Preparação para o Exame Nacional 12º Ano

Ano letivo 2018 / 2019 **Maio e Junho de 2019**

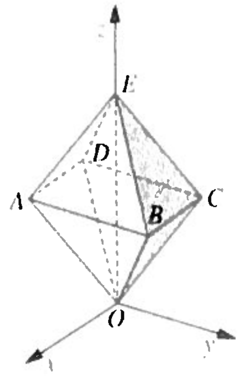
Matemática A **Prova Modelo Nº 16**

1. Na figura está representado, em referencial o.n. *Oxyz*, um octaedro regular [*OABCDE*]. Sabe-se que:

. os vértices *O* e *E* pertencem ao eixo *Oz*;

. o plano *BCE* é definido pela equação $2y+\sqrt{2}\,z-12=0$;

. a reta *AB* é definida pela equação $(x,y,z)=\left(3,0,3\sqrt{2}\right)+k(0,1,0)$; $k\in$ ~ .



1.1. Determina as coordenadas do ponto *B*.

1.2. Considera todas as sequências de seis elementos formadas pelas letras *O*, *A*, *B*, *C*, *D* e *E*, que representam os vértices do octaedro.

Quantas dessas sequências começam por uma consoante e têm as vogais juntas?

(A) 108 **(B)** 360 **(C)** 60 **(D)** 120

1.3. Escolhem-se, ao acaso, dois vértices do octaedro. Determina a probabilidade de ser escolhido o vértice *A*, sabendo que a reta definida pelos vértices escolhidos não é paralela ao plano *xOy*.

Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

2. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considera $z_A=3-2i$. Seja *S* a região do plano complexo definida pela condição:

$$|z-z_A|\leq|-3i| \;\wedge\; \mathrm{Im}(z)\leq\mathrm{Im}(z_A)$$

O perímetro da região *S*, arredondado às centésimas, é igual a:

(A) 4,71 **(B)** 14,14 **(C)** 15,42 **(D)** 18,85

3. Numa casa houve uma rutura na instalação de água, tendo sido detetada uma mancha numa das paredes da casa. A área da superfície da mancha foi aumentando até ao momento em que a rutura foi reparada. A partir desse momento a mancha foi diminuindo até desaparecer.

Admite que a área da mancha, *t* horas após ter sido detetada, é dada em metros quadrados, pela função definida por: $f(t)=\sqrt{\dfrac{2t+0,7}{e^{0,3t}}}$.

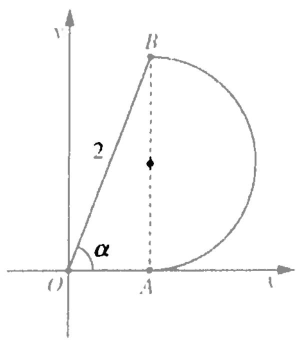
Recorre às capacidades gráficas da calculadora e resolve o seguinte problema: Quanto tempo decorreu, após a reparação da rutura, até a área da mancha atingir 25% da área detetada inicialmente?

Na tua resposta deves:

. Equacionar o problema.

. Reproduz num referencial o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizares na calculadora e assinalar pontos relevantes para a resolução do problema e as respetivas coordenadas.

4. Na figura, em referencial o.n. *xOy*, está representada uma região sombreada do plano constituída por um triângulo retângulo e um semicírculo. Sabe-se que:



. $\overline{OB}=2$

. a reta *AB* é paralela a *Oy* e o ponto *A* pertence ao semieixo positivo *Ox*;

. α é a amplitude, em radianos, do ângulo *AOB*, com $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

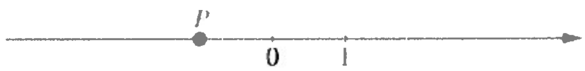
Seja f a função, de domínio $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, que a cada valor de α faz corresponder a área da região da região sombreada.

4.1. Mostra que $\forall\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[,\ f(\alpha)=\sin(2\alpha)+\frac{\pi}{2}\sin^2\alpha$.

