MATEMÁTICA A

RESOLUÇÃO BREVE PROVA MODELO EXAME NACIONAL 2 - 2015/2016

Colectânea de Provas Modelo de Exame Nacional 2015/2016

I

Chave da Escolha Múltipla
DBCCABAB

1. A e B são dois acontecimentos possíveis tais que $P(B|A) = P(A|B)$ e $P(\overline{A}) = 0{,}2$, logo vem que:

$$\frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(A) = P(B) \Leftrightarrow P(B) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$$

Resposta Correcta: (D)

2. Atendendo à tabela de distribuição de probabilidades da variável X tem-se que:

$$P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = a + 2a + 0{,}2 + b = 3a + b + 0{,}2 = 1$$

De onde se conclui que $3a + b = 0{,}8$.

De $P(X=0|X\leq 2) = 0{,}25$, vem que:

$$\frac{P(X=0)}{P(X\leq 2)} = 0{,}25 \Leftrightarrow \frac{a}{a+2a+0{,}2} = 0{,}25 \Leftrightarrow 3a + 0{,}2 = \frac{a}{0{,}25} \Leftrightarrow 3a + 0{,}2 = 4a \Leftrightarrow a = 0{,}2$$

Conclui-se então de $3a + b = 0{,}8$, que $b = 0{,}8 - 3\times 0{,}2 = 0{,}2$.

Resposta Correcta: (B)

3. Sabe-se que a função f é contínua em $\mathbb{R}$ pelo que se pode escrever que:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$$

Vem que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = \ln(ke+0) = \ln(ke) = \ln k + \ln e = \ln k + 1$, e ainda:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{2x}-1}{x} = 2\underbrace{\lim_{2x\to 0^-}\frac{e^{2x}-1}{2x}}_{\text{Limite Notável} = 1} = 2\times 1 = 2$$

Desta forma vem que de $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$, que $\ln k + 1 = 2 \Leftrightarrow \ln k = 1 \Leftrightarrow k = e$.

Resposta Correcta: (C)

4. Considera-se a primeira derivada de uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f'(x) = k(x+1) + e^{2x}$. Pelo Teorema de Bolzano sabe-se que no intervalo $]0{,}1[$, o gráfico de f tem pelo menos uma reta tangente ao seu gráfico paralela ao eixo Ox, i.e, existe pelo menos um zero de f' em $]0{,}1[$. Desta forma deve verificar-se, pelo Corolário do Teorema de Bolzano, que $f'(0)\times f'(1) < 0$. Tem-se então:

$$f'(0) = k(0+1) + e^{2\times 0} = k + e^0 = k+1 \qquad f'(1) = k(1+1) + e^{2\times 1} = 2k + e^2$$

Verifica-se então que $(k+1)\cdot(2k+e^2) < 0$, que é uma parábola com concavidade virada para cima e que admite zeros em $k=-1$ e $k = -\dfrac{e^2}{2}$, pelo que é negativa para $k\in \left]-\dfrac{e^2}{2}, -1\right[$.

Resposta Correcta: (C)

5. A função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sin(2x)$, é tal que o valor da sua primeira derivada no ponto de abcissa a, atendendo à definição de derivada, pode ser dada por:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+a) - f(a)}{h}$$

Tendo em conta que se pretende $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$, vem que:

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+\frac{\pi}{4}) - f(\frac{\pi}{4})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin\left(2(x+\frac{\pi}{4})\right) - \sin(2\times\frac{\pi}{4})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(2x+\frac{\pi}{2}) - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(2h) - 1}{h}$$

Uma vez que $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ e $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha$.

Resposta Correcta: (A)

6. Considere-se o ponto $A(2,1,0)$, e a reta r definida pela condição $(x,y,z) = (3,4,2) + k(1,2,1), k \in \mathbb{R}$, tal que o vetor diretor de r, $\overrightarrow{u_r}$ é $\overrightarrow{u_r} = (1,2,1)$. O plano β é um plano paralelo a r e que passa em A, pelo que se considerar $\overrightarrow{n_\beta}$ como o vetor normal ao plano β, tem-se que:

$$\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{n_\beta} = 0$$

Tendo em conta as opções dadas vem que os vetores $\overrightarrow{n_\beta}$ podem ser $(1,2,1)$, $(1,-1,1)$ e $(-1,1,-1)$, e repare-se que $(1,2,1)\cdot(1,2,1) = 6 \neq 0$, e que $(1,-1,1)\cdot(1,2,1) = 0$. Naturalmente $(-1,1,-1)$ também é perpendicular a $(1,2,1)$, pois $(-1,1-1) = -1\cdot(1,-1,1)$.

