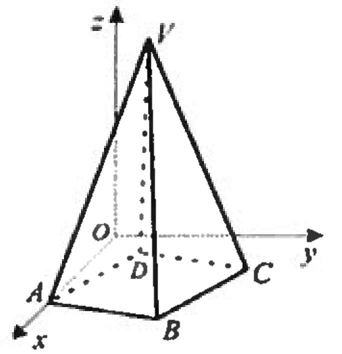
Preparação para o Exame Nacional 12º Ano

Ano letivo 2018 / 2019 **Maio e Junho de 2019**

Matemática A **Prova Modelo Nº 4**

1. Na figura está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$ cuja base está contida no plano xOy.



Escolhem-se, ao acaso, dois vértices dessa pirâmide.

Qual é a probabilidade de esses dois vértices definirem uma reta paralela ao plano de equação $z = -2$?

(A) $\frac{1}{5}$ **(B)** $\frac{3}{5}$

(C) $\frac{3}{10}$ **(D)** $\frac{7}{10}$

Adaptado do 1.º teste intermédio do 11.º ano de 2010

2. Segundo os números divulgados pela Secretaria Regional de Educação da RAM sobre o número de professores do ensino não superior no ano letivo de 2015/16, sabe-se que:

- $32{,}8\%$ deles tinham menos de 40 anos;
- de entre os professores com menos de 40 anos, $34{,}5\%$ eram professores do 3.º ciclo e secundário;
- de entre os professores com 40 ou mais anos, $51{,}8\%$ eram professores do 3.º ciclo e secundário.

Ao escolher, ao acaso, um professor desse estudo, qual é a probabilidade de ele ser do 3.º ciclo e secundário (na forma de dízima e arredondada às centésimas)?

(A) $0{,}18$ **(B)** $0{,}38$ **(C)** $0{,}46$ **(D)** $0{,}86$

3. Sejam $(E, \mathcal{P}(E), P)$ um espaço de probabilidades e $A, B \in \mathcal{P}(E)$ tais que:

- $P(A) = 0{,}1$;
- B e $\overline{B}$ são acontecimentos equiprováveis;
- $A \subset B$.

Qual é o valor de $P(A \mid (A \cup \overline{B}))$?

(A) $\frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{1}{5}$ **(D)** $\frac{1}{6}$

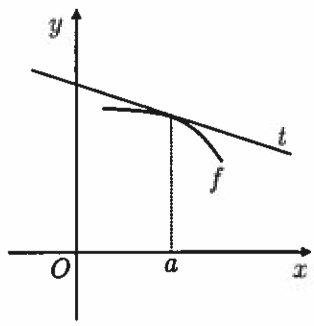
4. Considere as sucessões (a_n) e (b_n) tais que:

- $\lim a_n = -\infty$;
- $b_n \geq \frac{2n - a_n}{4}$ a partir da ordem 30.

Qual é o valor de $\lim b_n$?

(A) 0 **(B)** $-\infty$ **(C)** $+\infty$ **(D)** 30

5. No referencial o.n. xOy da figura estão representados:



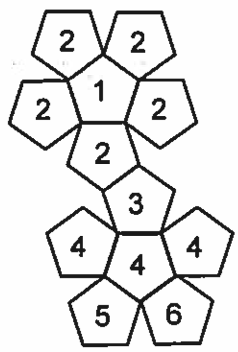
- parte do gráfico da função definida por $f(x) = k - x^3, k > 0$;
- a reta tangente num ponto $a > 0$ do seu domínio e de declive m.

Sabendo que $m = -a$, qual é o valor de a?

(A) $\frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{1}{4}$

(C) $\frac{1}{2}$ **(D)** 1

1. Ao lado está a planificação de um dado dodecaédrico equilibrado. Lança-se esse dado uma vez e observa-se a face que fica virada para cima.



Considere os acontecimentos:

A : «Sair face com um divisor de 4.»

B : «Sair face com um número primo.»

Verifique se os acontecimentos A e B são independentes.

2. **2.1.** Sejam $(E,\mathcal{P}(E),P)$ um espaço de probabilidades e $A,B \in \mathcal{P}(E)$ tais que:

- B é um acontecimento possível;
- $P(\overline{A}) = 2P(B)$.

Prove que

$$P(A \mid B) = \frac{P(\overline{A} \cup B)}{P(B)} - 2$$

2.2. A Jerónima tem vários CD de música. Ela sabe que:

- 70% dos CD são de música rock;
- 15% dos CD são de conjuntos portugueses;
- 6% dos CD não são de música rock mas são de conjuntos portugueses.

A Jerónima escolhe, ao acaso, um dos seus CD.

Qual é a probabilidade de ele ser:

2.2.1. de um conjunto português se não for de música rock?