4.2. Recorre ao resultado obtido em 4.1 e indica o valor de $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{8}}\dfrac{f(\alpha)-f\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\alpha-\frac{\pi}{8}}$.

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi}{2}$ **(B)** $\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}$ **(C)** $\frac{\pi}{2}$ **(D)** $\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$

5. Um ponto *P* desloca-se numa reta numérica no intervalo de tempo $I=[0,12]$ medido em segundos.



A abcissa de P, em cada instante t, é dada por $x(t) = 2{,}5\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right)$.

5.1. Mostra que $x(t) = 5\cos\left(\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.

5.2. Responde às questões seguintes, atendendo ao resultado obtido em **2.1.**.

5.2.1. Determina $t \in [0,\ 12]$ tal que a distância de P à origem seja igual a 5.

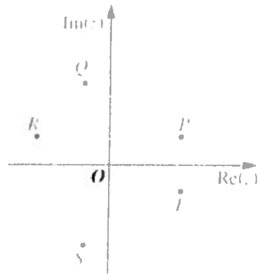
5.2.2. Determina o valor de k de modo que $x''(t) = k\,x(t)$.

5.2.3. Calcula $\lim\limits_{t \to \frac{1}{2}} \frac{x(t)}{2t-1}$.

5.2.4. O valor da frequência deste oscilador harmónico é:

(A) $\frac{1}{5}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{1}{4}$ **(D)** $\frac{1}{3}$

6. Na figura estão representados, no plano complexo, os pontos *P*, *Q*, *R*, *S* e *T*. Sabe-se que:



. o ponto P é o afixo de um número complexo z;

. $w = -\bar{z}\,\mathrm{i}$

Qual dos pontos assinalados na figura pode ser o afixo do número complexo w?

(A) *R* **(B)** *T* **(C)** *S* **(D)** *Q*

7. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considera: $z_1 = (2+\mathrm{i})^2 - 3\mathrm{i}$ e $z_2 = \frac{5\mathrm{i}}{\bar{z}_1}$

7.1. Representa na forma $a+bi$; $a,b \in$ ~ o número complexo z_2.

7.2. Representa no plano complexo o conjunto de pontos definido pela condição:

$$|z - z_1| \leq 2 \wedge |z| \geq 3$$

① Prova 16 ①

1.1. $r \cap \alpha$

$AB \cap BC$

$$\begin{cases} 2y + \sqrt{2}\,z - 12 = 0 \\ x = 3 + 0k \\ \boxed{y = k} \\ \boxed{z = 3\sqrt{2}} + 0k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2k + \sqrt{2} \times 3\sqrt{2} - 12 = 0 \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{cases} \qquad \begin{cases} k = 3 \\ x = 3 \\ y = 3 \\ z = 3\sqrt{2} \end{cases}$$

$B(3; 3; 3\sqrt{2})$

1.2.

O A B C D E

$6!$

B
C
D

$\boxed{O \quad A \quad E}$ — —

$^3A_1 \times 3! \times 3!$

$3 \times 6 \times 6$

$3 \times 36 = 108$

(A)

1.3.

N.º C. possíveis $^6C_2$

N. C. f.

Regra Laplace:

E ou O

$$P = \frac{C_1 \times {}^2C_1}{{}^6C_2}$$

(2) $z_A = 3 - 2i$ ✓

(3)

$$\left| z - z_A \right| \leq \left| -3i \right| \wedge \operatorname{Im}(z) \leq \operatorname{Im}(z_A)$$