As equações de um plano perpendicular à reta r podem então ser $x - y + z - 1 = 0$ e $-x + y - z - 1$, contudo apenas um destes planos passa em A, vindo que $2 - 1 + 0 - 1 = 0$ e $-2 + 1 - 0 - 1 = -2 \neq 0$, e então o plano β pode ser definido por $x - y + z - 1 = 0$.

Resposta Correcta: (B)

7. Considere-se a progressão geométrica (a_n) de termo geral $a_n = 2^{3-n}, n \in \mathbb{N}$, tal que:

$$a_n = 2^{3-n} = \frac{2^3}{2^n} = 8\times\frac{1}{2^n} = 8\times\left(\frac{1}{2}\right)^n = 4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Esta é uma progressão geométrica de razão $r = \frac{1}{2}$, e que converge para 0 à medida que $n \to +\infty$, uma vez que $\left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$. Atendendo à soma de n termos de uma progressão geométrica de razão r, $S_n = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r-1}$, vem que:

$$S_\infty = a_1 \cdot \frac{(\frac{1}{2})^{+\infty} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = a_1 \cdot \frac{0-1}{(-\frac{1}{2})} = 2a_1 = 2\times 2^{3-1} = 8$$

Resposta Correcta: (A)

8. O número complexo $z_1 = 2 + i$ é raíz quarta de um número complexo w, assim como z_2, z_3 e z_4.

De raíz quarta para raíz quarta existe um incremento no argumento de $\frac{\pi}{2}$ radianos, equivalente a multiplicar a raíz imediatamente anterior por i. Sendo z_4 a raíz imediatamente a seguir a z_3 tem-se que $z_4 = z_3 \times i$, pelo que **I)** é verdadeira.

Sendo z_1 raíz quarta de w, tem-se que $|z_1| = \sqrt[4]{|w|}$, e então $|w| = |z_1|^4$, i.e, $|w| = (\sqrt{2^2 + 1^2})^4 = (\sqrt{5})^4 = 25$, pelo que **II)** é falsa.

O lado do quadrado representado na figura, l, é a hipotenusa de um triângulo rectângulo cujos vértices são a origem O e as imagens geométricas dos complexos z_1 e z_2, desta forma, pelo Teorema de Pitágoras, vem que $l = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{10}$, pelo que **III)** é falsa.

Resposta Correcta: (B)

FIM GRUPO I

1. Sabe-se que z_1 e z_2 são vértices consecutivos de um polígono regular, com centro na origem do referencial. Repare-se então que $|z_1| = |z_2|$, e sabendo que entre vértices consecutivos de um polígono regular de n lados com centro na origem do referencial a diferença entre os seus argumentos é $\frac{2\pi}{n}$, vem que:

$$\arg(z_2) - \arg(z_1) = \frac{2\pi}{n}$$

Determinemos então z_1 na forma trigonométrica, sendo que para tal será necessário calcular $|z_1|$ e $\arg(z_1)$:

$$|z_1| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$\arg(z_1) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{-2\sqrt{3}}\right) = \tan^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6},\ \arg(z_1) \in 2^{\text{o}}Q$$

Desta forma tem-se que $|z_2| = |z_1| = 4$, e sabendo que é imaginário puro tal que $\pi < \arg(z_2) < 2\pi$, tem-se que

$$z_2 = 4e^{i\,\frac{3\pi}{2}}$$

Resta determinar o valor de n:

$$\arg(z_2) - \arg(z_1) = \frac{2\pi}{n} \Leftrightarrow \frac{3\pi}{2} - \frac{5\pi}{6} = \frac{2\pi}{n} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{n} \Leftrightarrow n = 3$$

2. Considere-se uma caixa contém seis bolas numeradas de 0 a 5, indistinguíveis ao tato.

2.1. Retiram-se, sucessivamente, ao acaso e sem reposição, duas bolas da caixa, registando a soma dos números das bolas saídas. Pretende-se calcular a probabilidade p de não sair a bola 2, quando a soma dos números é ímpar. Sabe-se que a soma de dois números é ímpar se e só se um dos números for par e outro for ímpar, pelo que a probabilidade pedida pode ser obtida não tendo em conta a bola 2 na contagem das bolas pares. Existem 3 bolas pares $(0,2,4)$ e 3 bolas ímpares $(1,3,5)$ que contaremos para os casos possíveis (sabe-se que o produto é ímpar), contudo, para os casos favoráveis contaremos apenas 2 bolas pares $(0,4)$, uma vez que a bola 2 não pode sair.

$$p = \frac{{}^3C_1 \times {}^2C_1}{{}^3C_1 \times {}^3C_1} = \frac{2}{3}$$

2.2. Considere-se agora a seguinte experiência aleatória que se repetirá 5 vezes: retiram-se, simultaneamente e ao acaso, duas bolas do saco, multiplicam-se os números e colocam-se novamente as bolas no saco.