2.2.2. de música rock se for de um conjunto português?

3. Considere duas caixas 1 e 2, ambas com bolas distinguíveis apenas pela cor e tais que:

- a caixa 1 tem sete bolas azuis, três vermelhas e duas brancas;
- a caixa 2 tem quatro bolas azuis e três vermelhas.

3.1. Retiram-se todas as bolas da caixa 1, uma a uma, e colocam-se em fila, pela ordem de saída.
Determine a probabilidade de as bolas de cada cor ficarem juntas.

3.2. Considere agora a seguinte experiência: *ao acaso, tiram-se quatro bolas da caixa 1 e colocam-se na caixa 2; em seguida, tiram-se simultaneamente quatro bolas da caixa 2.*

Sejam A e B os acontecimentos:

A: «As bolas retiradas da caixa 1 são de cores diferentes.»

B: «Apenas uma das bolas retiradas da caixa 2 tem cor vermelha.»

Determine o valor de $P(B \mid \overline{A})$, sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada.

Numa pequena composição, justifique a sua resposta.

A sua composição deve contemplar:

- o significado de $P(B \mid \overline{A})$, no contexto da situação descrita;
- a explicação do conteúdo da caixa 2 após a realização do acontecimento A;
- a explicação do número de casos possíveis;
- a explicação do número de casos favoráveis;
- a apresentação do valor da probabilidade pedida na forma de fração irredutível.

5. Considere as funções f e g de domínios, respetivamente, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, definidas por

$f(x) = 3 - 8x^3 - x^4$ e $g(x) = \frac{f(x)}{x-3}$.

Resolva os itens seguintes usando processos exclusivamente analíticos.

5.1. Estude a função f quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.

Na sua resposta, deve apresentar:

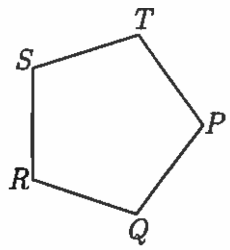
- o(s) intervalo(s) em que a função f é crescente;
- o(s) intervalo(s) em que a função f é decrescente;
- os valores de x para os quais a função f tem extremos relativos, caso existam.

5.2. Mostre que a equação $g(x) = 2$ é possível em $]0,1[$.

5.3. Calcule $\lim\limits_{x \to 3^+} \left[g(x) + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-3}\right) \right]$.

6. Resolva o item **6.1.** ou o item **6.2.**.

6.1. Considere o pentágono $[PQRST]$ da figura.



Considere ainda outros n pontos do pentágono (além dos vértices).

Escolhem-se, ao acaso, três pontos.

Sejam A e B os acontecimentos:

A : «Os três pontos escolhidos estão entre os $n+5$.»

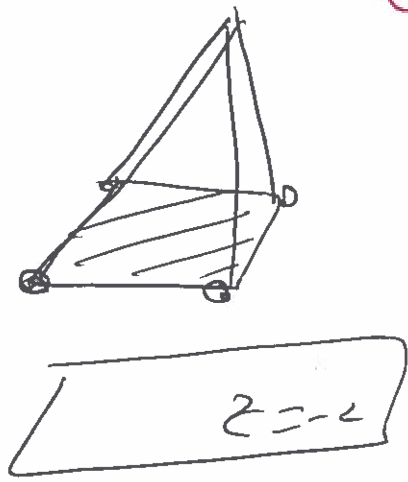
B : «O ponto P foi escolhido.»

Sabendo que $P(\bar{B} \mid A) = \frac{49}{50}$, determine, sem usar a calculadora, o valor de n.

6.2. Mostre que $\lim \left(\frac{2n+k}{3n}\right)^n = 0$, $k \in]0,1[$.

Prova 4

①



① nº c.p. $\,^{5}C_2$

nº c.f. $\,^{4}C_2$

Regra Laplace

$$P = \frac{\,^{4}C_2}{\,^{5}C_2} = \frac{3}{5}$$

— (B) —

② M: "Prof. c/ ⊖ de 40 anos"

S: "Prof. 3º ciclo e Sec"

P: "Prof."