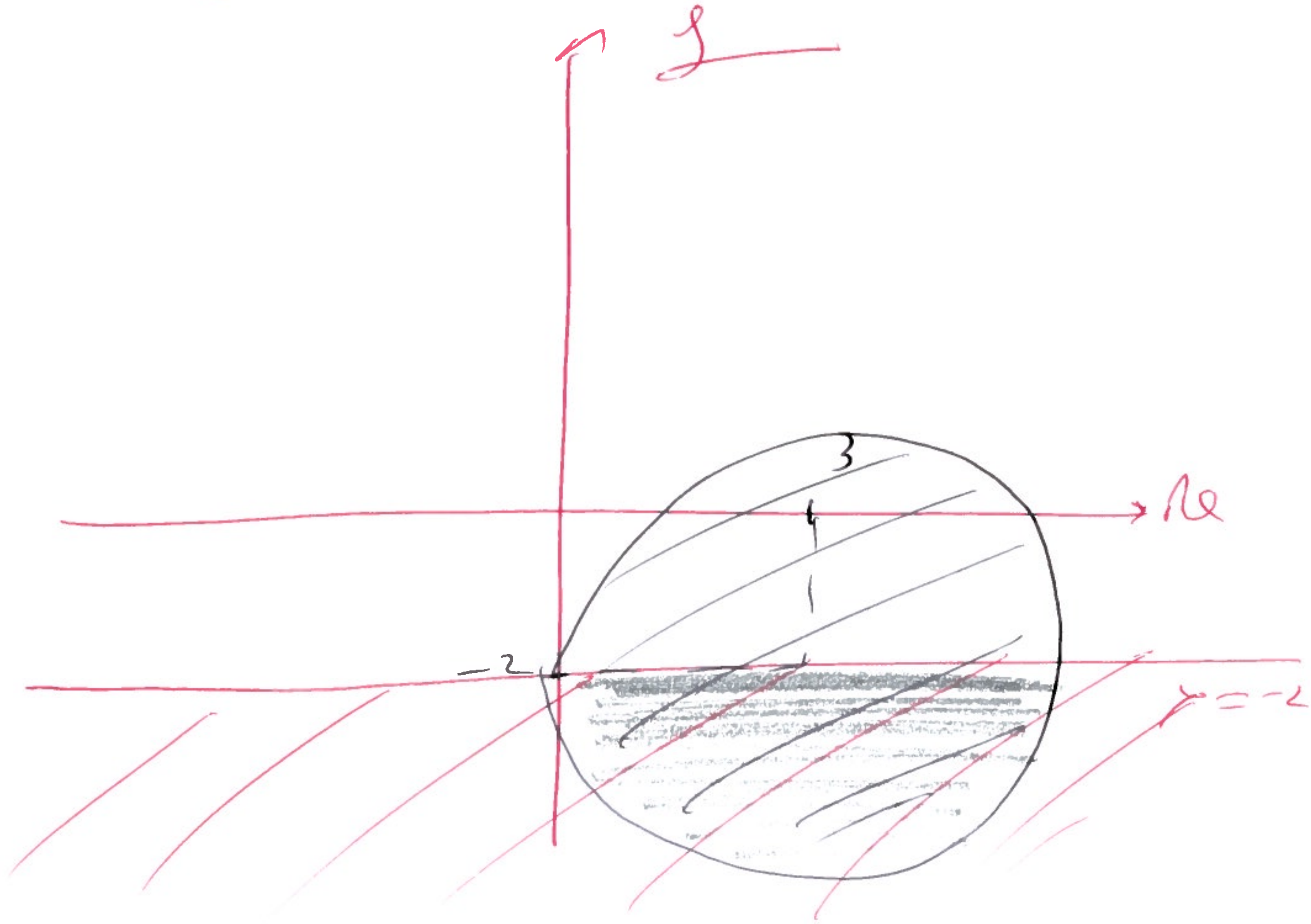
Dado uma condição, se ñ estiver numa das 6 f. canónicas ⇒

