Prova Modelo de Exame Nacional
Prova 3 – 2017

Proposta de Resolução
Matemática A

Nuno Miguel Guerreiro

I

Chave da Escolha Múltipla
ABACDBDC

1. Considerando que existem 10 lugares para preencher nos dois carros, poderá distribuir-se 5 pessoas por um dos carros, e outro ficará automaticamente distribuído: ${}^{10}C_5$

Poder-se-á também distribuir as pessoas por um só carro colocando nesse mesmo ou 5 das 9 pessoas ou 4 das 9 pessoas: ${}^{9}C_4 + {}^{9}C_5 = {}^{10}C_5$

Resposta Correcta: (A)

2. Tem-se:

$P(X > 1 \wedge X \leq 3) = 0{,}3 \Leftrightarrow P(X = 2) + P(X = 3) = 0{,}3 \Leftrightarrow$

$0{,}2 + a - b = 0{,}3 \Leftrightarrow 0{,}2 + a - (0{,}8 - 2a) = 0{,}3 \Leftrightarrow$

$3a = 0{,}9 \Leftrightarrow a = 0{,}3$

Logo $b = 0{,}8 - 2a = 0{,}8 - 2 \times 0{,}3 = 0{,}2$

$a + 2b + 0{,}2 + a - b = 1 \Leftrightarrow$

$2a + b = 0{,}8 \Leftrightarrow$

$b = 0{,}8 - 2a$

Resposta Correcta: (B)

3. Tem-se: $\log_{10}\sqrt{\dfrac{a}{10}} = \dfrac{1}{2} \times \log_{10}\left(\dfrac{a}{10}\right) = \dfrac{1}{2} \times (\log_{10} a - \log_{10} 10) = \dfrac{1}{2} \times (k - 1) = \dfrac{k}{2} - \dfrac{1}{2}$

Resposta Correcta: (A)

4. A reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0 é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares, logo $f'(0) = 1$.

$g'(x) = (2f(x))' + (x)' = 2f'(x) + 1$, logo: $g'(0) = 2f'(0) + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$

Resposta Correcta: (C)

5. Como g' é negativa em $x < 4$, g é decrescente em $x < 4$, logo se $g(1) = 0$, tem-se que necessariamente, em $1 < x \leq 4$, $g(x) < 0$, logo $g(2) < 0$ e $g(4) < 0$.

A monotonia da função g' pode ser dada pelo sinal de g'', logo, como em $x = 2$, g' está a decrescer, e em $x = 4$, g' está a crescer, tem-se que $g''(2) < 0$ e $g''(4) > 0$.

Resposta Correcta: (D)

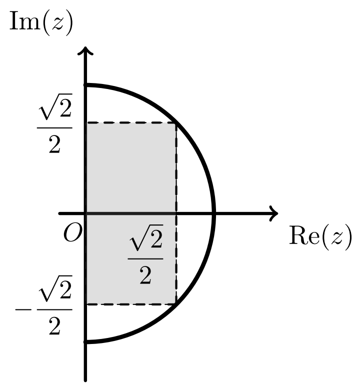
6. Um vetor diretor da reta r pode ser $(0{,}1{,}0)$, pelo que se α é perpendicular a r, então o vetor normal a α tem a mesma direção do vetor diretor da reta r, logo, o plano é da forma $y + d = 0$.

Resposta Correcta: (B)

7. z é um número complexo pertencente à região $0 < \mathrm{Re}(z) < \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge |\mathrm{Im}(z)| < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Na figura ao lado está representada uma circunferência de raio 1 centrada na origem, e a região respeitante à condição acima.

Repare-se que $|z| < 1$, logo $|z^2| = |z|^2 < |z| < 1$, pelo que apenas o número complexo $-\frac{2}{3}i$ verifica esta condição.



Resposta Correcta: (D)

8. A progressão aritmética de termo geral $u_n = -2n + 24$ é tal que o seu primeiro termo é $u_1 = -2 + 24 = 22$. Desta forma, a sucessão que representa soma dos primeiros n termos de (u_n) é:

$$S_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n = \frac{22 + (-2n + 24)}{2} \times n = \frac{-2n + 46}{2} \times n = (-n + 23) \times n = -n^2 + 23n$$

Então tem-se:

$S_n \leq -24 \Leftrightarrow -n^2 + 23n \leq -24 \Leftrightarrow$

$-n^2 + 23n + 24 \leq 0 \Leftrightarrow n \leq -1 \vee n \geq 24$

Conclui-se que a ordem a partir da qual $S_n \leq -24$ é $n = 24$

$-n^2 + 23n + 24 = 0 \Leftrightarrow$

$n_{1,2} = \frac{-23 \pm \sqrt{23^2 - 4 \times (-1) \times 24}}{2 \times (-1)}$

$n_{1,2} = \frac{-23 \pm 25}{-2}$

$n_1 = -1 \vee n_2 = 24$

Resposta Correcta: (C)

FIM GRUPO I

1. Tem-se que:

$$z = \frac{(\overline{w}+i)^2}{6i^{33}} = \frac{(3-4i+i)^2}{6i} = \frac{(3-3i)^2}{6i} = \frac{3^2 \times (1-i)^2}{6i}$$

$$\frac{9\left(\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^2}{6i} = \frac{9 \times 2e^{-i\frac{\pi}{2}}}{6i} = \frac{-18i}{6i} = -3$$

A circunferência cujo diâmetro é $[AB]$ tem o seu centro no ponto médio do segmento, i.e, em:

$$C = \left(\frac{\mathrm{Re}(w)+\mathrm{Re}(z)}{2}, \frac{\mathrm{Im}(w)+\mathrm{Im}(z)}{2}\right) \Leftrightarrow C = \left(\frac{-3+3}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = (0{,}2)$$

e o raio da circunferência é a distância entre o ponto C e o ponto A:

$$r = \sqrt{(-3-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{13}$$

Desta forma a condição pretendida é $|z-2i| = \sqrt{13}$

$i^{33} = i^{32} \times i = i$

Considerando $1 - i = \rho\, e^{i\theta}$:

$\rho = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$\arg(w) = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{1}\right) = \tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$

$1 - i \in 4^{\text{o}}\text{Q}$

A circunferência de centro em $z = a + bi$ e raio r é descrita, em $\mathbb{C}$, pela condição:

$|z - (a+bi)| = r$.

2.

2.1. Sejam os acontecimentos:

A: "A mensagem foi direcionada para a caixa de *spam*"

B: "A mensagem tem vírus"

Pretende-se determinar a probabilidade de uma mensagem que tem vírus, não ter sido direcionada para a caixa de *spam*, isto é, $P(\overline{A}|B)$.

Sabe-se que: $P(A) = 0{,}10$, $P(B|A) = 0{,}60$ e $P(A \cup B) = 0{,}12$, logo:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}60 \times 0{,}10 = 0{,}06$$

$$P(A \cup B) = 0{,}12 \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}12 \Leftrightarrow P(B) = 0{,}12 - 0{,}10 + 0{,}06 = 0{,}08$$

tal que:

$$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0{,}08 - 0{,}06 = 0{,}02$$

logo:

$$P(\overline{A}|B) = \frac{P(\overline{A}|B)}{P(B)} = \frac{0{,}02}{0{,}08} = \frac{1}{4}$$

2.2. Pela regra de Laplace, a probabilidade de um dado acontecimento é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis à realização desse acontecimento e o número de casos possíveis, quando estes são todos equiprováveis e o espaço de resultados é finito.

O número de casos possíveis é a escolha, sem importar a ordem, de oito mails da caixa de *spam* entre os vinte que o Tomás tinha nessa dada semana, isto é, ${}^{20}C_8$.

Pretende-se determinar o número de possibilidades de escolher entre os vinte mails, um conjunto de oito mails que em que haja pelo menos um com vírus, isto é, ao número de conjuntos de oito mails entre os vinte podem-se retirar os conjuntos de oito mails em que nenhum destes oito contem vírus. Em vinte mails da caixa de *spam*, existem $20 \times P(B|A) = 20 \times 0{,}6 = 12$ mails que contém vírus, e 8 que não contém vírus. Desta forma o número de casos favoráveis pode ser dado por: ${}^{20}C_8 - {}^{8}C_8 = {}^{20}C_8 - 1$.

A probabilidade pedida pode então ser dada pela expressão: $\dfrac{{}^{20}C_8 - 1}{{}^{20}C_8}$

3.

