Prova Modelo de Exame Nacional — 2

Prova Escrita de Matemática A

12^o *Ano de Escolaridade*

Duração da Prova: 150 minutos.   Tolerância: 30 minutos.

Nuno Miguel Guerreiro — Sinal +

Ano Lectivo de $2015/2016$

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, seleccione a única opção correcta.

Escreva, na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção seleccionada.

Não apresente cálculos, nem justificações.

---

1. Seja Ω, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que:

- $P(\overline{A}) = 0{,}2$
- $P(B|A) = 0{,}6$
- $P(A|B) = 0{,}6$

Qual é o valor de $P(B)$?

(A) $0{,}2$ **(B)** $0{,}4$ **(C)** $0{,}6$ **(D)** $0{,}8$

2. A tabela de distribuição de probabilidades de uma certa variável X é:

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	a	$2a$	$0{,}2$	b

Sabe-se que:

- a e b designam dois números reais;
- $P(X = 0 \mid X \leq 2) = 0{,}25$

Qual é o valor de b?

(A) $0{,}05$ **(B)** $0{,}2$ **(C)** $0{,}4$ **(D)** $0{,}5$

3. Considere a função f, **contínua** e de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x} - 1}{x} & \text{se} \quad x < 0 \\ \ln(ke + x) & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Qual o valor de k?

(A) 0

(B) 1

(C) e

(D) e^2

4. Considere, para um certo número real k, a primeira derivada de uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f'(x) = k(x+1) + e^{2x}$.

O teorema de Bolzano garante que a função f tem, no intervalo $]0,1[$, pelo menos um ponto em que a reta tangente a este mesmo é paralela ao eixo Ox.

A qual dos intervalos seguintes pode pertencer k ?

(A) $\left]\frac{e^2}{2}, 1\right[$ **(B)** $\left]-e^2, -\frac{e^2}{2}\right[$ **(C)** $\left]-\frac{e^2}{2}, -1\right[$ **(D)** $]-1, 0[$

5. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sin(2x)$.

Qual das seguintes expressões dá o valor da derivada de f, no ponto de abcissa $\frac{\pi}{4}$?

(A) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\cos(2h) - 1}{h}$

(B) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1 - \cos(2h)}{h}$

(C) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin(2h) - 1}{h}$

(D) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1 - \sin(2h)}{h}$

6. Considere, num referencial o.n $Oxyz$, o ponto A, de coordenadas $(2,1,0)$, e a reta r, definida pela condição $(x,y,z) = (3,4,2) + k\,(1,2,1), k \in \mathbb{R}$.

Seja β um plano paralelo à reta r e qua passa pelo ponto A.

Qual das seguintes condições seguintes pode definir o plano β?

(A) $x + 2y + z - 4 = 0$

(B) $x - y + z - 1 = 0$

(C) $x + 2y + z + 4 = 0$

(D) $-x + y - z - 1 = 0$

7. Considere a progressão geométrica (a_n) de termo geral $a_n = 2^{3-n}, n \in \mathbb{N}$.

Qual dos seguintes valores é o valor da soma de todos os termos da sucessão (a_n)?

(A) 8

(B) 16

(C) 32

(D) 64

8. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere o número complexo $z_1 = 2 + i$, cujo afixo está representado abaixo na Figura 1.

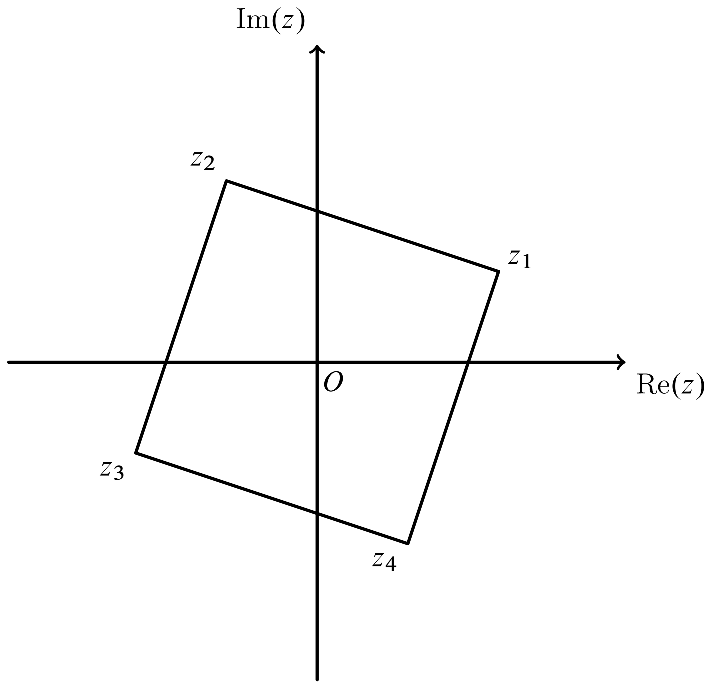

Figura 1

Sabe-se que z_1, z_2, z_3 e z_4 são raízes quartas de um número complexo w.

Considere as afirmações.

I) $z_4 = z_3 \times i$;

II) $|w| = 5$;

III) O quadrado tem de área 5 unidades de área.

