Prova Modelo de Exame Nacional
Prova 1 – 2017

Proposta de Resolução
Matemática A

Nuno Miguel Guerreiro

I

Chave da Escolha Múltipla
DCBABCDB

1. Tem-se que:

$$P(\overline{A}|B) = 0{,}5 \Leftrightarrow \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = 0{,}5 \Leftrightarrow \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = 0{,}5 \Leftrightarrow \frac{P(B) - 0{,}2}{P(B)} = 0{,}5 \Leftrightarrow$$

$$P(B) - 0{,}2 = 0{,}5 \times P(B) \Leftrightarrow 0{,}5 \times P(B) = 0{,}2 \Leftrightarrow P(B) = 0{,}4 \Leftrightarrow P(\overline{B}) = 0{,}6$$

Resposta Correcta: (D)

2. De uma linha n do Triângulo de Pascal a diferença entre o terceiro elemento ${}^nC_2$ e o penúltimo ${}^nC_{n-1} = {}^nC_1 = n$ é 27, logo:

$${}^nC_2 - n = 27 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} - n = 27 \Leftrightarrow n(n-1) - 2n = 54 \Leftrightarrow$$

$$n^2 - 3n - 54 = 0 \Leftrightarrow n = -6 \vee n = 9$$

Repare-se que n não pode ser negativo, pelo que se conclui que a linha em questão é a linha 9, e, consequentemente, a soma de todos os elementos da linha seguinte (linha 10) é dada por $2^{10} = 1024$.

$$\begin{aligned} {}^nC_2 &= \frac{n!}{(n-2)! \times 2!} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)! \times 2} \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

$$n^2 - 3n - 54 = 0 \Leftrightarrow$$

$$n_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times (-54) \times 1}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$$

$$n_{1,2} = \frac{3 \pm 15}{2} \Leftrightarrow$$

$$n_1 = -6 \vee n_2 = 9$$

Resposta Correcta: (C)

3. Sabendo que para dados valores de a e b tem-se $\log_a b = 2$:

$$\log_{\sqrt{ab}} a = \frac{1}{\log_a \sqrt{ab}} = \frac{1}{\log_a (ab)^{1/2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\log_a (ab)} = \frac{2}{\log_a a + \log_a b} = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3}$$

ou, uma vez que $b = a^2$:

$$\log_{\sqrt{ab}} a = \log_{\sqrt{a^3}} a = \frac{\log_a a}{\log_a \sqrt{a^3}} = \frac{1}{\log_a a^{3/2}} = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}$$

Resposta Correcta: (B)

4. Tem-se:

$\lim u_n = \lim \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} = \dfrac{\ln(\sqrt{n})^2}{\sqrt{n}} = \dfrac{2\ln\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = 2 \times 0^+ = 0^+$, em que $\lim \dfrac{\ln\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = 0$ é limite notável.

Desta forma:

$$\lim f(u_n) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (2x + \ln x) = 2 \times 0 + (-\infty) = -\infty$$

Resposta Correcta: (A)

5. Tendo em conta que $f'(x) = (x)' + (\cos(x+3))' = 1 - \sin(x+3)$ vem que:

$$\lim_{x \to -3} \frac{f'(x) - 1}{x^2 + 8x + 15} = \lim_{x \to -3} \frac{1 - \sin(x+3) - 1}{(x+3)(x+5)} = -\lim_{x \to -3} \frac{\sin(x+3)}{x+3} \times \lim_{x \to -3} \frac{1}{x+5} = -1 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

em que $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{\sin(x+3)}{x+3} = 1$ é limite notável.

Resposta Correcta: (B)

6. O ângulo BAC é tal que $\tan(BAC) = m_{AB}$, pelo que se tem $\tan(BAC) = \sqrt{3}$, logo $BAC = \dfrac{\pi}{3}$.

Como $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC} \Leftrightarrow 3\overline{AD} = \overline{AD} + 2 \Leftrightarrow 2\overline{AD} = 2 \Leftrightarrow \overline{AD} = 1$, tem-se que $\overline{AD} = \overline{AB}\cos\dfrac{\pi}{3}$, e portanto tem-se que $\overline{AD} = \dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{3}} = 2$ e, portanto, como $\overline{AC} = 3$:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \times \cos\frac{\pi}{3} + \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = 2 \times 3 \times \frac{1}{2} + 2^2 = 3 + 4 = 7$$

Resposta Correcta: (C)

7. Tem-se que:

$\overline{w} = -2ie^{i\theta} = 2 \times (-i) \times e^{i\theta} = 2 \times e^{i\frac{3\pi}{2}} \times e^{i\theta} = 2\, e^{i\left(\theta + \frac{3\pi}{2}\right)}$ tal que:

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} < \theta + \frac{3\pi}{2} < \pi + \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 2\pi < \theta + \frac{3\pi}{2} < \frac{5\pi}{2}$$

concluindo-se que a imagem geométrica de $\overline{w}$ está no primeiro quadrante, e portanto, a imagem geométrica de w está no quarto quadrante.

