Prova Modelo de Exame Nacional – 2

Matemática A

12º Ano de Escolaridade – Junho de 2017

Duração da Prova: 150 minutos.   Tolerância: 30 minutos.

NUNO MIGUEL GUERREIRO – SINAL +

Ano Letivo de 2016/2017

Página em branco

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ($k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, seleccione a única opção correcta.

Escreva, na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção seleccionada.

1. Considere, num referencial o.n $Oxyz$, a superfície esférica S de centro no ponto de coordenadas $(1,1,0)$ e raio 2, e a reta r definida pela equação $x = y \wedge z = 2$

Qual é a interseção da superfície esférica S com a reta r?

(A) Um ponto

(B) Dois pontos

(C) O conjunto vazio

(D) Um segmento de reta

2. Seja Ω, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$)

Sabe-se que:

- $P(B) = 0{,}8$
- $P(A|B) = 0{,}5$
- $P(\overline{A} \cup B) = 0{,}9$

Qual é o valor de $P(A)$?

(A) $0{,}1$ **(B)** $0{,}5$ **(C)** $0{,}8$ **(D)** $0{,}9$

3. Considere uma linha do triângulo de Pascal tal que o seu oitavo elemento é igual ao seu décimo segundo elemento.

Qual o maior elemento da linha seguinte?

(A) 43758 **(B)** 48620 **(C)** 75582 **(D)** 92378

4. Considere uma função f definida em $\mathbb{R}$ tal que:

- a reta de equação $y = 2x - 7$ é assíntota oblíqua do gráfico de f quando $x \to +\infty$
- f é uma função par

Qual o valor de $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x) - 2}{2x}$?

(A) -2 **(B)** -1 **(C)** 1 **(D)** 2

5. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}\{0\}$, definida por $g(x) = \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}} - 1}$

Considere a sucessão de termo geral $u_n = -\dfrac{1}{|n|}$

Qual o valor de $\lim g(u_n)$?

(A) $-\infty$ **(B)** -1 **(C)** 0 **(D)** $+\infty$

6. De uma função h de domínio $\mathbb{R}$ sabe-se que:

- h é diferenciável em todo o seu domínio
- h interseta a bissetriz dos quadrantes pares no ponto de abcissa 1
- h é decrescente em $\mathbb{R}^-$ e crescente em $\mathbb{R}^+$

Qual pode ser o valor de $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{h(x)+1}{1-x}$?

(A) -1 **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** $+\infty$

7. Considere, em $\mathbb{C}$, o complexo $w = -\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) - i\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ e o complexo z cuja imagem geométrica está situada no primeiro quadrante.

Qual pode ser o argumento do complexo $\dfrac{w}{z}$?

(A) $\dfrac{\pi}{3}$ **(B)** $\dfrac{\pi}{2}$ **(C)** π **(D)** $\dfrac{4\pi}{3}$

8. Considere a sucessão (v_n) definida por

$$\begin{cases} v_1 = 2 \\ \dfrac{1}{3}\, v_{n+1} = v_n \end{cases}$$

Sabe-se que para um dado valor de k, tem-se que $v_1 + v_2 + \cdots + v_k = 2186$

Qual é o valor de k?

(A) 4 **(B)** 5 **(C)** 6 **(D)** 7

GRUPO II

Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: Quando, para um resulado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Considere, em $\mathbb{C}$, o complexo $w = \dfrac{1+i}{3-i} + \dfrac{i^{11}}{5}$

Sabe-se que w, z_1 e z_2 são raízes cúbicas de um número complexo.

Determine z_1 e z_2, apresentando os mesmos na forma trigonométrica.

2. Um químico vai realizar um teste de forma a averiguar a contaminação de água por substâncias químicas.

Sabe-se que:

- quando essas substâncias químicas estão presentes na água, o químico deteta a presença das mesmas em 98% dos testes;
- quando as substâncias químicas não estão presentes na água, o químico identifica a presença das mesmas em 2% dos testes;
- a probabilidade de uma amostra de água estar contaminada por substâncias químicas é 5%

2.1. Determine a probabilidade do teste ser realizado com sucesso.

Apresente o resultado na forma de percentagem.

2.2. Considere um lote de 40 amostras de água distinguíveis que vão ser testadas pelo químico.

O químico após fazer os testes, coloca as amostras contaminadas lado a lado num dos extremos do lote.

Indique a expressão que permite calcular o número de maneiras que o químico dispor as 40 amostras no lote.