Qual das sequintes afirmações é verdadeira?

(A) **II** e **III** são verdadeiras.

(B) Apenas **I** é verdadeira.

(C) **I** e **III** são falsas.

(D) Apenas **III** é falsa.

GRUPO II

Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resulado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $z_1 = -2\sqrt{3} + 2i$ e z_2 um outro número complexo.

Sabe-se que:

- z_1 e z_2 são números complexos tais que $0 < \arg(z_1) < 2\pi$ e $\pi < \arg(z_2) < 2\pi$;
- z_2 é um número imaginário puro;
- as imagens geométricas dos complexos z_1 e z_2 são vértices consecutivos de um polígono regular de n lados, com centro na origem do referencial.

Determine, sem recorrer à calculadora, o número complexo z_2 e o valor n.

Apresente esse número na forma trigonométrica.

2. Uma caixa contém seis bolas numeradas de 0 a 5, indistinguíveis ao tato.

2.1. Retiram-se, sucessivamente, ao acaso e sem reposição, duas bolas da caixa, registando a soma dos números das bolas saídas.

Qual a probabilidade de não sair a bola 2, quando a soma dos números das bolas saídas é ímpar?

Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

2.2. Considere agora a seguinte experiência aleatória: retiram-se, simultaneamente e ao acaso, duas bolas do saco, multiplicam-se os números e colocam-se novamente as bolas no saco.

Considere que esta experiência é repetida 5 vezes.

Seja X a variável aleatória que representa o número de vezes em que o produto obtido é nulo.

Determine o valor de $P(X \leq 1)$.

Apresente o resultado na forma de dízima, com arredondamento às centésimas.

3. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{xe^x - ex}{x-1} & \text{se } x < 1 \\ \\ \dfrac{\ln(2x)}{x} + x - 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

Resolva os itens **3.1.**, **3.2.** e **3.3.**, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

3.1. Averigue se existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

3.2. Estude a função f quanto a existência de assíntotas não verticais do seu gráfico.

Na sua resposta deve:

- mostrar que existe uma assíntota horizontal quando $x \to -\infty$ e escrever a equação dessa assíntota;
- mostrar que existe uma assíntota não vertical quando $x \to +\infty$ e escrever a equação dessa assíntota.

3.3. Para um dado valor $a > 1$, a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a tem equação reduzida $y = \frac{5}{4}x + b$, em que b designa um número real.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determine o valor de a.

Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencia, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora, devidamente identificado(s);
- apresente o valor de a, arrendondado às centésimas.

4. Seja g uma função cuja derivada g', de domínio $\mathbb{R}$, é dada por $g'(x) = \sin x\,(1 - \cos x)$

4.1. Para um dado valor de $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, tem-se que $\tan x = -2\sqrt{2}$.

Para esse ângulo x, determine $g'(x)$.

4.2. Estude o gráfico da função g quanto ao sentido das concavidades e quanto à existência de pontos de inflexão em $[0, \pi[$, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Na sua resposta deve:

- indicar o(s) intervalo(s) onde o gráfico da função g tem concavidade voltada para cima;
- indicar o(s) intervalo(s) onde o gráfico da função g tem concavidade voltada para baixo;
- indicar, caso existam, caso existam, as abcissas dos pontos de inflexão do gráfico da função g

5. Considere, num referencial $Oxyz$, o ponto $A(1,1,1)$ e o plano α de equação $x + y - 2z = 4$.

5.1. Considere o ponto B pertencente ao plano xOy, ao plano $x = 2$ e ao plano α, e ainda o ponto C que pertence à reta de equação $x = 2 \wedge z = 1$ e ao plano α.

Determine a amplitude de CAB, em radianos.

Apresente o resultado com arredondamento às centésimas.

5.2. Considere a superfície esférica S de equação $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 6$.

Indique o centro e o raio da superfície esférica S, e averigue se esta é tangente ao plano α. Se sim, determine o ponto de tangência de S com o plano α.

6. Considere uma função f, de domínio $\mathbb{R}$.

Sabe-se que:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - 2x + 1\big) = 0$;
- $f(0) = 0$;
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$;
- a primeira derivada de f, f', é sempre positiva em $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, vindo que $f'(1) = 0$.

Considere as afirmações seguintes.

I) O gráfico da função f admite uma assíntota horizontal quando $x \to +\infty$;

II) A reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0 é paralela à reta de equação $y = x - 4$.;

III) A função f admite um extremo relativo no seu gráfico em $x = 1$.

Elabore uma composição, na qual indique, justificando, se cada uma das afirmações é verdadeira ou falsa.

Na sua resposta, apresente três razões diferentes, uma para cada afirmação.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a 8.	(8 × 5 pontos)	40 pontos
		40 pontos

GRUPO II

1.		15 pontos
2.		
	2.1	15 pontos
	2.2	15 pontos
3.		
	3.1	15 pontos
	3.2	15 pontos
	3.3	15 pontos
4.		
	4.1	10 pontos
	4.2	15 pontos
5.		
	5.1	15 pontos
	5.2	15 pontos
6.		15 pontos
		160 pontos

Total .... **200 pontos**