Prova Modelo de Exame Nacional
Prova 2 – 2017

Proposta de Resolução
Matemática A

Nuno Miguel Guerreiro

I

Chave da Escolha Múltipla
ABDDBBACD

1. Tem-se que $S : (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$, vindo que a interseção com a reta r é:

$(x-1)^2 + (x-1)^2 + 2^2 = 4 \Leftrightarrow 2\,(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

A interseção é o ponto de coordenadas $(1{,}1{,}2)$.

Resposta Correcta: (A)

2. Tem-se:

$$P(\overline{A} \cup B) = P(\overline{A}) + P(B) - P(\overline{A} \cap B) \Leftrightarrow$$
$$P(\overline{A} \cup B) = 1 - P(A) + P(A \cap B) \Leftrightarrow$$
$$P(A) = 1 - P(\overline{A} \cup B) + P(A \cap B) \Leftrightarrow$$
$$P(A) = 1 - 0{,}9 + 0{,}4 = 0{,}5$$

$$\begin{aligned} P(B) - P(\overline{A} \cap B) &= P(A \cap B) \\ &= P(A|B) \times P(B) \\ &= 0{,}5 \times 0{,}8 = 0{,}4 \end{aligned}$$

Resposta Correcta: (B)

3. Tem-se: ${}^nC_7 = {}^nC_{11} \Leftrightarrow n - 7 = 11 \Leftrightarrow n = 18$

A linha seguinte é a linha 19, e o maior elemento é ${}^{19}C_9 = {}^{19}C_{10} = 92378$

Resposta Correcta: (D)

4. f é par e admite uma assíntota oblíqua no seu gráfico quando $x \to +\infty$ de declive 2, i.e, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$

Existindo uma simetria em relação ao eixo Oy, f admite uma assíntota oblíqua quando $x \to -\infty$ de declive -2, i.e, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -2$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x) - 2}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{2}{x} \right) = \frac{1}{2} \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{2} \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x} = \frac{1}{2} \times (-2) - \frac{1}{2} \times 0 = -1$$

Resposta Correcta: (B)

5. Tem-se que $\lim g(u_n) = \lim\limits_{x \to \lim u_n} g(x)$, tal que:

$\lim u_n = \lim -\dfrac{1}{|n|} \overset{|n|=n}{=} -\lim \dfrac{1}{n} = -0^+ = 0^-$ e então:

$\lim g(u_n) = \lim\limits_{x \to \lim 0^-} \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}} - 1} = \dfrac{1}{e^{\frac{1}{0^-}} - 1} = \dfrac{1}{e^{-\infty} - 1} = \dfrac{1}{0-1} = -1$

Resposta Correcta: (B)

6. h interseta a bissetriz dos quadrantes pares no ponto de abcissa 1, logo $h(1) = -1$, e h admite derivada finita em todo o seu domínio tal que $h'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}^-$ e $h'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$

$$\lim_{x \to 1} \frac{h(x)+1}{1-x} = -\lim_{x \to 1} \frac{h(x)+1}{x-1} = -\lim_{x \to 1} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = -\underbrace{h'(1)}_{>0} < 0$$

Resposta Correcta: (A)

7. w é um número complexo cuja imagem geométrica está no terceiro quadrante, pelo que o seu argumento é $\pi + \dfrac{\pi}{5} = \dfrac{6\pi}{5}$

$\arg\left(\dfrac{w}{z}\right) = \arg(w) - \arg(z) = \dfrac{6\pi}{5} - \arg(z)$ tal que $0 < \arg(z) < \dfrac{\pi}{2}$, logo tem-se:

$0 < \arg(z) < \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{2} < -\arg(z) < 0 \Leftrightarrow \dfrac{7\pi}{10} < \arg(w) - \arg(z) < \dfrac{6\pi}{5} \Leftrightarrow \dfrac{7\pi}{10} < \arg\left(\dfrac{w}{z}\right) < \dfrac{6\pi}{5}$

Das opções dadas apenas π verifica a condição acima.

