Prova Modelo de Exame Nacional — 3

Prova Escrita de Matemática A

12^o *Ano de Escolaridade*

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

Nuno Miguel Guerreiro — Sinal +

Ano Lectivo de 2015/2016

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, seleccione a única opção correcta.
Escreva, na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção seleccionada.
Não apresente cálculos, nem justificações.

1. Seja X uma variável aleatória com distribuição normal de valor médio μ e desvio padrão σ $\big(X \sim N(\mu, \sigma)\big)$ e a um certo número real.

Sabe-se que:

- $\mu = 6$
- $P(6 < X < 7) = 0{,}475$
- $P(X < a) = 0{,}025$

Qual é o valor de a?

(A) 5 **(B)** $5{,}5$ **(C)** 6 **(D)** 8

2. Considere todos os números que se podem obter alterando a ordem dos algarismos do número $12\,358$.

Quantos desses números são pares e menores do que $20\,000$?

(A) 12 **(B)** 18 **(C)** 24 **(D)** 30

3. Considere a sucessão (u_n), definida por $u_n = \dfrac{n^2+1}{n^2}$.

Seja f uma função contínua, de domínio $]1, +\infty[$, definida por $f(x) = \dfrac{1+x}{\ln x}$

Qual o valor de $\lim f(u_n)$?

(A) $-\infty$

(B) 0

(C) 1

(D) $+\infty$

4. Na Figura 1, está representa, num referencial o.n xOy, parte do gráfico de uma função f, contínua em todo o seu domínio.

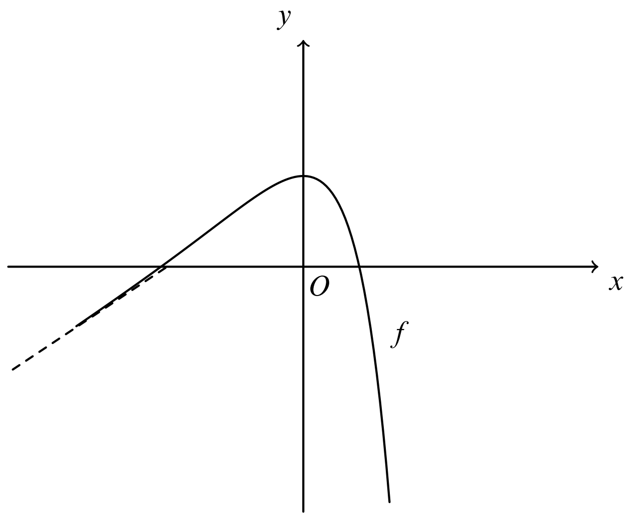
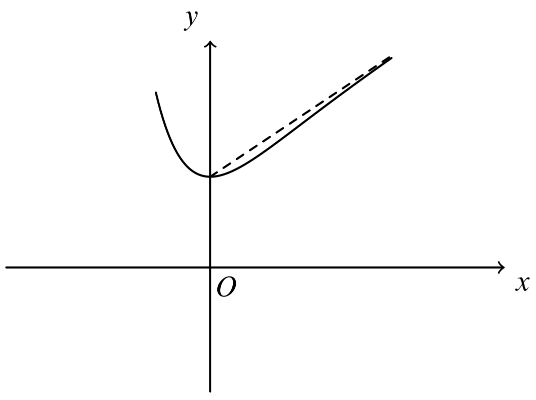


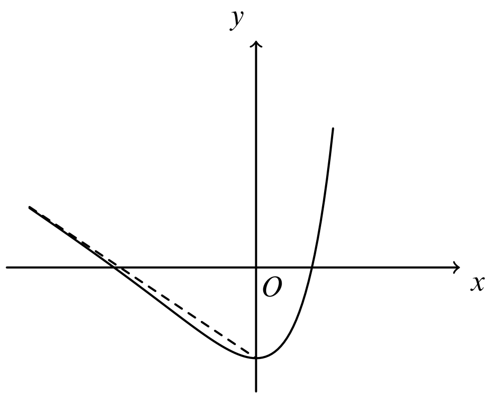
Figura 1

Qual dos seguintes gráficos pode ser parte do gráfico da função g, definida por $g(x) = -f(-x)$?