$P(M) = 0,328$

$P(P \mid M) = 0,345 \Leftrightarrow P(P \cap M) = 0,345 \times 0,328 = (A)$

$P(P \mid \overline{M}) = 0,518 \Leftrightarrow P(P \cap \overline{M}) = 0,518 \times 0,328 = (B)$

2

	P	$\bar{P}$	
M	(A)		0,328
$\bar{M}$	(B)		0,672
			1

$$P(P) = (A) + (B)$$

3

$$\boxed{P(A) = 0{,}1}$$

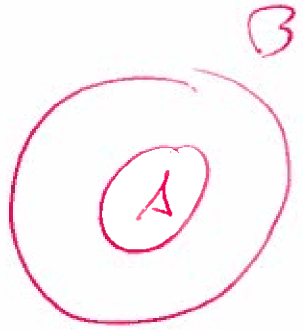
$$P(B) = P(\bar{B})$$

$$P(B) = 1 - P(B)$$

$$2P(B) = 1$$

$$\boxed{P(B) = \frac{1}{2}}$$

$$A \subset B$$



$$P(A \cap B) = P(A) = 0{,}1$$

$$P(A \cup B) = P(B) = 0{,}5$$

(3)

$$P(A \mid (A \cup \bar{B}))$$

$$= \frac{P(A \cap (A \cup \bar{B}))}{P(A \cup \bar{B})}$$

$$= \frac{P((A \cap A) \cup (A \cap \bar{B}))}{P(A \cup \bar{B})}$$

$$= \frac{P(A) + \cancel{P(A \cap \bar{B})} - \cancel{P(A \cap A \cap \bar{B})}}{P(A) + P(\bar{B}) - P(A \cap \bar{B})}$$

$$= \frac{0{,}1}{0{,}1 + 0{,}5 - \left[\cancel{P(A) - P(A \cap B)}\right]}$$

$$= \frac{0{,}1}{0{,}6} = \frac{1}{6}$$

(D)

④ $\lim a_n = -\infty$ ④

$$s_n \geq \frac{2n - a_n}{4}$$

$$\lim s_n \geq \lim \left(\frac{2n}{4} - \frac{a_n}{4}\right)$$

$$\lim s_n \geq +\infty - (-\infty)$$

$$\lim s_n \geq +\infty$$

(e)

⑤ $m_T = f'(a)$

$(k)' - (a^3)'$

$0 - 3a^2$

$m = -3a^2 = -a$

(A) $-3a^2 + a = 0$

$a(-3a+1) = 0 \Rightarrow \cancel{a \neq 0}$ $\quad \vee a = \frac{1}{3}$

Parte II

1 $\{1;\ 2,2,2,2,2;\ 3,\ 4,4,4,5,6\}$

$A = \{1, 2, 2, 2, 2, 2, 4, 4, 4\}$

$B = \{2, 2, 2, 2, 2, 3, 5\}$

$P(A) = \frac{9}{12}$

$P(B) = \frac{7}{12}$

$P(A \cap B) = \frac{5}{12}$

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$\frac{5}{12} = \frac{3}{4} \times \frac{7}{12}$

Ac. Indep

$\frac{5}{12} = \frac{21}{48}$ Falso

Non sont Independantes

2

$$P(\bar{A}) = 2P(B)$$

$$1 - P(A) = 2P(B)$$

$$\boxed{P(A) = 1 - 2P(B)}$$

2.1.

$$\frac{P(\bar{A} \cup B)}{P(B)} - 2$$

$$= \frac{P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A} \cap B) - 2P(B)}{P(B)}$$

$$= \frac{2\cancel{P(B)} + \cancel{P(B)} - \cancel{P(B)} + P(A \cap B) - 2\cancel{P(B)}}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= P(A|B)$$ ✓

2.2.

R: "música Rock"

P: "música Português"

$P(R) = 0{,}7$

$P(P) = 0{,}15$

$P(\overline{R} \cap P) = 0{,}06 \Leftrightarrow P(P) - P(R \cap P) = 0{,}06$

$P(R \cap P) = 0{,}09$

	R	$\overline{R}$	
P	0,09	0,06	0,15
$\overline{P}$	0,61	0,24	0,85
	0,7	0,3	1

2.2.1. $P(P \mid \overline{R}) = \dfrac{P(P \cap \overline{R})}{P(\overline{R})} = \dfrac{0{,}06}{0{,}3} = \dfrac{1}{5}$

2.2.2. $P(R \mid P) = \dfrac{P(R \cap P)}{P(P)} = \dfrac{0{,}09}{0{,}15} = \dfrac{3}{5}$

3

7 A
3 V
2 B

Cx 1

12 bolas

4 A
3 V

Cx 2

7 bolas

3.1. $12!$ ou $\dfrac{12!}{7!\,3!\,2!}$

$$P = \frac{(7! \times 3! \times 2!) \cdot 3!}{12!}$$

3.2.

$P(B \mid \bar{A})$

Se foram retirados do Cx 1, 4 bolas iguais então só podia retirar assim a Cx 2 bolas azuis, ficou c/

4+4 A
3 V

11 bolas

N.C.P. ${}^{11}C_4$

N.C.F. ${}^{3}C_1 \times {}^{8}C_3$

$$P = \frac{{}^{3}C_1 \times {}^{8}C_3}{{}^{11}C_4}$$