Resposta Correcta: (C)

8. Tem-se que $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 3$, logo (v_n) é uma progressão geométrica de razão $r = 3$ tal que $v_n = 2 \times 3^{n-1}$

A soma dos primeiros k termos de (v_n) é igual a 2186 logo:

$v_1 + v_2 + \cdots + v_k = 2186 \Leftrightarrow v_1 \times \dfrac{1-r^k}{1-r} = 2186 \Leftrightarrow 2 \times \dfrac{1-3^k}{1-3} = 2186 \Leftrightarrow$

$3^k - 1 = 2186 \Leftrightarrow 3^k = 2187 \Leftrightarrow k = \log_3 2187 = 7$

Resposta Correcta: (D)

FIM GRUPO I

1. Tem-se que:

$$w = \frac{1+i}{3-i} + \frac{i^{11}}{5} = \frac{(1+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} - \frac{i}{5} = \frac{3+4i+i^2}{3^2-i^2} - \frac{i}{5}$$

$$= \frac{2+4i}{10} - \frac{i}{5} = \frac{1}{5} + \frac{2i}{5} - \frac{i}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}i = \frac{\sqrt{2}}{5}\,\mathrm{cis}\frac{\pi}{4}$$

$$i^{11} = i^8 \times i^3 = i^3 = -i$$

$$|w| = \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{5}$$

$$\arg(w) = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}}\right) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

$w \in 1^{\text{o}}\text{Q}$

Sendo w, z_1 e z_2 raízes cúbicas de um número complexo, então sabe-se que:

- $|z_1| = |z_2| = w$
- $\arg(z_1) = \arg(w) + \frac{2\pi}{3}$ e $\arg(z_2) = \arg(z_1) + \frac{2\pi}{3}$

$$\arg(z_1) = \arg(w) + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} = \frac{11\pi}{12}$$

$$\arg(z_2) = \arg(z_1) + \frac{2\pi}{3} = \frac{11\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} = \frac{19\pi}{12}$$

Logo $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{5}e^{i\frac{11\pi}{12}}$ e $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{5}e^{i\frac{19\pi}{12}}$

2.

2.1. Sejam os acontecimentos:

A: "A água testada contém substâncias químicas"

B: "O químico detetou a presença de substâncias químicas na água"

Pretende-se determinar a probabilidade do teste ser realizado com sucesso, isto é, a probabilidade do químico identificar a presença das substâncias quando estão presentes ou não identificar a presença das substâncias quando não estão presentes, logo, a probabilidade pedida é $P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

Sabe-se que: $P(B|A) = 0{,}98$, $P(B|\overline{A}) = 0{,}02$ e $P(A) = 0{,}05$, logo:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}98 \times 0{,}05 = 0{,}049$$

$$P(B|\overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} \Leftrightarrow P(\overline{A} \cap B) = 0{,}02 \times (1 - 0{,}05) = 0{,}019$$

tal que:

$$P(\overline{A}) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) \Leftrightarrow P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}95 - 0{,}019 = 0{,}931$$

e a probabilidade pedida é:

$$P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}049 + 0{,}931 = 0{,}98\,(98\%)$$

2.2. Num lote de 40 amostras de águas, existem $40 \times 0{,}05 = 2$ amostras contaminadas pelas substâncias químicas.

Número de formas que o químico pode dispôr as amostras contaminadas: ${}^4C_1 = 4$

Existem 4 lugares disponíveis para colocar a primeira amostra contaminada (2 em cada extremo). Ao ser colocada a primeira amostra contaminada, a segunda fica automaticamente colocada ao lado desta.

Número de formas que o químico pode dispôr as restantes amostras distinguíveis: $38!$

Todas as permutações possíveis das 38 amostras restantes nos 38 lugares do lote.

O número de formas que o químico pode dispôr as amostras no lote é então $4 \times 38!$

3.

3.1. Um plano paralelo ao plano da base da pirâmide é tal que o seu vetor normal tem a mesma direção do vetor normal ao plano da base da pirâmide, logo, a equação do plano é da forma $2y + z + d = 0$

Como passa no ponto V tem-se: $2 \times \frac{15}{2} + 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -17$

Uma equação do plano paralelo ao plano da base da pirâmide e que passa em V é $2y + z = 17$

3.2. Visto que M é o centro do quadrado de uma pirâmide quandragular regular, tem-se que a reta que une este ponto ao vértice da mesma, MV, é perpendicular ao plano da base. Desta forma, M é o ponto de interseção da reta MV com o plano da base da pirâmide.

A direção do vetor diretor de MV é igual à do vetor normal do plano da base da pirâmide $(0{,}2{,}1)$, logo a reta MV pode ser definida pela equação vetorial $(x{,}y{,}z) = \left(\frac{5}{2}, \frac{15}{2}, 2\right) + k(0{,}2{,}1), k \in \mathbb{R}$, logo um ponto genérico desta reta pode ser escrito como $(x{,}y{,}z) = \left(\frac{5}{2}, \frac{15}{2} + 2k, 2 + k\right)$

A interseção com o plano da base da pirâmide pode então ser obtida:

$2 \times \left(\frac{15}{2} + 2k\right) + 2 + k = 2 \Leftrightarrow 15 + 4k + 2 + k = 2 \Leftrightarrow 5k = -15 \Leftrightarrow k = -3$

As coordenadas do ponto M são então: $(x{,}y{,}z) = \left(\frac{5}{2}, \frac{15}{2} + 2 \times (-3), 2 + (-3)\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, -1\right)$.