Seja X a variável aleatória que representa o número de vezes em que o produto obtido é nulo.

Pretende-se calcular $P(X \leq 1)$, isto é, a probabilidade de se verificar no máximo 1 produto nulo nas 5 repetições da experiência aleatória. Considerando p_{pn} como a probabilidade de numa experiência aleatória o produto das bolas retiradas ser nulo, tem-se através da distruibuição binomial:

$$P(X \leq 1) = {}^5C_0 \times (p_{\text{pn}})^0 \times (1 - p_{\text{pn}})^5 + {}^5C_1 \times (p_{\text{pn}})^1 \times (1 - p_{\text{pn}})^4$$

Calcule-se então p_{pn}, tendo em conta que o produto é nulo se entre as bolas retiradas existir uma bola com o número 0:

$$p_{\text{pn}} = \frac{{}^1C_1 \times {}^5C_1}{{}^6C_2} = \frac{1}{3}$$

E então determina-se o valor de $P(X \leq 1)$:

$$P(X \leq 1) = {}^5C_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^0 \times \left(\frac{2}{3}\right)^5 + {}^5C_1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 \approx 0{,}46$$

3. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{xe^x - ex}{x-1} & \text{se } x < 1 \\ \dfrac{\ln(2x)}{x} + x - 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

3.1. Averigue-se se existe $\lim_{x \to 1} f(x)$, sendo que para tal se deve verificar que: $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$.

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = \frac{\ln(2 \times 1)}{1} + 1 - 1 = \ln 2$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{xe^x - ex}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} x \cdot \frac{e^x - e}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} x \times e \lim_{x \to 1^-} \frac{e^{x-1} - 1}{x-1} = 1 \times e \underbrace{\lim_{x-1 \to 0^-} \frac{e^{x-1} - 1}{x-1}}_{\text{Limite Notável}=1} = e$$

Verifica-se então que não existe limite $\lim_{x \to 1} f(x)$, uma vez que $\ln 2 \neq e$.

3.2. Estude-se a função f quanto a existência de assíntotas não verticais do seu gráfico.

Determine-se, primeiramente, a assíntota horizontal do gráfico de f quando $x \to -\infty$, sendo para tal necessário calcular $\lim_{x \to -\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{xe^x - ex}{x-1} = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x}{x-1} \cdot (e^x - e) \right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x-1} \times \lim_{x \to -\infty} (e^x - e)$$
$$= 1 \times (e^{-\infty} - e) = 0 - e = -e$$

Conclui-se que $y = -e$ é assíntota horizontal do gráfico de f quando $x \to -\infty$.

Determinemos agora a assíntota não vertical do gráfico de f quando $x \to +\infty$. Essa assíntota será uma reta de equação $y = mx + b$, em que $m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ e $b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx)$. Calculemos então m e b:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\ln(2x)}{x} + x - 1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln(2x)}{x} \times \frac{1}{x} \right) + 1 - \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 2 \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln(2x)}{2x} \times \frac{1}{x} \right) + 1 - \frac{1}{+\infty}$$
$$= 2 \times 0 \times \frac{1}{+\infty} + 1 - 0 = 1$$

visto que $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(2x)}{2x} = 0$, através do limite notável.

$$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln(2x)}{x} + x - 1 - x \right) = 2 \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(2x)}{2x} - 1 = 2 \times 0 - 1 = -1$$

visto que $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(2x)}{2x} = 0$, através do limite notável.

A reta de equação $y = x - 1$ é assíntota oblíqua do gráfico de f quando $x \to +\infty$.