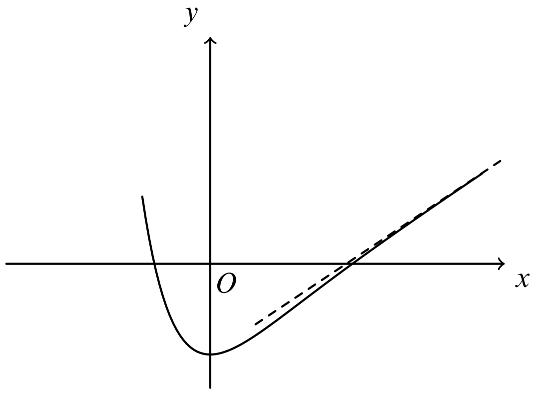
(A)



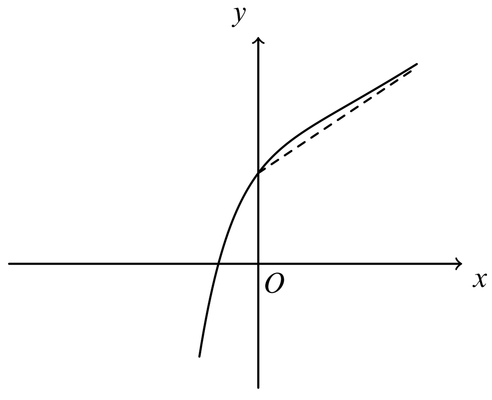
(B)



(C)



(D)



Nota: Em cada gráfico, está representada, a tracejado, uma assíntota não vertical.

5. Na Figura 2, ao lado, estão representadas:

- parte do gráfico de uma função g, de domínio $\mathbb{R}$ definida por $g(x) = a \cdot \frac{x^2}{2} - 1,\ a \in \mathbb{R}^+$;
- uma reta r, tangente ao gráfico de g, no ponto de abcissa a;
- o ponto P pertencente ao eixo Oy e de ordenada b.

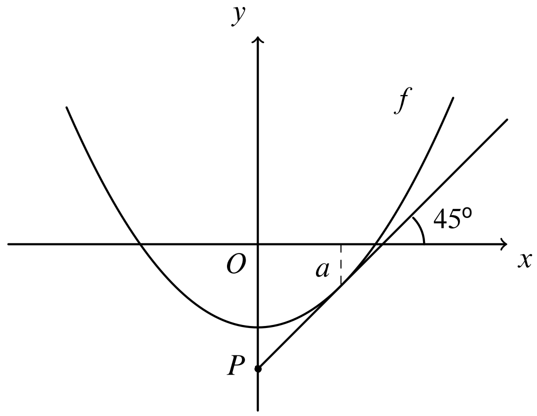


Figura 2

Sabe-se que a inclinação da reta r é $45.^{\text{o}}$.

Qual é o valor de b?

(A) $-\frac{1}{2}$ **(B)** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **(C)** $-\frac{3}{2}$ **(D)** $-\sqrt{3}$

6. Na Figura 3 abaixo, está representada, a sombreado, no plano complexo, parte de uma coroa circular.

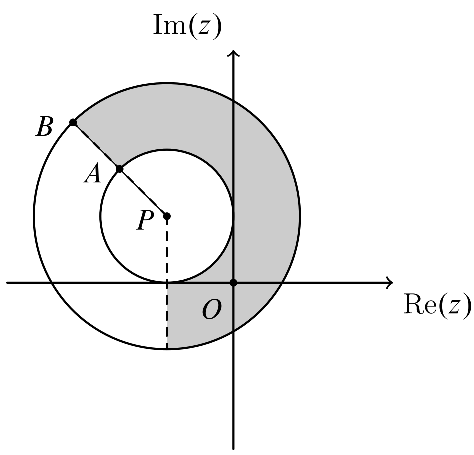


Figura 3

Sabe-se que:

- O é a origem do referencial;
- $\overline{BP} = 2$ e $\overline{AP} = 1$;
- O ponto P pertence à reta $\operatorname{Im}(z) = 1$;
- Os pontos A, B e P pertencem à bissectriz dos quadrantes ímpares.

Considere como $\arg(z)$ a determinação que pertence ao intervalo $[-\pi, \pi[$.

Qual das condições seguintes pode definir, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a região a sombreado?