3.3. A tem coordenadas $(x_A{,}y_A{,}0)$ e B tem coordenadas $(x_B{,}y_B{,}0)$

Como B tem a mesma ordenada de A pode-se escrever que as coordenadas de B são $(x_B, y_A{,}0)$

O ponto simétrico do ponto B em relação ao plano yOz é o ponto E de coordenadas $(-x_B{,}y_A{,}0)$

Desta forma: $\overrightarrow{AE} = E - A = (-x_B{,}y_A{,}0) - (x_A{,}y_A{,}0) = (-x_B - x_A{,}0{,}0)$

Sendo M ponto médio do segmento $[AC]$ e tendo C a mesma abcissa de B, tem-se que:

$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} \Leftrightarrow \frac{5}{2} = \frac{x_A + x_B}{2} \Leftrightarrow x_A + x_B = 5 \Leftrightarrow -x_A - x_B = -5 \Rightarrow \overrightarrow{AE} = (-5{,}0{,}0)$

E ainda: $\overrightarrow{AV} = V - A = \left(\frac{5}{2}, \frac{15}{2}, 2\right) - (x_A{,}y_A{,}0) = \left(\frac{5}{2} - x_A, \frac{15}{2} - y_A, 2\right)$

Logo:

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AV} = -\frac{15}{2} \Leftrightarrow (-5{,}0{,}0) \cdot \left(\frac{5}{2} - x_A, \frac{15}{2} - y_A, 2\right) = -\frac{15}{2} \Leftrightarrow -5\left(\frac{5}{2} - x_A\right) = -\frac{15}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2} - x_A = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x_A = 1$$

Logo, como $x_B = 5 - x_A = 5 - 1 = 4$.

4.

4.1. Tem-se que:

$$v'(t) = \left(12 - 12e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)' = -12\left(\left(e^{-\frac{t}{2}}\right)' \cos\left(\frac{t}{2}\right) + e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)'\right)$$

$$= -12\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{t}{2}\right)\right) = 6e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)$$

Logo, visto que $\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) = \cos\left(2 \times \frac{t}{2}\right) = \cos t$, tem-se:

$$v'(t) \times \left(\cos\left(\frac{t}{2}\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right)\right) = 6e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \sin\left(\frac{t}{2}\right)\right) \times \left(\cos\left(\frac{t}{2}\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)$$

$$= 6e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right) = 6e^{-\frac{t}{2}} \cos t$$

4.2. Determine-se os zeros da primeira derivada de v:

$$v'(t) = 0 \Leftrightarrow 6e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \sin\left(\frac{t}{2}\right)\right) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-\frac{t}{2}} = 0}_{\text{Impossível}} \vee \cos\left(\frac{t}{2}\right) + \sin\left(\frac{t}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{t}{2}\right) + \sin\left(\frac{t}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{t}{2}\right) = -\sin\left(\frac{t}{2}\right) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{t}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{t}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{t}{2} = \frac{3\pi}{2} - \frac{t}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{R} \vee \underbrace{\frac{t}{2} = -\frac{3\pi}{2} + \frac{t}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{R}}_{\text{Impossível}}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{R}$$

Repare-se que para $k = 0$ tem-se $t = \frac{3\pi}{2}$ e $0 < \frac{3\pi}{2} < 10$, e para $k = 1$ tem-se $t = \frac{7\pi}{2} > 10$.

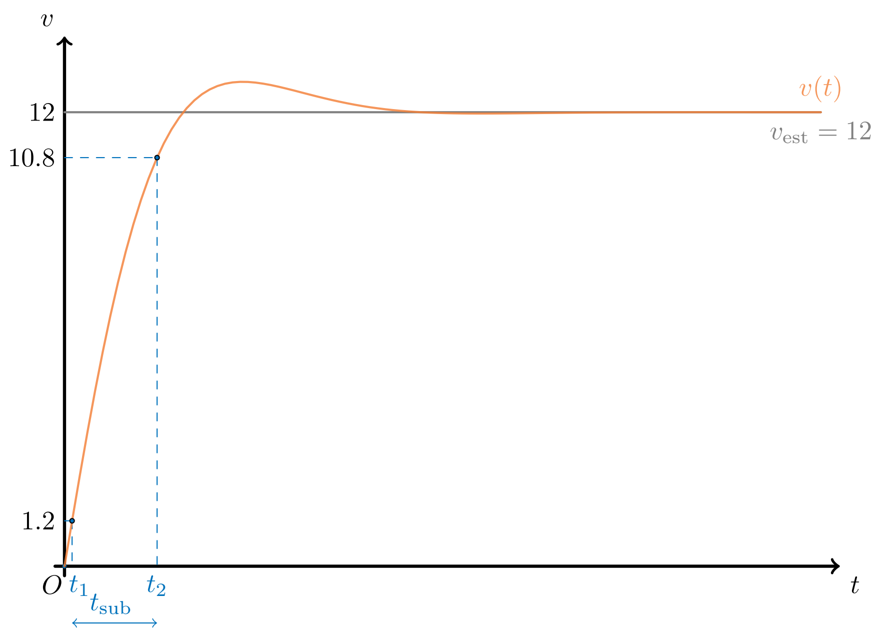
Através de uma tabela de sinais:

