Prova Modelo de Exame Nacional

Matemática A

12º Ano de Escolaridade – Junho de 2017

Duração da Prova: 15 0 minutos. Tolerância: 30 minutos.

NUNO MIGUEL GUERREIRO – SINAL +

Ano Letivo de 2016/2017

Página em branco

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ($k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u'$ $(n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a$ $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ $(n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x + 1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ $(p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, seleccione a única opção correcta.

Escreva, na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção seleccionada.

1. Seja Ω, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$)

Sabe-se que:

- $P(A \cap B) = 0{,}2$
- $P(\overline{A}|B) = 0{,}5$

Qual é o valor de $P(\overline{B})$?

(A) $0{,}3$ **(B)** $0{,}4$ **(C)** $0{,}5$ **(D)** $0{,}6$

2. Considere a linha n do triângulo de Pascal em que a diferença entre o terceiro e penúltimo elemento é 27

Qual a soma de todos os elementos da linha seguinte?

(A) 256 **(B)** 512 **(C)** 1024 **(D)** 2048

3. Para certos valores de a, b ($a > 1$ e $b > 1$), tem-se $\log_a b = 2$

Qual é, para esses valores de a e de b, o valor de $\log_{\sqrt{ab}} a$?

(A) $\frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{2}{3}$ **(C)** $\frac{3}{2}$ **(D)** 3

4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = 2x + \ln x$

Considere a sucessão de termo geral $u_n = \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$

Qual o valor de $\lim f(u_n)$?

(A) $-\infty$ **(B)** 0 **(C)** 2 **(D)** $+\infty$

5. Considere a função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x + \cos(x+3)$

Qual o valor de $\lim_{x \to -3} \dfrac{f'(x) - 1}{x^2 + 8x + 15}$?

(A) -1 **(B)** $-\dfrac{1}{2}$ **(C)** $\dfrac{1}{2}$ **(D)** 2

6. Considere, num referencial o.n xOy, o triângulo $[ABC]$ representado na figura 1

Sabe-se que:

- A e B pertencem à reta de equação $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$
- $\overline{DC} = 2$
- $\overline{AC} = 3\overline{AD}$

Qual é o valor de $\overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\right)$?

(A) $\dfrac{19}{4}$ **(B)** 5 **(C)** 7 **(D)** 10

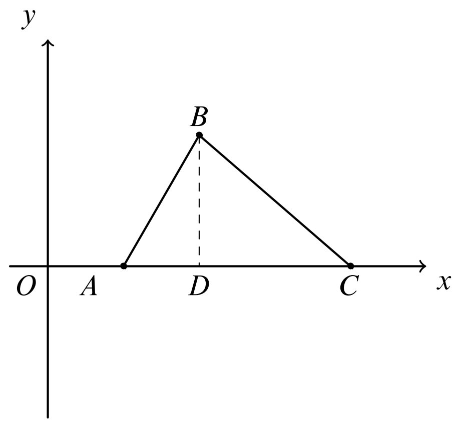

Figura 1

7. Seja θ um número real pertencente ao intervalo $\left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$

Considere o número complexo $\overline{w} = -2ie^{i\theta}$

A que quadrante pertence a imagem geométrico do complexo w?

(A) Primeiro **(B)** Segundo **(C)** Terceiro **(D)** Quarto

8. Seja a um número real positivo.

Considere a sucessão (u_n) definida por

$$\begin{cases} u_1 = 4a \\ u_{n+1} - u_n = 2a^2 \end{cases}$$

Sabendo que $u_6 = 102$, qual é o valor de a?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5

GRUPO II

Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: Quando, para um resulado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$$w = \frac{4\,e^{i\frac{7\pi}{6}} + 8i}{-4i^{4n+239}}$$

Sejam a e b duas constantes reais.

Determine a e b, de forma a que w seja solução da equação $z^4 + az^2 = b$

2. Considere uma turma de 20 alunos, em que existem 10 raparigas, entre as quais estão a Joana e a Inês, e 10 rapazes.

2.1. Vai ser formada uma comissão de 5 alunos, em que o número de raparigas deve ser **superior** ao número de rapazes.

Qual a probabilidade de, escolhendo aleatoriamente uma comissão, esta ser constituída pela Joana e a Inês simultaneamente?

2.2. Uma das salas onde a turma tem aulas tem 5 filas com 5 mesas individuais cada.

Sabe-se que:

- a primeira fila deve ser ocupada apenas por raparigas;
- a segunda fila deve ser ocupada apenas por rapazes;
- a última fila tem apenas uma pessoa que é um rapaz.

De quantas formas diferentes podem os alunos da turma se dispor nesta sala?