3. Considere a pirâmide quandragular regular $[ABCDV]$, representada num referencial o.n $Oxyz$, na Figura 1

Sabe-se que:

- O é a origem do referencial;
- A e B pertenem ao plano xOy e têm a mesma ordenada
- B e C têm a mesma abcissa
- V é o vértice da pirâmide, cujas coordenadas são $\left(\frac{5}{2}, \frac{15}{2}, 2\right)$
- o plano da base da pirâmide é descrito pela equação $2y + z = 2$

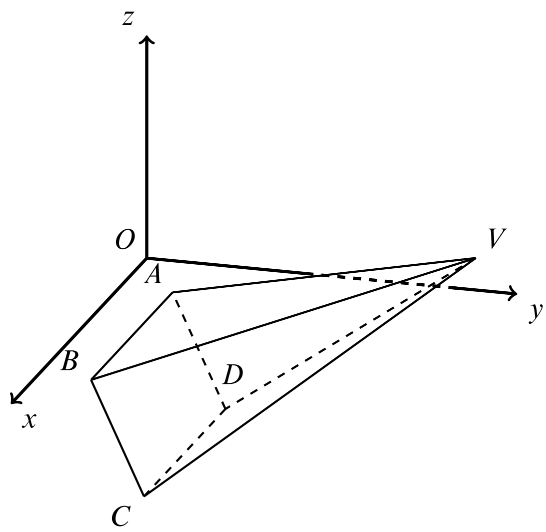

Figura 1

3.1. Determine a equação de um plano paralelo ao plano da base da pirâmide e que passe em V

3.2. Mostre que as coordenadas de M, ponto médio do segmento $[AC]$, são $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, -1\right)$

3.3. Considere E o ponto simétrico do ponto B em relação ao plano yOz

Sabendo que $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AV} = -\frac{15}{2}$, determine a abcissa de A e B

4. O controlo de velocidade longitudinal é fundamental no projeto de controlo de um avião comercial.

De forma a desenvolver um sistema estável, o engenheiro projetou um controlador tal que para uma amplitude de 1º grau no leme de profundidade, a velocidade longitudinal, v, é dada, em metros por segundo, t segundos após o início do voo por:

$$v(t) = 12 - 12e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{t}{2}\right), \ t > 0$$

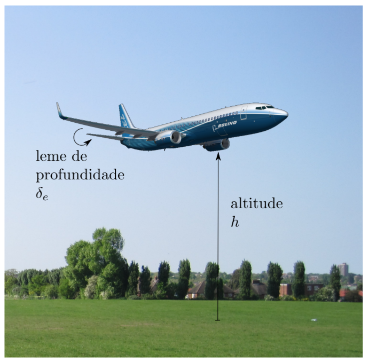

Figura 2

4.1. Seja v' a primeira derivada da função v

Mostre que $v'(t) \times \left(\cos\left(\frac{t}{2}\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right)\right) = 6e^{-\frac{t}{2}} \cos t, \ t > 0$

4.2. Considere $0 \leq t < 10$

Determine a velocidade longitudinal máxima, com aproximação às décimas, que o avião atinge devido à amplitude do ângulo do leme de profundidade

4.3. Para este sistema de controlo, dá-se o nome de **tempo de subida** ao intervalo de tempo em que o avião está entre 10% e 90% da sua velocidade de estabilidade, velocidade para a qual o avião tende à medida que o tempo aumenta indefinidamente.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, indique qual a velocidade de estabilidade e determine o tempo de subida do avião, em segundos, com arredondamento às centésimas.

5. Considere a função g, definida em $\mathbb{R}$, por:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{e^x - 1} & \text{se } x < 0 \\ \sqrt{k-1} - 2 & \text{se } x = 0 \\ \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

em que k é uma constante real maior ou igual que 1.

Resolva os itens **5.1** e **5.2**, recorrendo a métodos analíticos sem utilizar a calculadora.

5.1. Determine o valor de k tal que g é contínua à esquerda no ponto de abcissa 0

5.2. Estude a função g quanto ao sentido das concavidades e quanto à existência de pontos de inflexão em $x > 0$

Na sua resposta deve:

- indicar, caso existam, o(s) intervalo(s) onde o gráfico de g tem concavidade voltada para cima;
- indicar, caso existam, o(s) intervalo(s) onde o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo;
- indicar, caso existam, as abcissas dos pontos de inflexão do gráfico da função g

6. Considere a função h definida pela expressão: $h(x) = \dfrac{1}{f(x) - x}$

Sabe-se que:

- f é uma função contínua em $\mathbb{R}$
- $f(0) = 1$
- $\forall a \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} < 0$

Prove que o gráfico de h admite uma assíntota vertical em $]0,1[$

FIM

COTAÇÕES

Grupo	Item												
	Cotação (em pontos)												
I	1. a 8.												
	8 x 5 pontos												40
II	1	2.1	2.2	3.1	3.2	3.3	4.1	4.2	4.3	5.1	5.2	6	
	15	15	15	5	15	10	15	15	15	15	15	10	160
TOTAL													200