α	0		$\frac{3\pi}{2}$		10
$S'(\alpha)$	$+$	$+$	0	$-$	ND
$S(\alpha)$	MIN	$\nearrow$	MAX	$\searrow$	ND

Pelo que v atinge o seu máximo em $t = \frac{3\pi}{2}$, concluindo-se que a velocidade longitudinal máxima é:

$$v\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 12 - 12e^{-\frac{3\pi}{4}} \cos\frac{3\pi}{4} \approx 12{,}8\,\mathrm{m/s}$$

4.3. Pretende-se determinar o tempo de subida, t_{sub} – intervalo de tempo em que o avião está entre 10% e 90% da sua velocidade de estabilidade, v_{est}.



Verifica-se que à medida que o tempo aumenta indefinidamente a velocidade tende para $12\,\mathrm{m/s}$, pelo que 10% desta velocidade corresponde a $1.2\,\mathrm{m/s}$, e 90% corresponde a $10.8\,\mathrm{m/s}$. O tempo de subida corresponde ao valor de $t_2 - t_1$, em que t_2 e t_1 são instantes tais que $v(t_2) = 10.8\,\mathrm{m/s}$ e $v(t_1) = 1.2\,\mathrm{m/s}$.

Através das capacidades gráficas da calculadora, tem-se $t_2 = 2.45\,\mathrm{s}$ e $t_1 = 0.20\,\mathrm{s}$, logo $t_{\text{sub}} = 2.25\,\mathrm{s}$.

5.

5.1. Se g é contínua à esquerda no ponto de abcissa 0 então $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = g(0)$, tal que:

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{e^x - 1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{e^x-1}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^x-1}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

em que $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ são limites notáveis.

Desta forma: $\sqrt{k-1} - 2 = 1 \Leftrightarrow \sqrt{k-1} = 3 \Leftrightarrow k - 1 = 9 \Leftrightarrow k = 10$.

5.2. Determine-se a segunda derivada de g, g'':

$$g'(x) = \left(\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right)' = \frac{\left(\frac{x}{x+1}\right)'}{\left(\frac{x}{x+1}\right)} = \frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}}$$

$$= \frac{1}{(x)(x+1)} = \frac{1}{x^2+x}$$

$$g''(x) = -\frac{(x^2+x)'}{(x^2+x)^2} = -\frac{2x+1}{(x^2+x)^2} < 0, \forall x > 0$$

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{(x)'(x+1) - (x)(x+1)'}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x+1-x}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{1}{(x+1)^2}$$

Conclui-se que g tem concavidade voltada para baixo em $x > 0$, não existindo pontos de inflexão neste intervalo.

6. h tem assíntota vertical em $]0{,}1[$ se e só se a equação $f(x) - x = 0$ tiver solução neste intervalo.

Considere-se $g(x) = f(x) - x$ uma função contínua em $[0{,}1]$ pois resulta da diferença de funções contínuas em $[0{,}1]$. Pretende-se mostrar que g anula-se em $]0{,}1[$, sendo que para tal ter-se-á em conta que $f(0) = 1$ e que $f'(x) < 0$ em todo

o seu domínio, uma vez que $\forall a \in \mathbb{R}, \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} < 0$. f é, portanto, decrescente em todo o seu domínio.

Tem-se:

$g(0) = f(0) - 0 = 1 - 0 = 1 > 0$

$g(1) = f(1) - 1 < 0$, uma vez que $f(1) < f(0)$, isto é, $f(1) < 1$.

Pelo Corolário do Teorema do Bolzano garante-se a existência de solução da equação $g(x) = 0$ em $]0{,}1[$, uma vez que $g(0) \times g(1) < 0$, logo, h admite uma assíntota vertical neste intervalo, como se queria demonstrar.

FIM GRUPO II