Resposta Correcta: (D)

8. Como $r = u_{n+1} - u_n = 2a^2$ tal que $2a^2 \in \mathbb{R}$, vem que (u_n) é uma progressão aritmética de termo geral $u_n = u_1 + (n-1)r$, tal que $u_n = 4a + 2a^2(n-1)$. Vem então:

$$u_6 = 102 \Leftrightarrow 4a + 2a^2(6-1) = 102 \Leftrightarrow 4a + 10a^2 = 102 \Leftrightarrow$$
$$10a^2 + 4a - 102 = 0 \Leftrightarrow a_1 = -\frac{17}{5} \vee a_2 = 3$$

$$10a^2 + 4a - 102 = 0 \Leftrightarrow$$
$$a_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times (-102) \times 10}}{2 \times 10} \Leftrightarrow$$
$$a_{1,2} = \frac{-4 \pm 64}{20} \Leftrightarrow$$
$$a_1 = -\frac{17}{5} \vee a_2 = 3$$

Considerando que $a > 0$, tem-se que $a = 3$.

Resposta Correcta: (B)

FIM GRUPO I

1. Tem-se que:

$$w=\frac{4\,e^{i\frac{7\pi}{6}}+8i}{-4i^{4n+239}}=\frac{4\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)+8i}{-4\times(-i)}=\frac{-2\sqrt{3}-2i+8i}{4i}$$
$$=\frac{-2\sqrt{3}+6i}{4i}=\frac{6i}{4i}-\frac{2\sqrt{3}(-i)}{4i(-i)}=\frac{3}{2}-\frac{-2\sqrt{3}i}{-4i^2}=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$=\sqrt{3}\,\mathrm{cis}\,\frac{\pi}{6}$$

$$e^{i\frac{7\pi}{6}}=\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

$$i^{4n+239}=i^{4n}\times i^{239}=1\times i^{236}\times i^3=-i$$

$$|w|=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{3}$$

$$\arg(w)=\tan^{-1}\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2}\right)}=\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{6}$$

Se w é solução de $z^4+az^2=b$ então $w^4+aw^2=b$, e portanto:

$$\left(\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^4+a\left(\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^2=b\Leftrightarrow$$
$$(\sqrt{3})^4\,e^{i\frac{4\pi}{6}}+a\times(\sqrt{3})^2\,e^{i\frac{2\pi}{6}}=b$$
$$9\,e^{i\frac{2\pi}{3}}+3a\,e^{i\frac{\pi}{3}}=b$$
$$9\times\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+3a\times\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=b$$
$$-\frac{9}{2}+\frac{3a}{2}+i\left(\frac{9\sqrt{3}}{2}+\frac{3\sqrt{3}\,a}{2}\right)=b$$

$$e^{i\frac{2\pi}{3}}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$e^{i\frac{\pi}{3}}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Uma vez que b é um número real, conclui-se que:

$$\begin{cases}-\frac{9}{2}+\frac{3a}{2}=b\\[4pt]\frac{9\sqrt{3}}{2}+\frac{3\sqrt{3}\,a}{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-\frac{9}{2}+\frac{3\times(-3)}{2}=-9\\[4pt]a=-\frac{\frac{9\sqrt{3}}{2}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}}=-3\end{cases}$$

2. Considere-se uma turma constituída por 20 alunos, em que existem 10 raparigas e 10 rapazes.

2.1. Número de casos possíveis: ${}^{10}C_5+{}^{10}C_4\times{}^{10}C_1+{}^{10}C_3\times{}^{10}C_2$

A comissão tem 5 alunos sendo que há mais raparigas do que rapazes, pelo que as comissões possíveis são as constituídas por 5 raparigas, 4 raparigas e 1 rapaz e 3 raparigas e 2 rapazes.

