1. 1. Numa caixa há 16 bolas numeradas de 1 a 16. As bolas com número ímpar são azuis. As bolas com número par, umas são vermelhas e as restantes são pretas.

1.1. As bolas azuis são colocadas, lado a lado, constituindo uma sequência numérica, com 8 termos. Quantas sequências diferentes é possível representar se os termos formados pelos números de dois algarismos ocuparem ordens consecutivas?

1.2. Da caixa, com as 16 bolas, ao acaso, são retiradas sucessivamente, sem reposição duas bolas.

Considera os acontecimentos: *A* : "a primeira bola extraída é azul" e *B*: "a segunda bola extraída é preta". Sabe-se que $P(B|A)=0,2$.

Determina o número de bolas vermelhas.

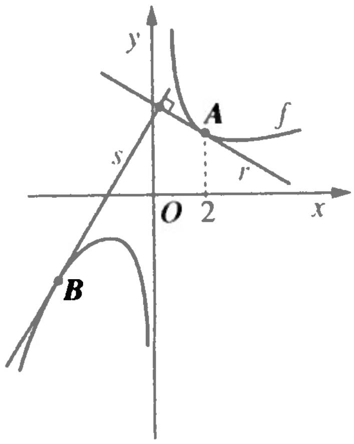
2. Oito amigos, entre eles o casal Silva, jantam num restaurante ocupando uma mesa com oito lugares. Quatro lugares ficam de um dos lados da mesa e os outros quatro ficam do lado oposto. De quantas maneiras diferentes é possível distribuir os oito lugares de modo que o casal Silva ocupe dois lugares opostos (frente a frente)?

(A) 2880 **(B)** 1440 **(C)** 5760 **(D)** 1152

3. No desenvolvimento de $\left(\sqrt{x}-x\right)^9$, pela fórmula do binómio de Newton, há um termo de grau 6. O coeficiente desse termo é:

(A) -84 **(B)** 126 **(C)** -36 **(D)** 36

4. Considera a função *f* definida por: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{x}+\ln\left(\dfrac{x}{2}\right) & \text{se} \quad x>0\\ \dfrac{e^{-x}}{2x} & \text{se} \quad x<0\end{cases}$



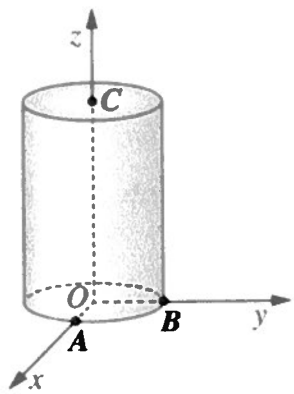
Na figura estão representados, em referencial o.n. *xOy*, as retas *r* e *s* e o gráfico de *f*. Sabe-se que:

- a reta *r* é tangente ao gráfico de *f* no ponto *A* de abcissa 2;
- a reta *s* é tangente ao gráfico de *f* no ponto *B* de abcissa negativa;
- as retas *r* e *s* são perpendiculares.

Determina a abcissa do ponto *B*, arredondada às centésimas, percorrendo as seguintes etapas:

- por processos exclusivamente analíticos, determina:
  - na forma reduzida, uma equação da reta *r*; e uma expressão de $f'(x)$, para $x<0$;
- indica a equação cuja solução é a abcissa do ponto *B*;
- recorre às capacidades gráficas da calculadora e determina a abcissa de *B*, reproduzindo o gráfico ou gráficos de funções utilizadas, incluindo o referencial.

5. Na figura, em referencial o.n. *Oxyz*, está representado um cilindro reto.



Sabe-se que:

- os pontos *O* e *C* são os centros das bases do cilindro,

- a base de centro *O* está contida no plano *xOy*;

- os pontos *A* e *B* são as interseções da circunferência que limita a base de centro *O* com os semieixos positivos das abcissas e das ordenadas, respetivamente;

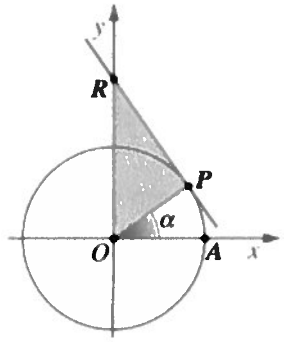
- o plano *ABC* é definido pela equação $8x+8y+3z-24=0$.

5.1. Seja *r* a reta que passa no ponto $D(1,-2,-1)$ e é perpendicular ao plano *ABC*.

Representa a reta *r* através de uma equação na forma vetorial.

5.2. Determina o volume do cilindro.

6. Na figura estão representados o círculo trigonométrico e um triângulo [*OPR*].Sabe-se que:



- o ponto *A* tem coordenadas $(1,0)$;
- o ponto *P* pertence à circunferência trigonométrica, sendo $A\hat{O}P=\alpha$, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$;
- a reta *PR* é tangente à circunferência trigonométrica no ponto *P*, sendo *R* o ponto de interseção dessa reta com *Oy*.