3.1. Tem-se:

$$\lim_{x\to 1^-} M_p(x) = \lim_{x\to 1^-} e^{-\frac{\pi x}{\sqrt{1-x^2}}} = e^{-\frac{\pi}{\sqrt{1-(1^-)^2}}} = e^{-\frac{\pi}{\sqrt{0^+}}} = e^{-(+\infty)} = e^{-\infty} = 0$$

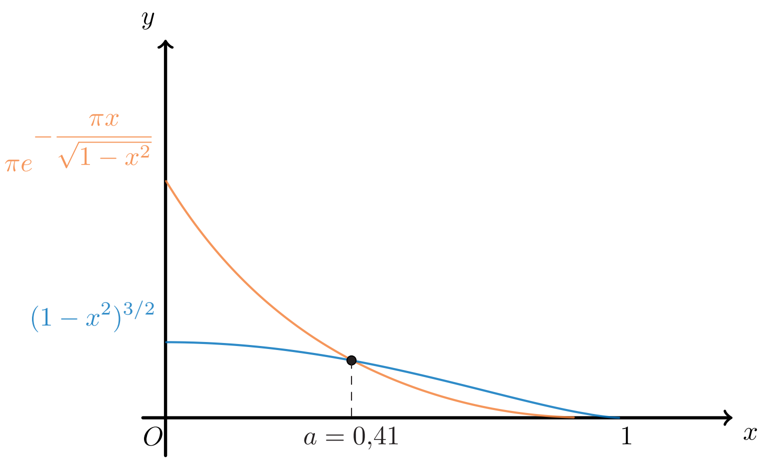
No contexto do problema, conclui-se que, à medida que o coeficiente de amortecimento se aproxima do seu valor máximo $x = 1$, o sobreimpulso vai-se aproximando de zero.

3.2. O declive da reta r, tangente ao gráfico de M_p ponto de abcissa a, é dado por $M_p'(a)$.

$$M_p'(x) = \left(e^{-\frac{\pi x}{\sqrt{1-x^2}}}\right)' = \left(-\frac{\pi x}{\sqrt{1-x^2}}\right)' e^{-\frac{\pi x}{\sqrt{1-x^2}}}$$
$$= -\pi\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)' e^{-\frac{\pi x}{\sqrt{1-x^2}}}$$
$$= \frac{-\pi e^{-\frac{\pi x}{\sqrt{1-x^2}}}}{(1-x^2)^{3/2}}$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \frac{(x)'(\sqrt{1-x^2}) - (x)(\sqrt{1-x^2})'}{(\sqrt{1-x^2})^2}$$
$$= \frac{\sqrt{1-x^2} - \frac{-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$
$$= \frac{(\sqrt{1-x^2})^2 + x^2}{(1-x^2)^{3/2}}$$
$$= \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$$

Pretende-se resolver a equação $M_p'(a) = -1$, isto é, $\dfrac{-\pi e^{-\frac{\pi a}{\sqrt{1-a^2}}}}{(1-a^2)^{3/2}} = -1 \Leftrightarrow \pi e^{-\frac{\pi a}{\sqrt{1-a^2}}} = (1-a^2)^{3/2}$



Como a é o valor da abcissa do ponto de interseção dos gráficos representados na figura acima, conclui-se então que $a = 0{,}41$.

4.

4.1. Tem-se que:

$$f'\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{f\left(-\frac{\pi}{3}+h\right) - f\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\overbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{3}+h-\frac{\pi}{6}\right)}^{\cos\left(-\frac{\pi}{2}+h\right)=\sin h} - \overbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)}^{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1$$

em que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin h}{h} = 1$ é limite notável.

4.2. A função f é contínua em $-\frac{\pi}{2} \leq x < 0$ pois trata-se de uma função trigonométrica, e é contínua em $x > 0$ pois resulta de operações básicas entre funções contínuas. Conclui-se que, a haver assíntota vertical no gráfico de f, essa terá de ter equação $x = 0$.

Analise-se então $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (\ln(x - \ln x) - \ln x) = \ln(0 - \ln 0^+) - \ln 0^+ = \ln(-(-\infty)) - (-\infty) = \ln(+\infty) + \infty = +\infty$$

conclui-se que $x = 0$ é assíntota vertical do gráfico de f.

Dada a existência de uma assíntota horizontal do gráfico de f, determine-se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (\ln(x - \ln x) - \ln x) = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x - \ln x}{x}\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \ln\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = \ln\left(1 - \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}\right) = \ln(1 - 0) = 0$$

conclui-se que $y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico de f quando $x \to +\infty$.