Número de casos favoráveis: ${}^{8}C_3+{}^{8}C_2\times{}^{10}C_1+{}^{8}C_1\times{}^{10}C_2$

A comissão deve ser constituída pela Joana e pela Inês simultaneamente, pelo que 2 das raparigas de cada comissão já estão escolhidas, sendo que na comissão de 3 raparigas tem de se escolher 1 das 8 restantes, na de 4 raparigas tem de se escolher 2 das 8 raparigas restantes e na de 5 raparigas tem de se escolher 3 das 8 raparigas restantes.

$$P=\frac{{}^{8}C_3+{}^{8}C_2\times{}^{10}C_1+{}^{8}C_1\times{}^{10}C_2}{{}^{10}C_5+{}^{10}C_4\times{}^{10}C_1+{}^{10}C_3\times{}^{10}C_2}$$

2.2. A primeira fila de 5 lugares deve ser ocupada apenas por raparigas, pelo que se devem escolher as 5 raparigas de entre as 10 e permutá-las nos 5 lugares possíveis: ${}^{10}C_5 \times 5!$

A segunda fila de 5 lugares deve ser ocupada apenas por rapazes (raciocínio igual em cima): ${}^{10}C_5 \times 5!$

A última fila deve ser ocupada apenas por um rapaz, pelo que se deve escolher o rapaz de entre os 5 restantes e permutá-lo nos 5 lugares possíveis: ${}^{5}C_1 \times 5$

As restantes duas filas têm 10 lugares e 9 alunos para dispôr não interessando a ordem: ${}^{10}A_9$

$N = {}^{10}C_5 \times 5! \times {}^{10}C_5 \times 5! \times {}^{5}C_1 \times 5 \times {}^{10}A_9$

3. Considere-se, num referencial o.n $Oxyz$, o plano α definido por $x + 2y + z = 15$, que contém o ponto A, e a reta AB definida pela equação $(x,y,z) = (1,2,1) + k(2,3,1), k \in \mathbb{R}$

3.1. O ponto B pertence ao plano xOy, logo $z_B = 0$. Sabe-se também que B pertence à reta AB cujo ponto genérico é $(x,y,z) = (1 + 2k, 2 + 3k, 1 + k)$, logo tem-se $1 + k = 0 \Leftrightarrow k = -1$.
As coordenadas de B são então $(x_B, y_B, z_B) = (1 + 2 \times (-1), 2 + 3 \times (-1), 0) = (-1, -1, 0)$.

Uma reta perpendicular ao plano α é tal que o seu vetor diretor é colinear com o vetor normal ao plano, logo, uma equação cartesiana da reta pedida é: $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+0}{1} \Leftrightarrow x + 1 = \dfrac{y+1}{2} = z$

3.2. O ponto M é ponto médio do segmento $[AC]$, pelo que as suas coordenadas podem ser dadas em função das coordenadas de A e C, tal que $(x_M, y_M, z_M) = \left(\dfrac{x_A + x_C}{2}, \dfrac{y_A + y_C}{2}, \dfrac{z_A + z_C}{2}\right)$.
As coordenadas de A podem ser obtidas tendo em conta que A é o ponto de interseção do plano α e a reta AB, de tal forma que: $1 + 2k + 2 \times (2 + 3k) + 1 + k = 15 \Leftrightarrow 9k + 6 = 15 \Leftrightarrow k = 1$
Logo as coordenadas de A são $(x_A, y_A, z_A) = (1 + 2, 2 + 3, 1 + 1) = (3, 5, 2)$.

Desta forma tem-se que: $\begin{cases} 2 = \dfrac{3 + x_C}{2} \\ 1 = \dfrac{5 + y_C}{2} \\ 1 = \dfrac{2 + z_C}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 2 \times 2 - 3 \\ y_C = 2 \times 1 - 5 \\ z_C = 2 \times 1 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 1 \\ y_C = -3 \\ z_C = 0 \end{cases} \Rightarrow C(1, -3, 0)$.

4. Considere-se que o acréscimo de altura de um drone devido ao efeito da propulsão, em metros, é dado, t segundos após o início do voo, por $h(t) = e^{-8t}(8t - 1) + 1$

4.1. Tem-se:

$$\lim_{t\to+\infty} h(t) = \lim_{t\to+\infty} (e^{-8t}(8t - 1) + 1) = \lim_{t\to+\infty} \frac{8t - 1}{e^{8t}} + 1 = \lim_{t\to+\infty} \frac{8t}{e^{8t}} - \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{e^{8t}} + 1 =$$
$$\frac{8}{\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{e^{8t}}{t}} - 0 + 1 = \frac{8}{+\infty} + 1 = 0 + 1 = 1$$

em que $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{e^{8t}}{t} = +\infty$ é limite notável.