6.1. Seja *f* a função que $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ faz corresponder a área do triângulo [*POR*]. Mostra que:

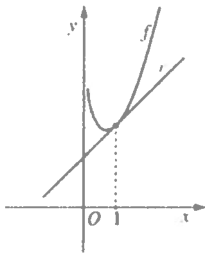
$$\forall \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad f(\alpha)=\frac{\cos\alpha}{2\sin\alpha}.$$

6.2. Resolve, em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, a equação $f(\alpha)=\frac{3}{2}\tan\alpha$.

6.3. Seja $]a,b[\subset \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e $k=f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Mostra que a equação $f(\alpha)=k$ tem uma e uma só solução.

7. Para cada número real k, considera a função *f* definida por:

$$f(x)=x^2-\ln(x)+k \quad ; k\in \mathbb{R}$$



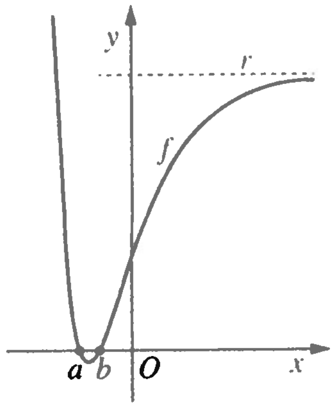
7.1. Na figura, em referencial o.n. xOy, estão representadas uma das funções *f* e uma reta *r* tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa 1. A reta *r* é definida pela equação $2x-2y+3=0$. O valor de *k* é:

(A) 2,5 **(B)** 3 **(C)** 3,5 **(D)** 1,5

7.2. Considera $k=2$ e a sucessão (u_n) de termo geral $u_n=\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$.Pode-se concluir que $\lim f((u_n))$ é igual a:

(A) e^4 **(B)** 0 **(C)** $+\infty$ **(D)** e^2+2

8. Seja *f* a função definida por: $f(x)=\mathrm{e}^{-2x}-\dfrac{5-6\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}}$



Na figura, em referencial cartesiano *xOy*, estão as representações gráficas da função *f* e de uma reta *r*. Sabe-se que:

- a reta *r* é assíntota horizontal do gráfico de *f*;
- os zeros da função *f* são representados por *a* e *b*;
- $\forall x \in \sim,\quad f'(x)=-2\mathrm{e}^{-2x}+5\mathrm{e}^{-x}$

8.1. Determina uma equação da reta *r*.

8.2. Estuda a função *f* quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

8.3. Mostra que $a+b=-\ln(6)$.

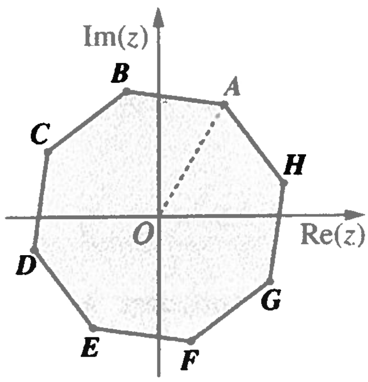
9. Considera as funções *f* e *g* definidas por: $f(x)=\mathrm{e}^{3x}-3x$ e $g(x)=\cos^2 x$.

9.1. Seja $h=f\circ g$. O valor de $h'(\pi)$ é igual a:

(A) $\dfrac{1}{4}$ **(B)** $\sqrt{\mathrm{e}}-3$ **(C)** $\dfrac{1}{2}$ **(D)** 0

9.2. Calcula $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

10. Na figura, no plano complexo, está representado um octógono regular [*ABCDEFGH*] de centro no ponto *O*. Sabe-se que o vértice *A* é a imagem geométrica do número complexo $z_A=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.



10.1. O vértice *C* é o simétrico do vértice *A* em relação a um eixo *r*.
O eixo *r* é definido pela condição:

(A) $\left|z-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right|=\left|z+1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right|$ **(B)** $\left|z-1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right|=\left|z+\sqrt{3}-\mathrm{i}\right|$

(C) $\left|z-\sqrt{3}+\mathrm{i}\right|=\left|z+1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right|$ **(D)** $\left|z+\sqrt{3}-\mathrm{i}\right|=\left|z-\sqrt{3}-\mathrm{i}\right|$

11.2. Sejam z_B e z_H os números complexos que têm imagens geométricas, respetivamente, os pontos *B* e *H*.

11.2.1. Representa z_B na forma trigonométrica.

11.2.2. Mostra que $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$ é a representação de z_H na forma algébrica.

12. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considera a condição

$$z.\overline{z}+4\operatorname{Re}(z)=2\operatorname{Im}(z)$$

No plano complexo, a condição dada corresponde ao mesmo conjunto de pontos definido pela condição $|z-z_0|=r$, com $r\in\mathbb{R}^{+}$. Determina z_0 e r.

Prova Modelo 17

① 16 bolas ≠

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 → 8 azuis

2	4	6
8	10	12
14	16	

mV

8-mP

1.1. 8!

