq 0 \overset{x-3>0,\, \forall x>4}{\Leftrightarrow} x \leq 5$

Conclui-se então que a solução da inequação é $4 < x \leq 5$.

5.2. O gráfico de f tem uma assíntota oblíqua quando $x \to -\infty$, logo:

$m = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x(1-e^x)+1}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}(1-e^x) + \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x} = 1 - e^{-\infty} + \dfrac{1}{-\infty} = 1 - 0 + 0 = 1$

e então conclui-se que:

$b = \lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x - xe^x + 1 - x) = 1 - \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x \overset{y=-x}{=} 1 + \lim\limits_{y\to+\infty} ye^{-y}$

$= 1 + \lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{y}{e^y} = 1 + \lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{e^y}{y}} = 1 + \dfrac{1}{+\infty} = 1 + 0 = 1$

em que $\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{e^y}{y} = +\infty$ é limite notável.

Conclui-se então que $y = x + 1$ é assíntota oblíqua do gráfico de f quando $x \to -\infty$.

5.3. Tem-se:

$f'(x) = (x^2-2x)' - 6\left(\ln(x-3)\right)' = 2x - 1 - 6 \times \dfrac{(x-3)'}{x-3} = 2x - 1 - \dfrac{6}{x-3} = \dfrac{(2x-1)(x-3)-6}{x-3}$

$= \dfrac{2x^2 - 6x - 2x + 6 - 6}{x-3} = \dfrac{2x^2-8x}{x-3} = \dfrac{2x(x-4)}{x-3}$

Conclui-se portanto que $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(x-4) = 0 \wedge x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4 \wedge x \neq 3$.

Repare-se que se está a estudar o gráfico de f para $x > 3$, logo $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$.

É então de fácil conclusão que $f'(x) > 0, \forall x \in]4, +\infty[$, $f'(x) < 0, \forall x \in]3,4[$ e que, portanto, o gráfico de f tem um mínimo em $x = 4$, tal que $f(4) = 4^2 - 2 \times 4 - 6\ln(4-3) = 8$.

6. Como g é par tem-se que $g(a) = g(-a)$, portanto, pela definição de derivada no ponto $-a$:

$g'(-a) = \lim\limits_{h\to0}\dfrac{g(-a+h)-g(-a)}{h} \overset{g\text{ é par}}{=} \lim\limits_{h\to0}\dfrac{g(-h+a)-g(a)}{h}$

recorrendo à mudança de variável $y = -h$, tal que $y \to 0$, obtém-se:

$g'(-a) = \lim\limits_{h\to0}\dfrac{g(-h+a)-g(a)}{h} = \lim\limits_{y\to0}\dfrac{g(y+a)-g(a)}{-y} = -\lim\limits_{y\to0}\dfrac{g(y+a)-g(a)}{y} = -g'(a)$

conclui-se, como pedido, que $g'(a) + g'(-a) = g'(a) - g'(a) = 0$.

FIM GRUPO II