No contexto do problema, conclui-se que à medida que o tempo aumenta, o acréscimo de altura do drone tende a estabilizar para o valor de 1 metro.

4.2. De forma a determinar o sobreimpulso deve-se determinar a altura máxima, $h_{\max}$, tal que:

$$h'(t) = \left(e^{-8t}(8t-1)\right)' + (1)' = (e^{-8t})'(8t-1) + e^{-8t}(8t-1)' + 0 = -8e^{-8t}(8t-1) + 8e^{-8t}$$
$$= -8e^{-8t}(8t-1-1) = -8e^{-8t}(8t-2) = -16e^{-8t}(4t-1)$$

e de forma a determinar a altura máxima calcule-se $h'(t) = 0 \wedge t > 0$:

$$h'(t) = 0 \wedge t > 0 \Leftrightarrow -16e^{-8t}(4t-1) = 0 \wedge t > 0 \Leftrightarrow \underbrace{-16e^{-8t} = 0}_{\text{Impossível}} \vee 4t - 1 = 0 \wedge t > 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}$$

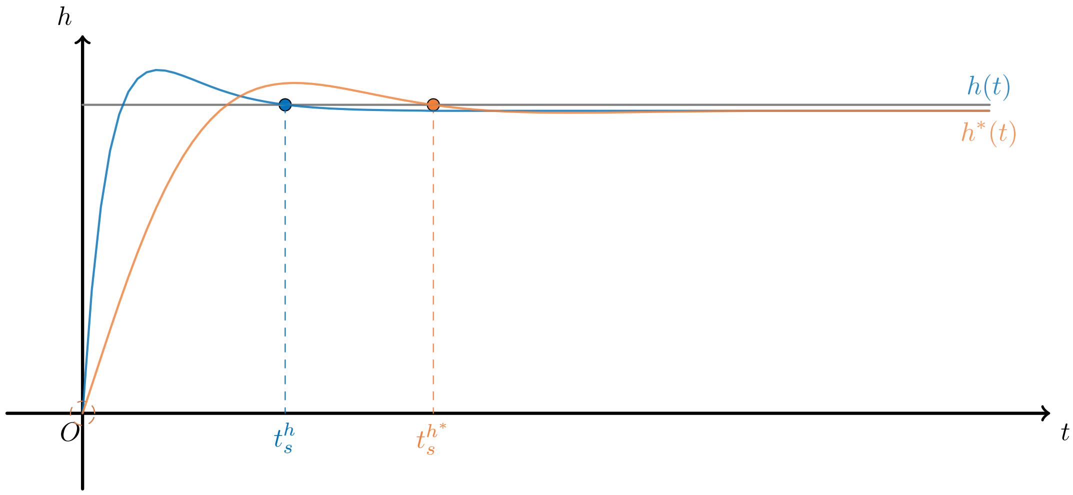
Da tabela de sinais conclui-se que:

t	0		$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$h'(t)$	ND	$+$	0	$-$
$h(t)$	ND	$\nearrow$	MAX	$\searrow$

h admite um máximo em $t = \frac{1}{4}$ tal que $h_{\max} = h\left(\frac{1}{4}\right) = e^{-8\times\frac{1}{4}} \times (8 \times \frac{1}{4} - 1) + 1 = e^{-2} + 1$

Conclui-se desta forma que o sobreimpulso é $M_p^{\%} = (h_{\max} - 1) \times 100 = (e^{-2} + 1 - 1) \times 100 \approx 13{,}5\%$.

4.3. Pretende-se determinar qual o controlador que leva a um menor tempo de estabelecimento, sendo que, para tal deve-se esboçar os gráficos de h e h^* e retirar o valor da interseção desses mesmos com a reta de equação $h = 1.02$ após terem atingido a altura máxima.



tal que $t_s^h = 0{,}67$ e $t_s^{h^*} = 1{,}16$, logo, como $t_s^h < t_s^{h^*}$, o primeiro controlador foi o escolhido pelo engenheiro.

5. Considere-se o retângulo $[ABCD]$ representado na Figura 3 do enunciado.

5.1. Uma vez que os pontos C e D pertencem à reta de equação $x = -1$, o raio da circunferência é 1.

A área pretendida, $A(\alpha)$, pode ser dada por $A_{[ABCD]} = S(\alpha) = \overline{AD} \times \overline{AB}$.