$\boxed{11 \quad 13 \quad 15}$ ○ ○ ○ ○ ○

1 ??? ×

6!

ou 2

11 13 15

e

15 13 11

ou 3! (se estão [illegible])

1.2.

$$\cancel{\frac{\text{Azul}}{10}} \times \frac{\text{Pretas}}{15}$$

$$P(B \mid A) = 0{,}2$$

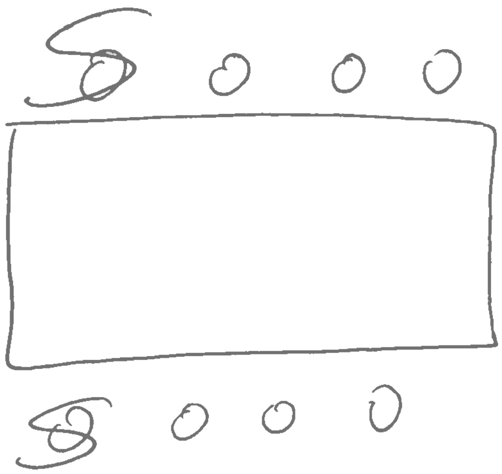
$$= \frac{8-n}{15}_{(10)} = \frac{2}{10}_{(15)}$$

$$80 - 10n = 30$$

$$10n = 50$$

$$\boxed{n = 5}$$ Vermelhas e $\boxed{3 \text{ Pretas}}$

2 SH, SM, 6 amigos



$8!$

$4 \times 2! \times 6!$

$= 8 \times 720 = 5760$

(c)

3 $(a+b)^n$

$T_{p+1} = {}^nC_p \times a^{n-p} \times b^p$

$$(\sqrt{a} - a)^{9}$$

$$T_{p+1} = \boxed{K}\, a^{6}$$

??!!

$$^{9}C_{p} \left(\sqrt{a}\right)^{9-p} \times (-a)^{p}$$

$$^{9}C_{p} \times a^{\frac{9-p}{2}} \times (-1)^{p} \times a^{p}$$

$$\frac{9-p}{2} + p$$

$$^{9}C_{p} \times (-1)^{p} \times a$$

$$\boxed{^{9}C_{3} \times (-1)^{3}} \times a^{6}$$

$$-84\, a^{6} \quad \text{— (A) —}$$

$$\frac{9-p}{2} + p = 6$$

$$9 - p + 2p = 12$$

$$\underline{\underline{p = 3}}$$

4° Termo

4

- $x = 2 \longrightarrow f(2) = \frac{4}{2} + \ln\left(\frac{2}{2}\right)$

$= 2$

$A(2,2)$

$m_T = f'(2)$

$= -\frac{4}{4} + \frac{1}{2}$

$= -1 + \frac{1}{2}$

$= -\frac{1}{2}$

$\left(\frac{4}{x}\right)' + \left[\ln\left(\frac{x}{2}\right)\right]'$

$= \frac{0 - 1 \times 4}{x^2} + \frac{\frac{1}{\cancel{2}}}{\frac{x}{\cancel{2}}}$

$= -\frac{4}{x^2} + \frac{1}{x}$

$\underline{\underline{T}}$: $y = -\frac{1}{2}x + b$

$A(2,2)$

$2 = -1 + b$

$b = 3$

$\boxed{y = -\frac{1}{2}x + 3}$

6

$$m_s = f'(b) \;;\; b < 0$$

$$r \perp s$$

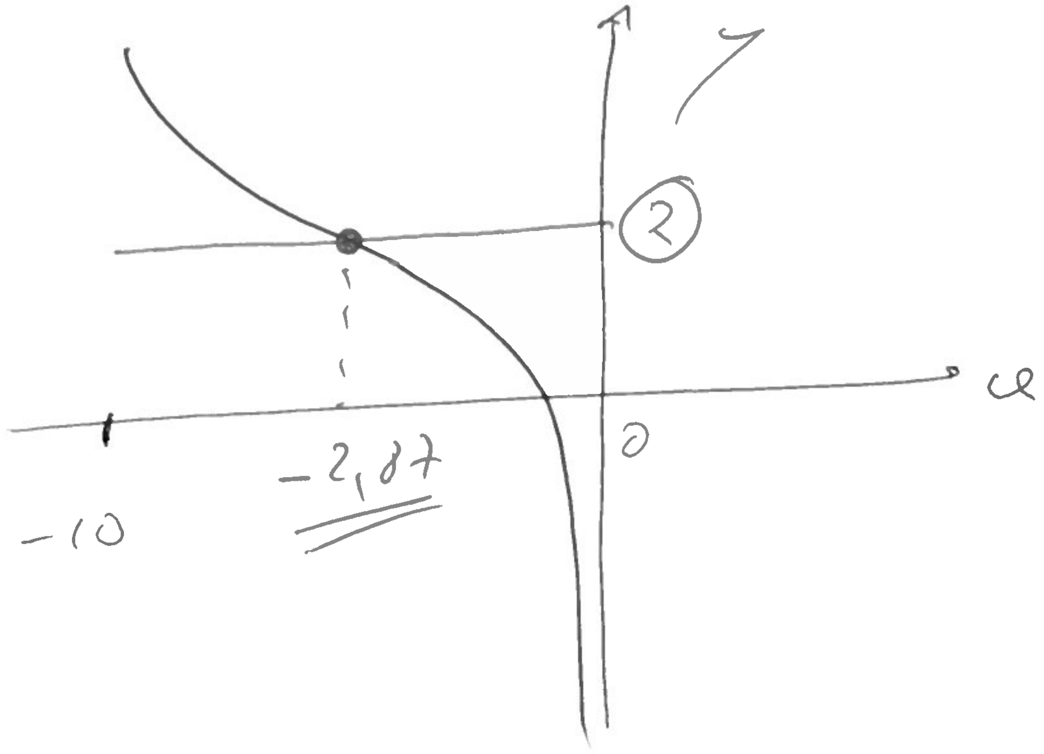
$$m_s = \frac{-1}{m_r}$$

$$f'(b) = \frac{-1}{-\frac{1}{2}}$$

$$\cancel{\frac{4}{a^2} + \frac{1}{a} = 2}$$

$$\left(\frac{e^{-a}}{2a}\right)' = \frac{-1e^{-a}(2a) - 2e^{-a}}{(2a)^2} = \frac{e^{-a}(-2a-2)}{4a^2}$$