(A) $1 \leq |z+1-i| \leq 2 \ \wedge\ -\frac{\pi}{2} < \arg(z) < \frac{3\pi}{4}$

(B) $1 \leq |z| \leq 2 \ \wedge\ -\frac{\pi}{2} < \arg(z) < \frac{3\pi}{4}$

(C) $1 \leq |z+1-i| \leq 2 \ \wedge\ -\frac{\pi}{2} < \arg(z+1-i) < \frac{3\pi}{4}$

(D) $1 \leq |z| \leq 2 \ \wedge\ -\frac{\pi}{2} < \arg(z+1-i) < \frac{3\pi}{4}$

7. Considere, num referencial $Oxyz$, os pontos $A(1,0,1)$, $B(0,1,0)$ e $C(1,1,0)$.

Qual das seguintes condições pode definir uma reta perpendicular ao plano ABC e que passa em A?

(A) $(x,y,z) = (1,-2,-1) + k\,(1,0,1), k \in \mathbb{R}$

(B) $(x,y,z) = (1,0,1) + k\,(1,2,1), k \in \mathbb{R}$

(C) $(x,y,z) = (1,0,1) + k\,(0,1,1), k \in \mathbb{R}$

(D) $(x,y,z) = (1,0,1) + k\,(1,-2,1), k \in \mathbb{R}$

8. Considere a sucessão (a_n), tal que se sabe que:

- $a_{n+1} - a_n < 0$;
- a_n é uma sucessão de termos positivos.

Considere as afirmações.

I) a_n é uma sucessão estritamente decrescente;

II) a_n é uma sucessão limitada;

III) a_n é uma sucessão divergente

Qual das sequintes afirmações é verdadeira?

(A) **I** e **III** são verdadeiras.

(B) Apenas **I** é verdadeira.

(C) **II** e **III** são verdadeiras.

(D) Apenas **III** é falsa.

GRUPO II

Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resulado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja z_1 um número complexo e $z_2 = \dfrac{4\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}i^{17}}{1-\sqrt{3}i}$.

Sabe-se que:

- z_1 pertence à bissectriz dos quadrantes ímpares;
- $\text{Re}(z_1) < 0$ e $\text{Im}(z_1) < 0$;
- $|z_1| = |z_2|$.

Determine, sem recorrer à calculadora, o número complexo z_1.

Apresente esse número na forma trigonométrica.

2. Considere um dado tetraédrico não equilibrado com as faces numeradas de 1 a 4.

Considere, agora, a experiência aleatória que consiste em lançar uma vez o tetraedro e registar, em cada lançamento, o número inscrito na face voltada para baixo.

Considere agora os acontecimentos:

A : "a face voltada para baixo está numerada com número ímpar"
B : "a face voltada para baixo está numerada com número primo"
C : "a face voltada para baixo está numerada com número inferior a 3"

Sabe-se que:

- $P(A \cap B) = 0{,}4$
- $P(\overline{A} \cap \overline{C}) = 0{,}2$
- $P(\overline{A}|B) = 0{,}4$

2.1. Seja X a variável aleatória "número da face que ficou voltada para baixo".

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável X.

Apresente os resultados na forma de fração irredutível.

2.2. Considere agora a experiência aleatória que consiste em lançar o dado 10 vezes e registar, em cada lançamento, o número inscrito na face voltada para baixo.

Determine a probabilidade da face do dado voltada para baixo estar numerada com o número 3 exactamente 5 vezes.

Apresente o resultado em forma de dízima, arrendondado às centésimas.

3. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{e^{4x}-1} & \text{se } x < 0 \\ e^k - 1 & \text{se } x = 0 \\ \ln\left(\dfrac{2x+2}{x}\right) + \dfrac{x}{2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$

Resolva os itens **3.1.**, **3.2.** e **3.3.**, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

3.1. Determine o valor de k, tal que $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$.

3.2. O gráfico de f admite uma assíntota oblíqua quando $x \to -\infty$, cuja equação é $y = -2x + b$, $b \in \mathbb{R}$.
Determine o valor de b.

3.3. Mostre que $\ln\left(4\sqrt{e}\right)$ é um extremo relativo da função f no intervalo $]0, +\infty[$.

4. Na Figura 4, está representada, num referencial o.n xOy, parte do gráfico da função g, de domínio $]-\pi,\pi[$, definida por $g(x) = 6\sin(2x)$.

Sabe-se que:

- Os vértices do triângulo A e C pertencem ao eixo Ox;
- Os vértices A, B e C pertencem ao gráfico de g;
- O ponto B corresponde ao máximo de g.