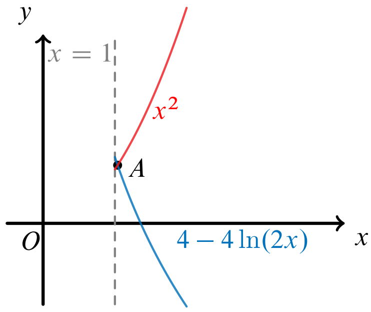
3.3. Para um dado valor $a > 1$, sabe-se que a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a tem equação reduzida $y = \frac{5}{4}x + b$, em que b designa um número real, pelo que se conclui que para esse ponto de abcissa a tem-se $f'(a) = \frac{5}{4}$, pelo que se deve determinar f' para $x > 1$, vindo então:

$$f'(x) = \left(\frac{\ln(2x)}{x} + x - 1 \right)' = \frac{(\ln(2x))' \times x - (x)' \times \ln(2x)}{x^2} + (x)' - (1)' = \frac{\frac{2}{2x} \times x - \ln(2x)}{x^2} + 1 - 0 =$$

Vindo que $f'(x) = \dfrac{1 - \ln(2x)}{x^2} + 1$, e tem-se que determinar o valor de x solução da equação:

$$\frac{1 - \ln(2x)}{x^2} + 1 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow 1 - \ln(2x) = \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow 4 - 4\ln(2x) = x^2$$

Na figura ao lado está representado parte dos gráficos de x^2, a vermelho, e de $4 - 4\ln(2x)$, a azul, e a reta $x = 1$. O ponto A é então o ponto cuja abcissa é a solução do problema, uma vez que é a intersecção do gráfico de x^2 com a reta de equação $4 - 4\ln(2x)$, vindo então $a \approx 1{,}04$.



4. Seja g uma função cuja derivada g', de domínio $\mathbb{R}$, é dada por $g'(x) = \sin x\,(1 - \cos x)$.

4.1. Para um dado valor de $x \in \left]-\frac{\pi}{2},0\right[$, tem-se que $\tan x = -2\sqrt{2}$, sendo que para esse ângulo x, deve-se determinar $g'(x)$. Para tal tenhamos em conta que $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ e $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1 + (2\sqrt{2})^2} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \cos x = \pm\frac{1}{3} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{3}, x \in 4^{o}Q$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Leftrightarrow \sin x = \pm\sqrt{\frac{8}{9}} \Leftrightarrow \sin x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}, x \in 4^{o}Q$$

Repare-se que $\cos x > 0$ e $\sin x < 0$, no quarto quadrante, isto é para $x \in \left]-\frac{\pi}{2},0\right[$.

Desta forma vem que:

$$g'(x) = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

4.2. Estude-se o gráfico da função g quanto ao sentido das concavidades e quanto à existência de pontos de inflexão em $[0,\pi[$. É para tal necessário determinar a segunda derivada de g, g'', definida em $[0,\pi[$, vindo então:

$$g''(x) = (\sin x\,(1 - \cos x))' = (\sin x)'(1 - \cos x) + \sin x(1 - \cos x)' = \cos x(1 - \cos x) + \sin x\,(0 - (-\sin x))$$

$$g''(x) = \cos x - \cos^2 x + \sin^2 x = \cos x - \cos^2 x + 1 - \cos^2 x = -2\cos^2 x + \cos x + 1$$

De forma a determinar o pedido devem-se calcular os zeros de g'', sendo que para tal usemos a mudança de variável $y = \cos x$, tal que a equação $-2\cos^2 x + \cos x + 1 = 0$ se torna $-2y^2 + y + 1 = 0$, cujas soluções são $y = -\dfrac{1}{2}$ ou $y = 1$, equivalente a escrever:

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \vee \cos x = 1 \Leftrightarrow x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \vee x = \pi + \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \vee x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Vindo então:

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \vee x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \vee x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Sendo que como estamos a estudar o sentido das concavidades e quanto à existência de pontos de inflexão em $[0,\pi[$, vem que $g''(x) = 0$ em $x = 0$, $x = \dfrac{2\pi}{3}$. Através de uma tabela de sinais vem que:

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$g''(x)$	0	+	0	−	ND
$g(x)$		$\cup$	P.I	$\cap$	ND

Conclui-se então que:

- g tem concavidade virada para cima em $\left[0, \dfrac{2\pi}{3}\right[$;
- g tem concavidade virada para baixo em $\left]\dfrac{2\pi}{3}, \pi\right[$;
- g tem um ponto de inflexão para $x = \dfrac{2\pi}{3}$.

5. Considere-se, num referencial $Oxyz$, o ponto $A(1,1,1)$ e o plano α de equação $x + y - 2z = 4$.

5.1. Sabe-se que o ponto B pertencente ao plano xOy, ao plano $x = 2$ e ao plano α, logo as coordenadas de B são $(2, y_B, 0)$, e como o ponto B pertence a α vem que $2 + y_B - 2 \times 0 = 4 \Leftrightarrow y_B = 2$, vindo então que as coordenadas do ponto B são $(2,2,0)$.