$$\underbrace{\frac{e^{-a}(-2a-2)}{4a^2}}_{y_1} = \underbrace{2}_{y_2}$$



$x_{mín} = -5$

$x_{máx} = 0$

$y_{mín} = -10$

$y_{máx} = +10$

$$\boxed{x_B = -2,87}$$

5

ABC : $8x + 8y + 3z - 24 = 0$

$A(x, 0, 0)$

$8x - 24 = 0$

$x = 3$

$A(3, 0, 0)$

$B(0, y, 0)$

$8y - 24 = 0$

$y = 3$

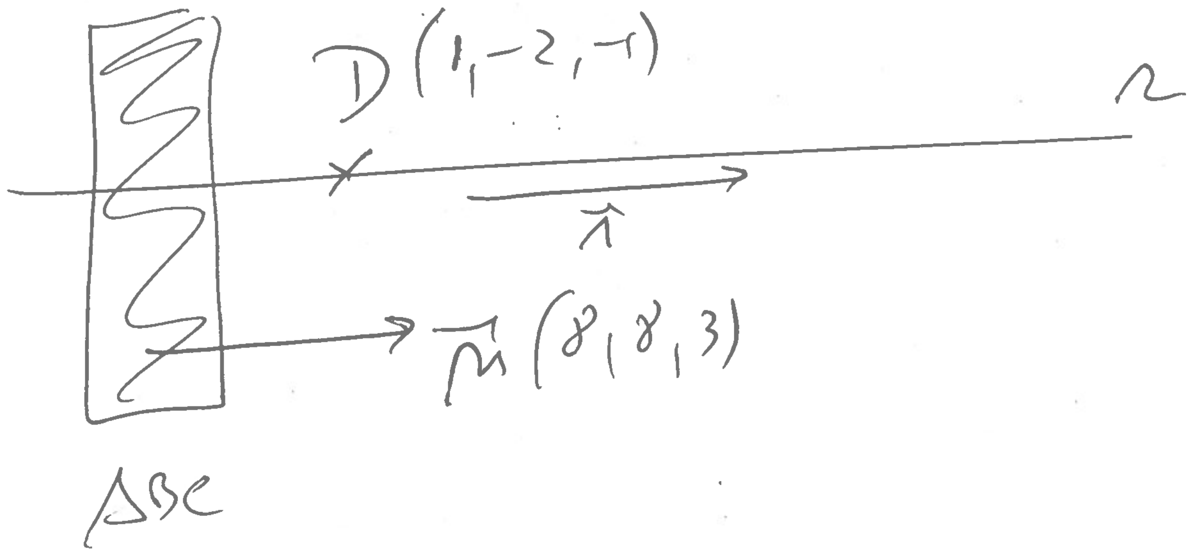
$B(0, 3, 0)$

$C(0,0,z)$ $\quad 3z - 24 = 0$

$$z = 8$$

$$C(0,0,8)$$

5.1.



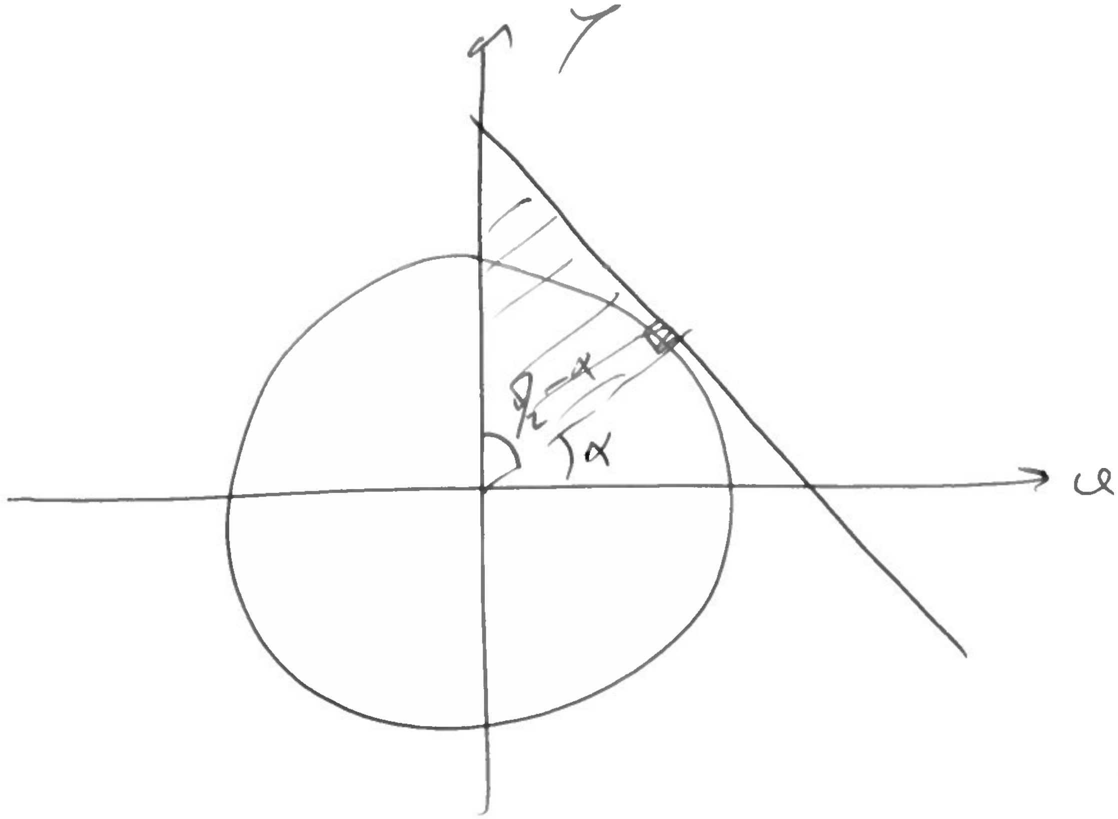
$$(x,y,z) = (1,-2,-1) + k(8,8,3);\ k \in \mathbb{R}$$

