



# **Prova Modelo de Exame Nacional – 3**

## **Matemática A**

12º Ano de Escolaridade – Junho de 2017

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.



NUNO MIGUEL GUERREIRO – SINAL +

---

Ano Letivo de 2016/2017

---

**Página em branco**

---

# Formulário

## Geometria

### Comprimento de um arco de circunferência:

$\alpha r$  ( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

**Área de um polígono regular:**  $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

### Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$  ( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

**Área lateral de um cone:**  $\pi r g$  ( $r$  – raio da base;  $g$  – geratriz)

**Área de uma superfície esférica:**  $4\pi r^2$  ( $r$  – raio)

**Volume de uma pirâmide:**  $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

**Volume de um cone:**  $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

**Volume de uma esfera:**  $\frac{4}{3}\pi r^3$  ( $r$  – raio)

## Progressões

Soma dos  $n$  primeiros termos de uma progressão  $(u_n)$ :

**Progressão aritmética:**  $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

**Progressão geométrica:**  $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

## Trigonometria

$\text{sen}(a + b) = \text{sen} a \cos b + \text{sen} b \cos a$

$\text{cos}(a + b) = \text{cos} a \cos b - \text{sen} a \text{sen} b$

$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tga} + \text{tgb}}{1 - \text{tga} \text{tgb}}$

## Complexos

$(\rho \text{ cis } \theta)^n = \rho^n \text{ cis } (n\theta)$

${}^n\sqrt{\rho \text{ cis } \theta} = {}^n\sqrt{\rho} \text{ cis} \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$  ( $k \in \{0, \dots, n-1\}$  e  $n \in \mathbb{N}$ )

## Probabilidades

$$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$$
$$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2}$$

Se  $X$  é  $N(\mu, \sigma)$ , então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$

## Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n u^{n-1} u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\text{sen } u)' = u' \cos u$$

$$(\text{cos } u)' = -u' \text{sen } u$$

$$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

## Limites notáveis

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

## GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, seleccione a única opção correcta.

Escreva, na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção seleccionada.

1. Um grupo de 9 pessoas vai de férias para o Algarve, levando dois carros de 5 lugares cada. Sabe-se que qualquer uma das pessoas consegue conduzir.

De quantas formas se podem distribuir os amigos pelos dois carros?

- (A)  ${}^{10}C_5$  (B)  ${}^9C_4 \times {}^9C_5$   
(C)  ${}^9C_4$  (D)  ${}^9A_4 \times {}^9A_5$

2. A tabela de distribuição de probabilidades de uma certa variável  $X$  é:

$x_i$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$a$	$2b$	0,2	$a - b$

Sabe-se que:

- $a$  e  $b$  designam dois números reais tais que  $a > b$ ;
- $P(X > 1 \wedge X \leq 3) = 0,3$

Qual é o valor de  $b$ ?

- (A) 0,1 (B) 0,2 (C) 0,6 (D) 0,9

3. Para certo valor de  $a$  ( $a > 1$ ), tem-se  $\log a = k$

Qual é, para esses valores de  $a$  e de  $b$ , o valor, em função de  $k$ , de  $\log_{10} \sqrt{\frac{a}{10}}$ ?

- (A)  $\frac{k}{2} - \frac{1}{2}$  (B)  $\frac{k}{2} + \frac{1}{2}$  (C)  $\frac{k}{4} - \frac{1}{4}$  (D)  $\frac{k}{4} + \frac{1}{4}$

4. Considere as funções  $f$  e  $g$ , contínuas e diferenciáveis em  $\mathbb{R}$ , tal que  $g(x) = 2f(x) + x$

Sabe-se que em  $x = 0$ , a reta tangente ao gráfico de  $f$  é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares

Qual o valor de  $g'(0)$ ?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

5. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n  $xOy$ , parte do gráfico da função derivada de uma função  $g$ , contínua em todo o seu domínio.