4.3. Tem-se:

$$f'(x) = (\ln(x - \ln x))' - (\ln x)' = \frac{(x - \ln x)'}{x - \ln x} - \frac{1}{x} = \frac{1 - \frac{1}{x}}{x - \ln x} - \frac{1}{x} = \frac{x\left(1 - \frac{1}{x}\right) - (x - \ln x)}{x(x - \ln x)}$$

$$= \frac{x - 1 - x + \ln x}{x(x - \ln x)} = \frac{\ln x - 1}{x(x - \ln x)},\ x > 0$$

O zero de f' dá-se para:

$$f'(x) = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = e$$

Através de uma tabela de sinais:

x	0		e	$+\infty$
$f'(x)$	ND	$-$	0	$+$
$f(x)$	ND	$\searrow$	MIN	$\nearrow$

Pelo que se conclui que existe um mínimo em $x = e$, de tal forma que:

$$f(e) = \ln(e - \ln e) - \ln e = \ln(e - 1) - \ln e = \ln\left(\frac{e - 1}{e}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

5.

5.1. A reta t é paralela à reta r, logo o vetor diretor de t tem a mesma direção do vetor diretor de r. Como passa em P, uma condição cartesiana que define t pode ser: $\frac{x - 3}{2} = \frac{y - 3}{-5} = \frac{z - 1}{1}$

5.2. A é o ponto simétrico do ponto P em relação à origem, logo A tem coordenadas $(-3, -3, -1)$.

B pertence ao eixo Oz, logo as suas coordenadas são do tipo $(0{,}0{,}z_B)$.

Como o triângulo $[ABP]$ é retângulo em P, tem-se $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$.

$\overrightarrow{PA} = A - P = (-3, -3, -1) - (3{,}3{,}1) = (-6, -6, -2)$

$\overrightarrow{PB} = B - P = (0{,}0{,}z_B) - (3{,}3{,}1) = (-3, -3{,}z_B - 1)$

Logo:

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0 \Leftrightarrow (-6, -6, -2) \cdot (-3, -3{,}z_B - 1) = 0 \Leftrightarrow -6 \times (-3) + (-6) \times (-3) + (-2) \times (z_B - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$18 + 18 - 2z_B + 2 = 0 \Leftrightarrow 2z_B = 38 \Leftrightarrow z_B = 19$$

O ponto B tem coordenadas $(0{,}0{,}19)$.

5.3. A esfera tem centro no ponto C de coordenadas $(3{,}3{,}z_C)$, e uma vez que é tangente ao eixo xOy, o raio da esfera é igual à cota de C, z_C.

Pode-se então escrever que a condição que define a esfera, em função de z_C, é:

$(x-3)^2+(y-3)^2+(z-z_C)^2 \leq z_C^2$

A interseção da esfera com o plano de equação $z=3$ é dada por:

$(x-3)^2+(y-3)^2+(3-z_C)^2 \leq z_C^2 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y-3)^2 = z_C^2-(3-z_C)^2$

em que $z_C^2-(3-z_C)^2$ é o quadrado do raio do círculo que resulta da interseção do plano e a esfera.

Como a área do círculo que resulta da interseção acima é 9π tem-se:

$\pi \times \left(z_C^2-(3-z_C)^2\right) = 9\pi \Leftrightarrow z_C^2-(3-z_C)^2 = 9 \Leftrightarrow z_C^2-(z_C^2-6z_C+9) = 9$

$6z_C - 9 = 9 \Leftrightarrow 6z_C = 18 \Leftrightarrow z_C = 3$

A condição que define a esfera é então: $(x-3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2 \leq 9$.

6. A expressão analítica de $(g\times f)'$ pode ser dada por: $(g\times f)'(x) = g'(x)\times f(x) + g(x)\times f'(x)$

Repare-se que, uma vez que g e f são contínuas e diferenciáveis em $[a{,}b]$, então a função $(g\times f)'$ é também contínua e diferenciável nesse intervalo, uma vez que resulta de operações básicas entre funções contínuas.

Tem-se que:

$(g\times f)'(a) = \underbrace{g'(a)}_{>0}\times\underbrace{f(a)}_{>0}+\underbrace{g(a)}_{>0}\times\underbrace{f'(a)}_{>0} > 0$

$(g\times f)'(b) = \underbrace{g'(b)}_{<0}\times\underbrace{f(b)}_{>0}+\underbrace{g(b)}_{>0}\times\underbrace{f'(b)}_{<0} < 0$

em que se tomou $f(a)$, $g(a)$, $f(b)$ e $g(b)$ como positivos, uma vez que f e g têm contradomínio $\mathbb{R}^+$.

Uma vez que $(g\times f)'(a)\times(g\times f)'(b) < 0$, conclui-se, pelo Corolário do Teorema de Bolzano, que a função $(g\times f)'$ admite um zero no seu gráfico em $]a{,}b[$.

FIM GRUPO II