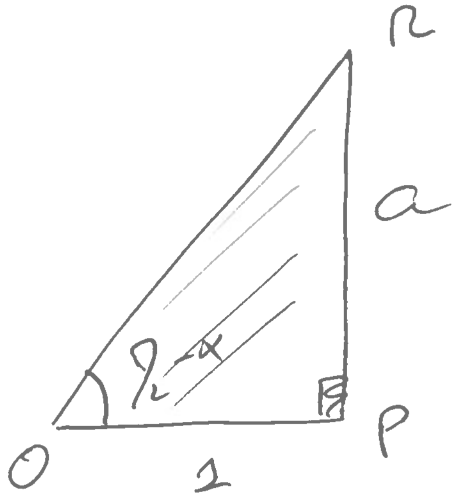
5.2. $V = \pi R^2 \times a$

$$= \pi \times 3^2 \times 8$$

$$= 72\pi \quad \text{u.v.}$$

6





$$A = \frac{1 \times a}{2}$$

$$A(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{2\sin(\alpha)}$$

✓

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{a}{1}$$

$$\frac{\sin\left(\overset{a}{\frac{\pi}{2}}-\overset{b}{\alpha}\right)}{\cos\left(\underset{a}{\frac{\pi}{2}}-\underset{b}{\alpha}\right)} = a$$

$$a = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

10

6.2. em $]0, \pi/2[$

$$f(x) = \frac{3}{2} \operatorname{Tg}(x)$$

$$\frac{\cos(x)}{2 \sin(x)}_{(c)} = \frac{3 \sin(x)}{2 \cos(x)}_{(s)}$$

$$1 \cos^2(x) = 3 \sin^2(x)$$

$$\frac{1}{3} = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}$$

$$\operatorname{Tg}^2(x) = \frac{1}{3}$$

$$\operatorname{Tg}(x) = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{Tg}(\alpha) = \operatorname{Tg}(\pi/6) \quad \vee \quad \operatorname{Tg}(\alpha) = -\operatorname{Tg}(\pi/6)$$

11

$$]0, \pi/2[$$

$$\boxed{\alpha = \pi/6}$$

<u>6.3.</u> $\nabla. B \quad + \quad f'$

$$f(\alpha) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\underbrace{\frac{\cos(\alpha)}{2\operatorname{Sen}(\alpha)} - \frac{\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)}{2\operatorname{Sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)}} = 0$$

$$h(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{2\operatorname{Sen}(\alpha)} - \frac{\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)}{2\operatorname{Sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

(12)

1° h é contínua em $[a, b]$
logo é possível aplicar o T.B.