Sabe-se que o ponto C pertence à reta de equação $x = 2 \wedge z = 1$ e ao plano α, logo as coordenadas de C são $(2, y_C, 1)$, e como o ponto C pertence ao plano α vem que $2 + y_C - 2 \times 1 = 4 \Leftrightarrow y_C = 4$, vindo então que as coordenadas do ponto C são $(2,4,1)$.

Pretende-se calcular a amplitude de CAB, que considerei α daqui em diante, pelo que se tem:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AC}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$$

E tem-se que $\overrightarrow{AC} = C - A = (2,4,1) - (1,1,1) = (1,3,0)$, tal que $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{10}$, e ainda $\overrightarrow{AB} = B - A = (2,2,0) - (1,1,1) = (1,1,-1)$, tal que $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$, pelo que vem:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AC}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AB}\right\|} = \frac{(1,3,0) \cdot (1,1,-1)}{\sqrt{10} \times \sqrt{3}} = \frac{1 \times 1 + 3 \times 1 + 0 \times (-1)}{\sqrt{30}} = \frac{4}{\sqrt{30}}$$

E portanto $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{30}}\right) = 0{,}75$ radianos.

5.2. Considere-se a superfície esférica S de equação $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 6$. Vem trivialmente que o centro é o ponto de coordenadas $(1,1,1)$, isto é, o ponto A e o raio é tal que $r^2 = 6$, logo $r = \sqrt{6}$.

Uma superfície esférica tangente a um plano é tal que o raio tem a mesma direcção do vetor normal ao plano, sendo que o ponto de tangência corresponde à intersecção do plano ao qual a superfície é tangente com a reta perpendicular ao plano e que passa pelo centro da superfície esférica.

A reta que passa pelo centro da superfície esférica S e é perpendicular a α é a reta cuja equação cartesiana pode ser $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2}$, logo pode-se concluir que:

$$x - 1 = y - 1 \wedge x - 1 = \frac{z-1}{-2} \Leftrightarrow x = y \wedge z = -2x + 3$$

O ponto de tangência é o ponto que corresponde à solução do sistema de equações:

$$\begin{cases} x = y \\ z = -2x + 3 \\ x + y - 2z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = -2x + 3 \\ x + x - 2 \times (-2x + 3) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = -2x + 3 \\ 2x + 4x - 6 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{5}{3} \\ z = -\frac{1}{3} \\ x = \frac{5}{3} \end{cases}$$

E repare-se que o ponto de tangência de coordenadas $\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ pertencerá à superfície esférica se e só se $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 6$, contudo:

$$\left(\frac{5}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{5}{3} - 1\right)^2 + \left(-\frac{1}{3} - 1\right)^2 = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{16}{9} = \frac{24}{9} \neq 6$$

Conclui-se então que S não é tangente a α.

Método Alternativo: Outro método seria perceber que o vetor diretor da reta que contém o centro e é perpendicular a α é $(1,1,-2)$ tal que a norma deste é $\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6} = r$. Repare então que, sendo R um ponto que pertence à superfície esférica e com a direcção da reta acima referida, então $R = (1,1,1) \pm (1,1,-2)$, isto é $R = (2,2,-1)$ ou $R = (0,0,3)$ e nenhum destes pontos pertence a α, pelo que não S não é tangente a α.

6. Considere-se uma função f, de domínio $\mathbb{R}$.

Sabe-se que $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-2x+1\big)=0$, logo f admite uma assíntota oblíqua quando $x\to+\infty$ de equação $y=2x-1$, pelo que a afirmação **I)** é falsa.

Sabe-se que $f(0)=0$ e que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$, e tendo em conta que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=1$, tem-se que o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0 é 1, pelo que esta reta será paralela à reta de equação $y=x-4$, pois têm o mesmo declive. Desta forma, **II)** é verdadeira.

Sabe-se que a primeira derivada de f, f', é sempre positiva em $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, e que $f'(1)=0$, o que permite concluir que f' não muda o seu sinal em $x=1$, uma vez que para $x<1$, $f'(x)>0$ e para $x>1$, $f'(x)>0$, pelo que se conclui que f não admite um extremo relativo no seu gráfico em $x=1$. Desta forma, **III)** é falsa.

FIM GRUPO II