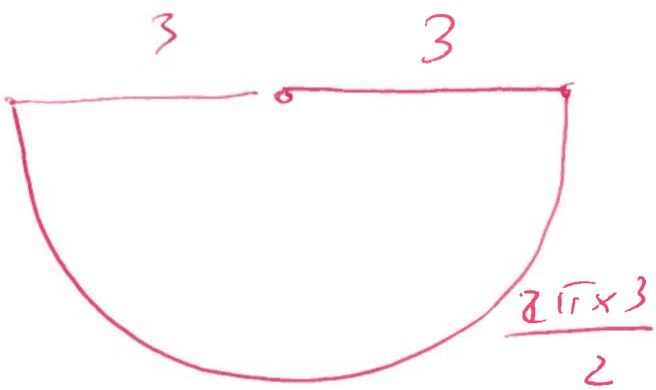
$z = a + bi$

Reta vertical	$\operatorname{Re}(z) = a$
" Horizontal	$\operatorname{Im}(z) = b$
Mediatriz	$\lvert z - (z_A) \rvert = \lvert z - (z_B) \rvert$
Circunferência	$\lvert z - (z_C) \rvert = R$
Semirreta	$\arg(z - (z_V)) = \theta$
∡ de semirreta	$\theta_1 \leq \arg(z - (z_V)) \leq \theta_2$

$$|z-(3-2i)| \leq \underbrace{|-3i|} \wedge \operatorname{Im}(z) \leq -|2i|$$ 4

$$\underset{\text{Centro}}{|z-(3-2i)|} \leq \underset{\text{raio}}{3} \wedge \operatorname{Im}(z) \leq -2$$