2° $h(a) = \dots \quad < 0$

$h(b) = \dots \quad > 0$

3° Como $h(a) \times h(b) < 0$, pelo
T.B. é possível afirmar que

$\exists\, c \in]a, b[: h(c) = 0$

$\underline{\underline{f(x) = k}}$

<u>Agora</u> $h'(x) = \dots$

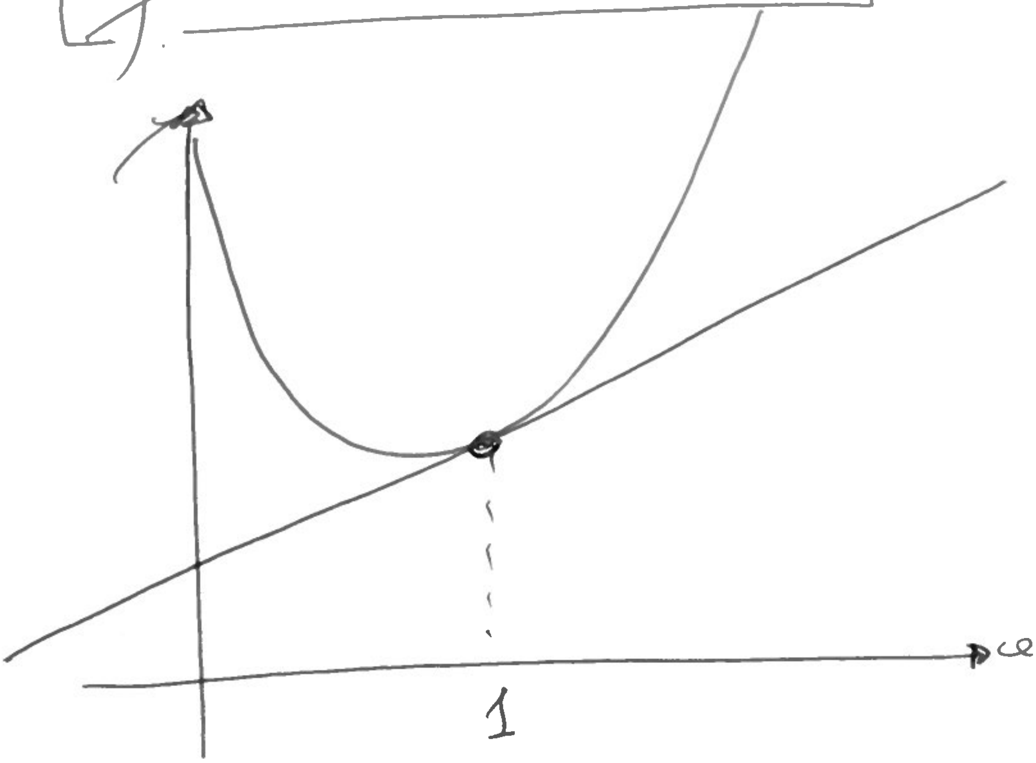
$h'(x) = 0$

x	a		b
h'		$+$	
h		$\nearrow$	

só tem 1 solução

7.

$$\boxed{f(x) = x^2 - \ln(x) + k}$$



$R:\quad 2x - 2y + 3 = 0$

$$\boxed{y = 1x + \frac{3}{2}}$$

$$f'(1) = m_{Tg} = 1$$

$$(x^2)' - (\ln x)' + (k)' = 1$$

$$2x - \frac{1}{x} + 0 = 1$$

$$1 = 1$$

(14)

$$f(1) = 1 + \frac{3}{2}$$

$$\cancel{1}^2 - \ln(1) + K = \cancel{1} + 3/2$$

$$\boxed{K = \frac{3}{2}}$$

(D)

7.2. Heine

$$\lim u_n = \lim \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n} \quad \text{Nefer}$$

$$= e^2$$

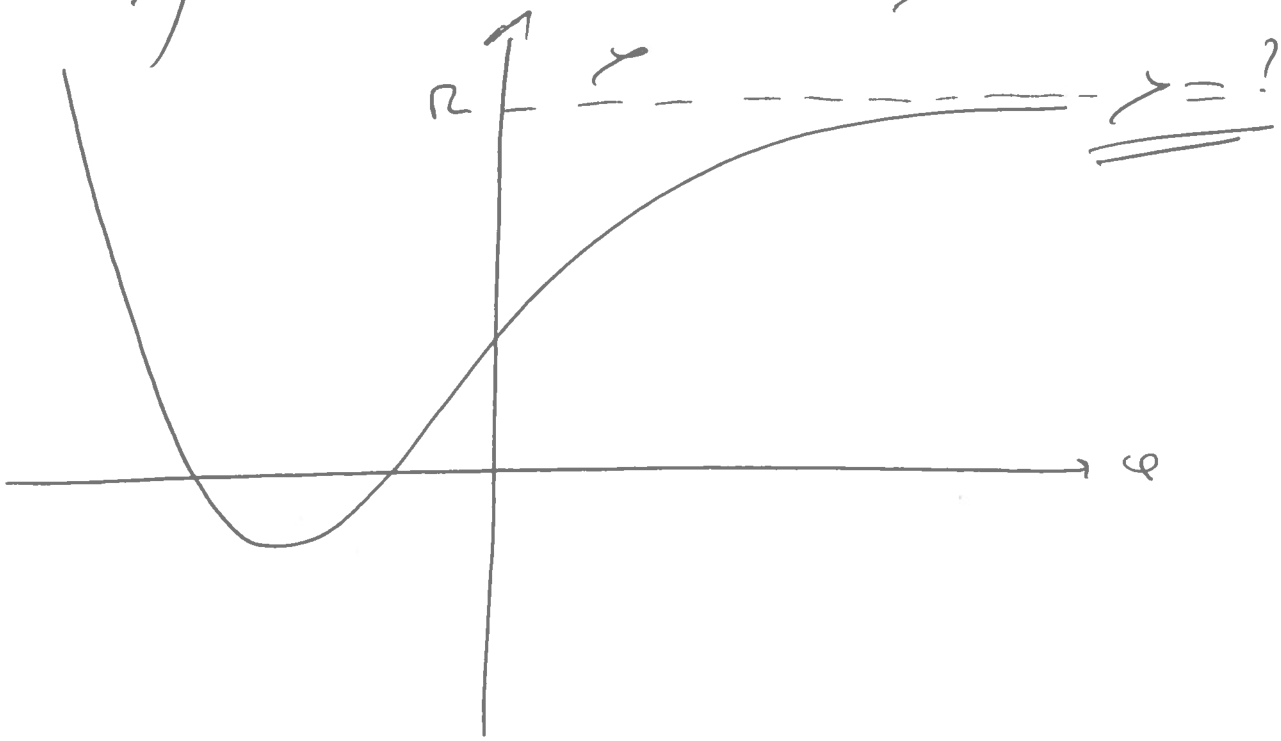
$$f(u_n) = f(e^2) = (e^2)^2 - \cancel{\ln(e^2) + 2}$$

$$= e^4$$

(A)