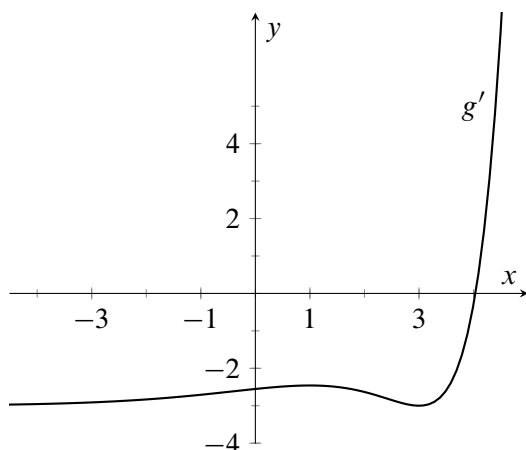


Figura 1

Sabe-se ainda que  $g(1) = 0$

Qual dos valores seguintes pode ser positivo?

- (A)  $g(2)$                       (B)  $g''(2)$                       (C)  $g(4)$                       (D)  $g''(4)$

6. Considere, num referencial o.n  $Oxyz$ , a reta  $r$ , definida por  $x = 0 \wedge z = -4$

Seja  $\alpha$  um plano perpendicular a  $r$

Qual das equações pode definir o plano  $\alpha$ ?

- (A)  $x = 4z$   
 (B)  $y = 3$   
 (C)  $x - 4y + z = 1$   
 (D)  $x - y = 2$

7. Considere o número complexo  $z = a + bi$ , tal que  $0 \leq a < \frac{\sqrt{2}}{2}$  e  $|b| < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Qual dos números complexos pode representar  $z^2$ ?

- (A)  $e^{i\frac{\pi}{2}}$                       (B)  $2e^{i\frac{\pi}{6}}$                       (C)  $1 - 2i$                       (D)  $-\frac{2}{3}i$

8. Considere a progressão aritmética dada por  $u_n = -2n + 24$

Seja  $(S_n)$  a sucessão que representa a soma dos primeiros  $n$  termos de  $u_n$

Qual a ordem a partir da qual  $S_n \leq -24$ ?

- (A) 20                      (B) 22                      (C) 24                      (D) 26

## GRUPO II

---

Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

**Atenção:** Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

---

1. Considere, em  $\mathbb{C}$ , os números complexos  $w = 3 + 4i$  e  $z = \frac{(\bar{w} + i)^2}{6i^{33}}$

Seja  $A$  a imagem geométrica do número complexo  $w$  e seja  $B$  a imagem geométrica do número complexo  $z$ .

Mostre que a equação da circunferência cujo diâmetro é  $[AB]$  pode ser dada por  $|z - 2i| = \sqrt{13}$

2. O Tomás fez uma análise ao correio que tem chegado ao seu mail, e constatou que 10% dos emails que recebe são direcionados para a caixa de *spam*. Para além disso notou que:

- das mensagens que são direcionadas para a caixa de *spam*, 60% têm vírus;
- 3 em cada 25 mensagens são direcionadas para a caixa de *spam* ou têm vírus.

- 2.1. Escolhe-se, ao acaso, uma mensagem que tem vírus.

Qual a probabilidade da mensagem não ter sido direcionada para a caixa de *spam*?

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

- 2.2. Considere que numa dada semana, o Tomás tinha 20 mails na caixa de *spam*.

Escolhem-se, ao acaso, oito desses mails da caixa de *spam*.

A probabilidade de, entre esses mails, haver pelo menos um que tenha vírus é:

$$\frac{{}^{20}C_8 - 1}{{}^{20}C_8}$$

Elabore uma composição na qual explique a expressão apresentada.

Na sua resposta:

- enuncie a regra de Laplace;
- explique o número de casos possíveis;
- explique o número de casos favoráveis;

3. Em sistemas de controlo, dois parâmetros muito importantes para analisar a resposta de um sistema são o sobreimpulso,  $M_p$ , e o coeficiente de amortecimento,  $x$

O sobreimpulso,  $M_p$ , é dado por:

$$M_p(x) = e^{-\frac{\pi x}{\sqrt{1-x^2}}}, 0 < x < 1$$

- 3.1. Determine o valor de  $\lim_{x \rightarrow 1^-} M_p(x)$ , e interprete o valor obtido no contexto do problema.