Seja M a interseção do segmento de reta $[AB]$ com o eixo Ox:

Se $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ tem-se $\overline{OM} = \cos\alpha \Rightarrow \overline{AD} = \overline{OM} + 1 = \cos\alpha + 1$

Se $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ tem-se $\overline{OM} = -\cos\alpha \Rightarrow \overline{AD} = 1 - \overline{OM} = 1 + \cos\alpha$

Em $0 < \alpha < \pi$ tem-se $\overline{AM} = \sin\alpha \Rightarrow \overline{AB} = 2\overline{AM} = 2\sin\alpha$

Então em $0 < \alpha < \pi$: $S(\alpha) = (\cos\alpha + 1) \times 2\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin\alpha = \sin 2\alpha + 2\sin\alpha$

5.2. Determine-se os zeros da primeira derivada de S:

$$S'(\alpha) = (\sin 2\alpha)' + (2\sin\alpha)' = 2\cos 2\alpha + 2\cos\alpha = 4\cos^2\alpha + 2\cos\alpha - 2$$

$$\begin{aligned} S'(\alpha) = 0 &\Leftrightarrow 4\cos^2\alpha + 2\cos\alpha - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\times 4 \times (-2)}}{2\times 4} = \frac{-2\pm 6}{8} \\ &\Leftrightarrow \cos\alpha = -1 \vee \cos\alpha = \frac{1}{2} \\ &\overset{\alpha\in]0,\pi[}{\Leftrightarrow} \alpha = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\cos 2\alpha &= 2\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) \\ &= 2\left(\cos^2\alpha - \left(1-\cos^2\alpha\right)\right) \\ &= 2\left(2\cos^2\alpha - 1\right) \\ &= 4\cos^2\alpha - 2 \end{aligned}$$

Através de uma tabela de sinais:

α	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$S'(\alpha)$	ND	$+$	0	$-$	ND
$S(\alpha)$	ND	$\nearrow$	MAX	$\searrow$	ND

S é estritamente crescente em $\left]0, \frac{\pi}{3}\right[$ e estritamente decrescente em $\left]\frac{\pi}{3}, \pi\right[$.

A função S admite um máximo em $\alpha = \frac{\pi}{3}$ tal que $S\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{2\pi}{3} + 2\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

6. Considere-se, em $\mathbb{R}$, a função $f(x) = \ln\left(\frac{e^x+1}{e^x+2}\right)$.

6.1. Tem-se que:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{e^x+1}{e^x+2}\right) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{2}{e^x}\right)}\right) = \ln\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{e^x}}{1+\frac{2}{e^x}}\right) = \ln\left(\frac{1+\frac{1}{+\infty}}{1+\frac{2}{+\infty}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1+0}{1+0}\right) = \ln 1 = 0 \end{aligned}$$

logo $y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico de f quando $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-x\infty} \ln\left(\frac{e^x+1}{e^x+2}\right) = \ln\left(\frac{e^{-\infty}+1}{e^{-\infty}+2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$$

logo $y = -\ln 2$ é assíntota horizontal do gráfico de f quando $x \to -\infty$.

6.2. A função f é a função composta de duas funções contínuas $\left(\ln x \text{ e } \frac{e^x+1}{e^x+2}\right)$ contínuas em $\mathbb{R}$, pelo que se conclui que f é contínua em $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x+2}\right)\right)' = \frac{\left(\frac{e^x+1}{e^x+2}\right)'}{\left(\frac{e^x+1}{e^x+2}\right)} = \frac{\frac{e^x}{(e^x+2)^2}}{\frac{e^x+1}{e^x+2}} \\ &= \frac{e^x}{(e^x+1)(e^x+2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{e^x+1}{e^x+2}\right)' &= \frac{(e^x+1)'(e^x+2) - (e^x+1)(e^x+2)'}{(e^x+2)^2} \\ &= \frac{e^x(e^x+2) - e^x(e^x+1)}{(e^x+2)^2} \\ &= \frac{e^x(e^x+2-e^x-1)}{(e^x+2)^2} \\ &= \frac{e^x}{(e^x+2)^2} \end{aligned}$$

tal que $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Repare-se, portanto, que como f é contínua e crescente em todo o seu domínio, então o gráfico da função parte da assíntota horizontal quando $x\to-\infty$ e cresce para a assíntota horizontal quando $x\to+\infty$.

Conclui-se, portanto, que $D'_f =]-\ln 2, 0[$.

FIM GRUPO II