8. 15

$$f(x) = e^{-2x} - \frac{5-6e^{x}}{e^{x}}$$



$$m = 0$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - \cancel{0x} \right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(e^{-2x} - \frac{5}{e^{x}} + 6\,\cancel{\frac{e^{x}}{e^{x}}} \right)$$

$$= e^{-\infty} - \frac{5}{e^{+\infty}} + 6$$

$$= 0 - \frac{5}{+\infty} + 6 = 6$$

$$y = ax + b$$

$$y = 0x + 6$$

$y = 6$ η εφ. ευθ.

B.2.

$$f'(x) = -2e^{-2x} + 5e^{-x}$$

$$f''(x) = -2\left(e^{-2x}\right)' + 5\left(e^{-x}\right)'$$

$$= -2\times(-2)e^{-2x} + 5\times(-1)e^{-x}$$

$$= 4e^{-2x} - 5e^{-x}$$

$$f''(x) = 0$$

$$4e^{-2u} - 5e^{-u} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 4e^{-2u} = 5e^{-u}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{e^{-2u}}{e^{-u}} = \frac{5}{4}$$

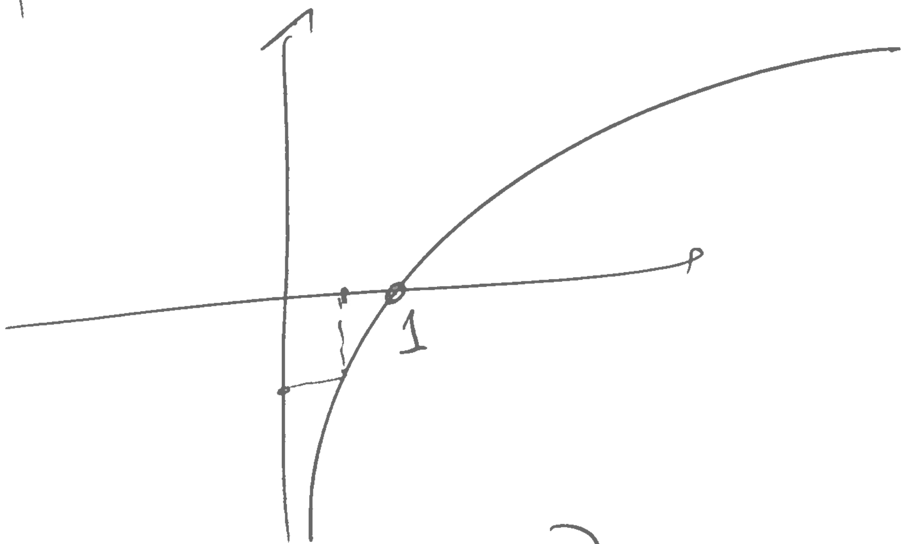
$$\Leftrightarrow \quad e^{-2u-(-u)} = \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad -u = \ln\left(\frac{5}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad u = (-1)\ln\left(\frac{5}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad u = \ln\left(\frac{5}{4}\right)^{-1} = \ln\left(\frac{4}{5}\right)$$

x	$-\infty$		$\ln\left(\frac{4}{3}\right)$		$+\infty$
f''		$+$	0	$-$	
f		$\cup$	P.I.	$\cap$	



$\left]-\infty, \ln\left(\frac{4}{3}\right)\right]$ o gráfico de f tem $\cup$

$\left[\ln\left(\frac{4}{3}\right); +\infty\right[$ $\cap$

Tem apenas 1 ponto inflexão

em $x = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$.

③

$$f(x) = 0$$

$$e^{-2x} - \frac{5 - 6e^{x}}{e^{x}} = 0$$

$$\boxed{e^{x} = y}$$

$$\frac{1}{y^2} - \frac{5 - 6y}{y(y)} = 0$$

$$1 - 5y + 6y^2 = 0$$

$$6y^2 - 5y + 1 = 0$$

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{12}$$

$$y = \frac{5 \pm 1}{12} \begin{cases} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$e^{u} = \frac{1}{2} \quad \vee \quad e^{u} = \frac{1}{3}$$

$$\underbrace{u = \ln\left(\frac{1}{2}\right)} \quad \vee \quad \underbrace{u = \ln\left(\frac{1}{3}\right)}$$

$$= \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{1}{3}\right) = \cancel{\ln\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}\right)}$$

$$\cancel{= \ln\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$= \ln\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$= \ln\left(6^{-1}\right)$$

$$= -\ln(6)$$

c.q.d.