3. Considere, num referencial o.n $Oxyz$, o plano α definido por $x + 2y + z = 15$, que contém o ponto A, e a reta AB definida pela equação $(x,y,z) = (1,2,1) + k(2,3,1), k \in \mathbb{R}$

3.1. Sabendo que o ponto B pertence ao plano xOy, determine a equação cartesiana de uma reta perpendicular ao plano α e que passa em B

3.2. Sabendo que o ponto M de coordenadas $(2,1,1)$ é ponto médio do segmento $[AC]$, determine as coordenadas do ponto C

4. O controlo de altitude devido ao efeito da propulsão é bastante comum num projeto de drone.

Após aplicação da teoria de controlo, concluiu-se que o acréscimo de altitude do drone devido ao efeito da propulsão, em metros, é dado, t segundos após o início do voo ($t > 0$), para um **primeiro controlador** é dado por:

$$h(t) = e^{-8t}(8t-1)+1$$

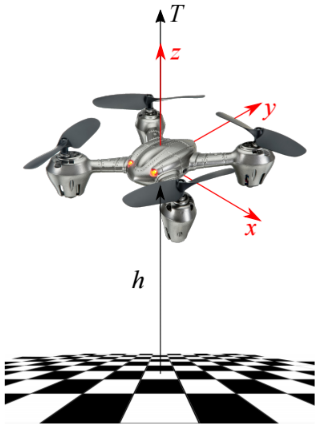

Figura 2

4.1. Determine $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t)$, e interprete o valor no contexto do problema.

4.2. Outro parâmetro importante num sistema de controlo é o sobreimpulso, $M_p^{\%}$, sendo que para calcular este é necessário determinar o acréscimo máximo de altura devido à propulsão, $h_{\max}$, de tal forma que:

$$M_p^{\%} = (h_{\max}-1)\times 100$$

Determine o valor do sobreimpulso, em percentagem, com arredondamento às décimas.

4.3. De forma a concluir o seu estudo, o engenheiro analisou o tempo de estabelecimento (critério de 2%), t_s, que diz respeito ao tempo total, desde o início do voo, que o sistema demora a atingir o valor de acréscimo de altura de $1.02\,\mathrm{m}$ após ter atingido a altura máxima

Foi criado mais um controlador (**controlador 2**) que levou ao acréscimo de altura, em metros, t segundos após o início do voo ($t > 0$), dado por:

$$h^*(t) = 1 - e^{-3t}\ \cos(2\sqrt{3}t)$$

O engenheiro escolheu para o projeto o controlador que leva ao menor tempo de estabelecimento.

Indique o controlador que o engenheiro escolheu, **recorrendo às capacidades gráficas da calculadora**.

Na sua resposta deve:

- determinar o tempo de estabelecimento, t_s^h, apresentando o valor com arredondamento às centésimas, de h (primeiro controlador)
- determinar o tempo de estabelecimento, $t_s^{h^*}$, apresentando o valor com arredondamento às centésimas, de h^* (segundo controlador)
- concluir qual o controlador que o engenheiro escolheu.

5. Relativamente à Figura 3 sabe-se que:

- os pontos C e D pertencem à reta de equação $x = -1$
- α é a amplitude de um ângulo orientado cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta $\dot{O}A$
- $S(\alpha)$ é a área do retângulo $[ABCD]$, em função de α

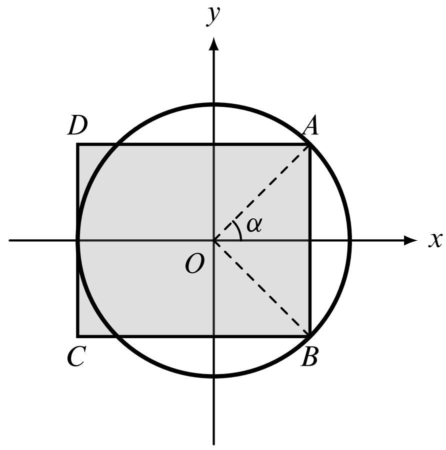

Figura 3

Admita que o ponto A desloca-se ao longo da semicircunferência, nunca coincidindo com D, e o ponto B acompanha o movimento do ponto A de forma a que AB seja sempre paralela ao eixo Oy

5.1. Mostre que $S(\alpha) = \sin(2\alpha) + 2\sin(\alpha),\ \alpha \in]0, \pi[$

5.2. Estude a função S quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Na sua resposta deve apresentar:

- o(s) intervalo(s) em que a função é crescente;
- o(s) intervalo(s) em que a função é decrescente;
- o(s) valor(es) de α para o(s) qual(is) a função tem extremos relativos, caso existam.

6. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x + 2}\right)$

6.1. Estude a função f quanto à existência de assíntotas horizontais do gráfico de f

6.2. Determine, justificando através de argumentos de continuidade e monotonia, o contradomínio de f

FIM

COTAÇÕES

Grupo	Item												
	Cotação (em pontos)												
I	1. a 8.												
	8 x 5 pontos												40
II	1	2.1	2.2	3.1	3.2	4.1	4.2	4.3	5.1	5.2	6.1	6.2	
	15	15	15	10	15	10	15	15	10	15	15	10	160
TOTAL													200