- 3.2. Existe um valor do coeficiente de amortecimento,  $a$ , para o qual a reta  $r$ , tangente ao gráfico de  $M_p$ , tem declive  $-1$

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o valor de  $a$

Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora, que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresenta o valor de  $a$  com arredondamento às centésimas.

4. Seja  $f$  a função, de domínio  $\left[-\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$ , definida por

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x - \ln x) - \ln x & \text{se } x > 0 \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) & \text{se } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0 \end{cases}$$

Resolva os itens 4.1., 4.2. e 4.3., recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

- 4.1. Determine  $f'\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ , recorrendo à definição de derivada.

- 4.2. Estude a função  $f$  quanto a existência de assíntotas do seu gráfico.

Na sua resposta deve:

- mostrar que existe uma assíntota vertical e escrever a equação dessa assíntota;
- mostrar que existe uma assíntota horizontal e escrever a equação dessa assíntota.

- 4.3. Mostre que  $\ln\left(1 - \frac{1}{e}\right)$  é um extremo da função  $f$  no intervalo  $]0, +\infty[$

5. Considere, num referencial o.n  $Oxyz$ , o ponto  $P$  de coordenadas  $(3,3,1)$ , e a reta  $r$  definida pela equação  $(x,y,z) = (1,0,2) + k(2, -5,1), k \in \mathbb{R}$

5.1. Defina a reta  $t$ , paralela à reta  $r$ , e que passa em  $P$ , por uma condição cartesiana.

5.2. Considere os pontos  $A$  e  $B$  tais que:

- $A$  é o ponto simétrico do ponto  $P$  em relação à origem
- $B$  pertence ao eixo  $Oz$

Sabe-se que o triângulo  $[ABP]$  é retângulo em  $P$

Determine as coordenadas do ponto  $B$

5.3. Considere a esfera representada no referencial o.n  $Oxyz$  na Figura 2.

Sabe-se que:

- o centro da esfera tem a mesma abcissa e ordenada que o ponto  $P$
- a esfera é tangente ao plano  $xOy$
- a interseção da esfera com o plano de equação  $z = 3$  é um círculo de área  $9\pi$

Determine a condição que define a esfera.

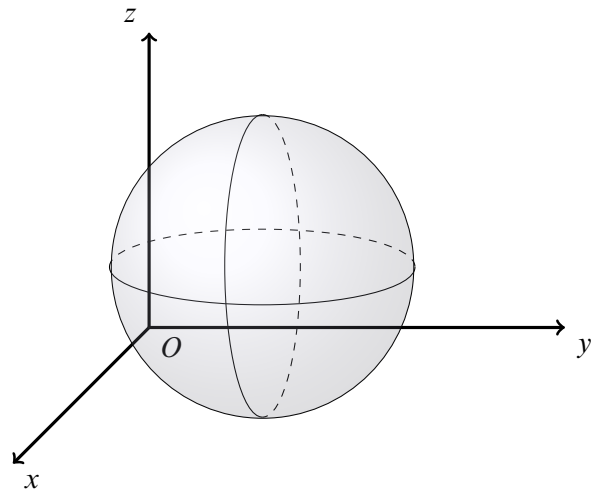


Figura 2

6. Considere as funções  $f$  e  $g$  contínuas e diferenciáveis em  $\mathbb{R}$

Sejam  $a$  e  $b$  dois números reais positivos, tais que  $b > a$ .

Sabe-se que  $g'(b) < f'(b) < 0 < f'(a) < g'(a)$  e que  $f$  e  $g$  têm contradomínio  $\mathbb{R}^+$

Mostre que a função  $(g \times f)'$  admite um zero em  $]a,b[$

**FIM**



## COTAÇÕES

Grupo	Item												
	Cotação (em pontos)												
I	1. a 8.												40
	8 x 5 pontos												
II	1	2.1	2.2	3.1	3.2	4.1	4.2	4.3	5.1	5.2	5.3	6	160
	15	15	15	10	15	15	15	15	5	15	15	10	
<b>TOTAL</b>													<b>200</b>