(9)

$$h(x) = (f \circ g)(x)$$

$$= f[g(x)]$$

$$= \boxed{e^{3\cos^2(x)}} - 3\cos^2(x)$$

$$h'(x) = 3\left(\cos^2(x)\right)' e^{3\cos^2(x)} - 3\left(\cos^2(x)\right)'$$

$$= 3 \times 2\cos(x) \times (\cos x)' e^{3\cos^2(x)} - 3 \times 2(\cos x)^{2-1}(\cos x)'$$

$$= -6\cos(x)\sin(x)\, e^{3\cos^2(x)} + 6\cos(x)\sin(x)$$

$$h'(\pi) = 0 + 0 = 0 \quad \text{—— (1)}$$

9.2.

$$\lim_{x \to 0} \frac{3e^{3x} - 3}{2\cos(x) \times (\cos x)'}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{3\left(\frac{e^{3x}-1}{3x}\right) \times 3\cancel{x}}{-2\cos(x)\,\frac{\sin(x)}{x} \times \cancel{x}}$$

$$= \frac{3 \times 1 \times 3}{-2 \times \cos(0) \times 1} = -\frac{9}{2}$$

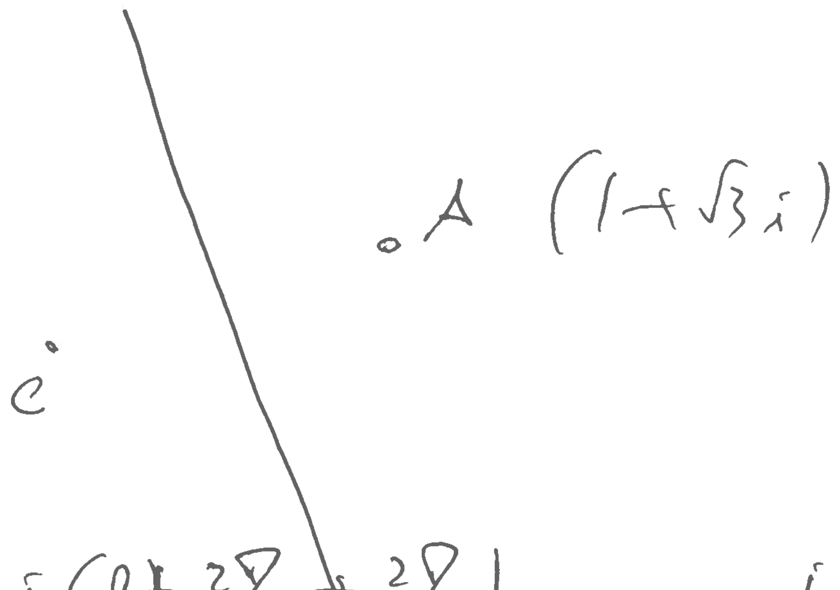
10

$$z_A = 2e^{i(\pi/3)}$$

$$= 2\left(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$$

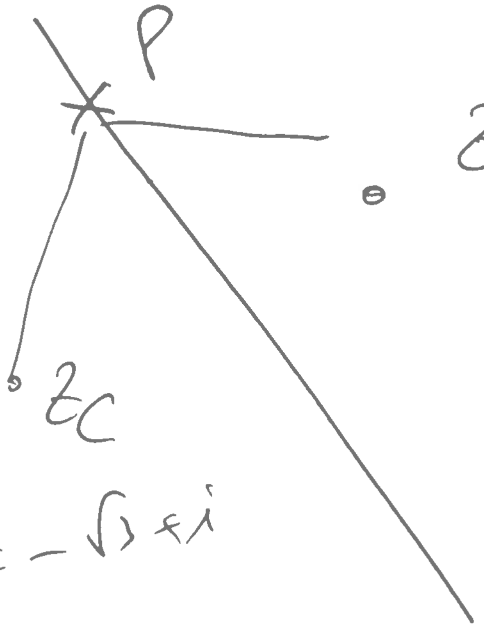
$$= 1 + \sqrt{3} i$$



$$z_C = 2e^{i(\pi/3 + 2\pi/8 + 2\pi/8)} = 2e^{i(\pi/3 + \pi/2)}$$

$$= 2\left(\cos(\pi/3 + \pi/2) + \sin(\pi/3 + \pi/2) i\right)$$

$$= 2\left(-\sqrt{3}/2 + \frac{1}{2} i\right) = \underline{-\sqrt{3} + i}$$



$z_A = 1 + \sqrt{3}i$

$= -\sqrt{3} + i$

$$\overline{P z_A} = \overline{P z_C}$$

$$\left| z - (1 + \sqrt{3}i) \right| = \left| z - (-\sqrt{3} + i) \right|$$

$$\left| z - 1 - \sqrt{3}i \right| = \left| z + \sqrt{3} - i \right|$$

(B)

10.2.

$$z_B = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{8}\right)}$$

$$= 2e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$$

10.3.

$$z_H = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{8}\right)}$$

$$z_H = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}\right) + 2i\left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\, i$$

11

26

$$z \times \bar{z} + 4\,\mathrm{Re}(z) = 2\,\mathrm{Im}(z)$$

$$z = x + yi$$

$$\bar{z} = x - yi$$

$$\mathrm{Re}(z) = x$$

$$\mathrm{Im}(z) = y$$

$$\left|z - (\underbrace{-2+i}_{z_0})\right| = \underbrace{\sqrt{5}}_{r}$$

ssi :

$$(x+yi)(x-yi) + 4x = 2y$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$$

$$x^2 + 4x + 2^2 + y^2 - 2y + 1^2 = 0 + 4 + 1$$

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 5$$

$$C(-2, 1) \quad r = \sqrt{5}$$