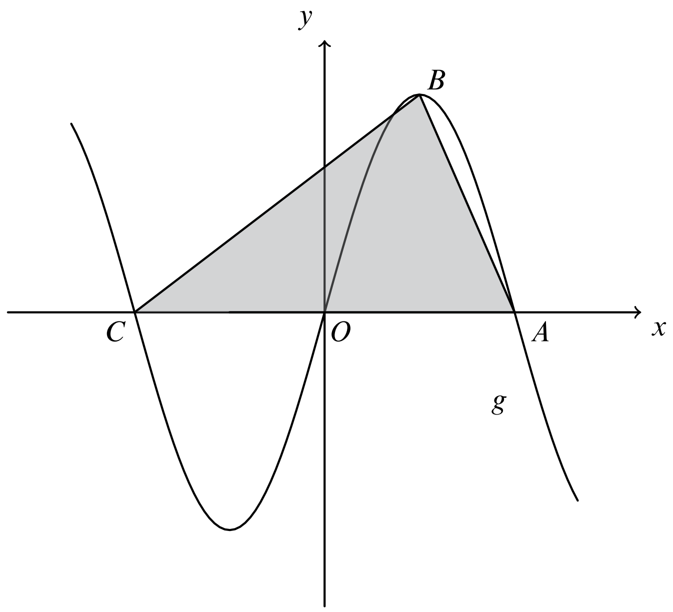


Figura 4

4.1. Calcule o valor de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)}$

4.2. Determine, recorrendo exclusivamente a métodos analíticos e sem utilizar a calculadora, o valor exato da área do triângulo $[ABC]$

5. Considere a função f de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, definida por $f(x) = x^a + a\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$, em que a designa um número real positivo.

Seja r a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a e s a reta de equação $y = \frac{x}{3} - 3$.

Mostre que, qualquer que seja o valor de a, a reta r não é perpendicular a s.

6. Na Figura 5, está representado, num referencial o.n $Oxyz$, a pirâmide quandragular regular $[ABCDE]$.

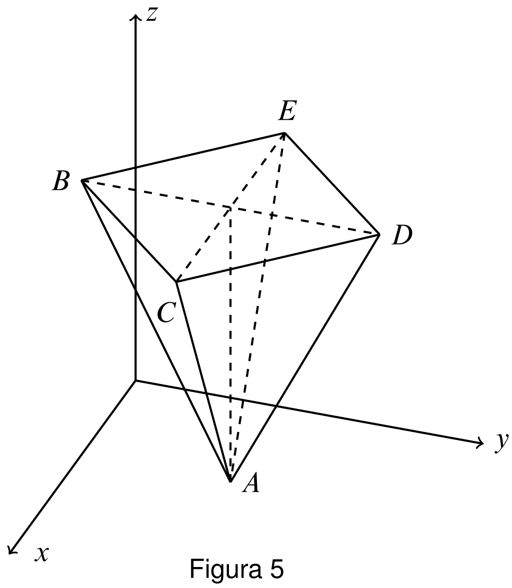


Figura 5

Sabe-se que:

- Os pontos A, B e E pertencem aos planos xOy, xOz e yOz, respectivamente;
- A equação do plano CBE é $z = 6$;
- A reta AC pode ser definida pela condição $(x,y,z) = (3,3,0) + k(3,0,6)$, $k \in \mathbb{R}$.

6.1. Mostre que o plano que contém a face $[ACD]$, γ, pode ser dado por $2x + 2y - z = 12$.

6.2. Considere a superfície esférica definida pela equação $(x+2)^2 + (y+3)^2 + (z-a)^2 = a^2$.

A interseção da superfície esférica acima com o plano de equação $z = a^2$ resulta numa circunferência de perímetro igual a 4.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de a, tendo em conta que este é um número real tal que $a > 1$

Na sua resposta deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora, devidamente identificado(s);
- apresentar o valor de a com arredondamento às centésimas.

6.3. Determine a interseção do plano γ com a reta t, que é uma reta perpendicular a γ e que passa na origem do referencial $O(0,0,0)$.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a 8.	(8 × 5 pontos)	40 pontos
		40 pontos

GRUPO II

1.		15 pontos
2.		
	2.1	15 pontos
	2.2	10 pontos
3.		
	3.1	10 pontos
	3.2	15 pontos
	3.3	15 pontos
4.		
	4.1	15 pontos
	4.2	15 pontos
5.		15 pontos
6.		
	6.1	5 pontos
	6.2	15 pontos
	6.3	15 pontos
		160 pontos

Total .... **200 pontos**