$$P_s = 3 + 3 + 3\pi$$

$$= \underbrace{6 + 3\pi}$$

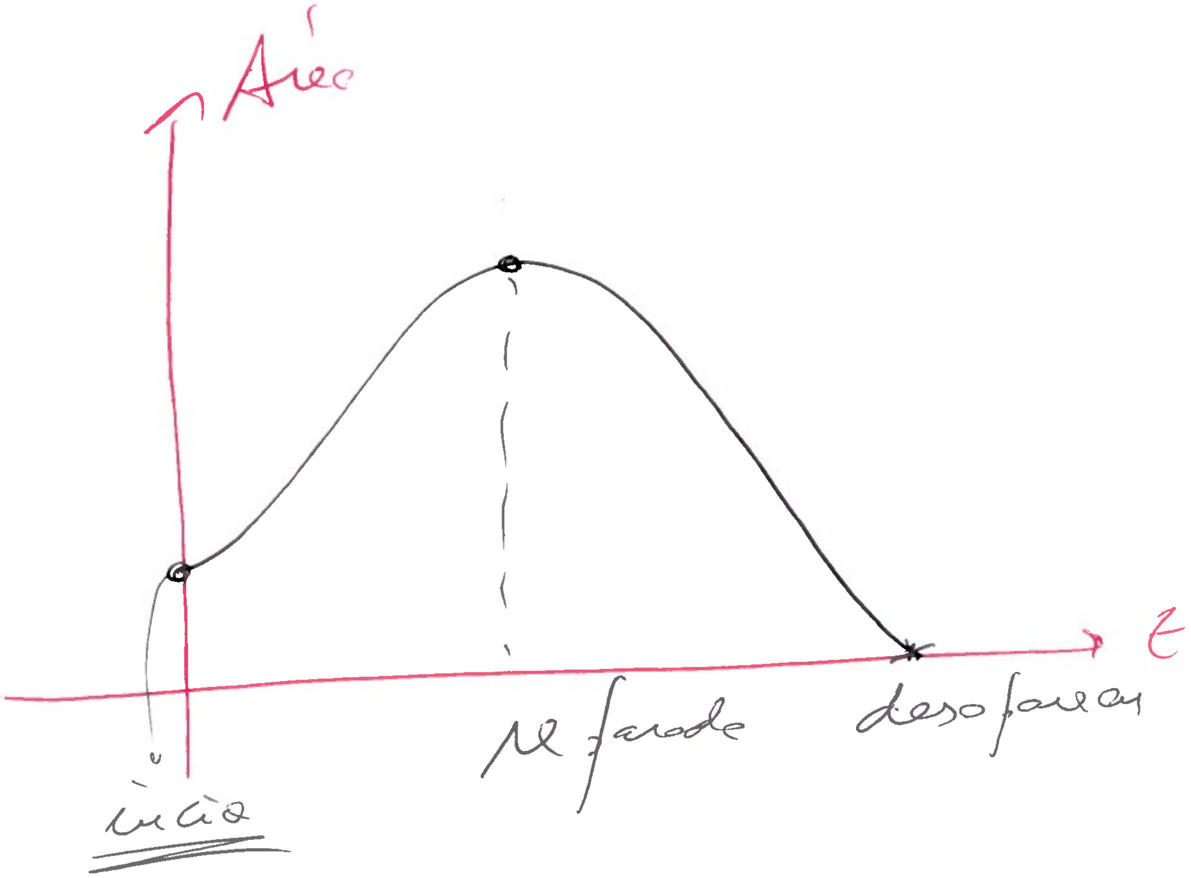
$$= \ldots$$

3

f – área cuando (cm²)

t – Tempo (h) após ser desinfetado.

$$f(t) = \sqrt{\frac{2t + 0,7}{e^{0,3t}}}$$



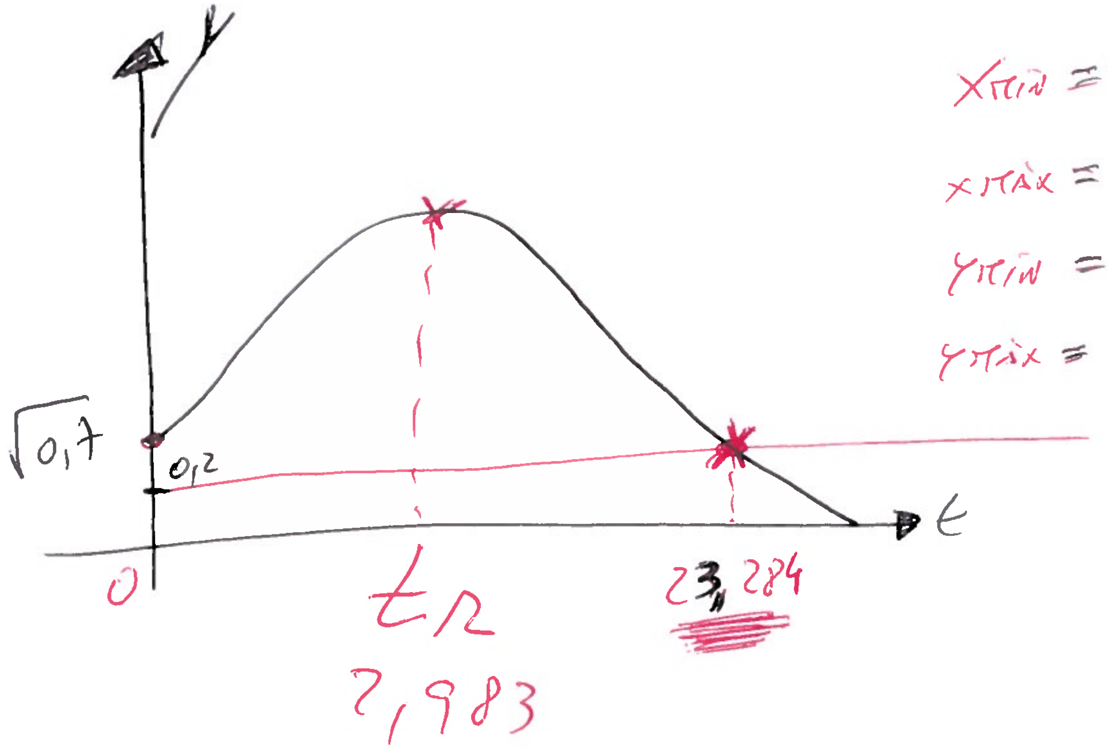
$$f(t) = \frac{25}{100} \times f(0)$$

$$\boxed{\sqrt{\frac{2t+0,7}{e^{0,3t}}}} = \boxed{\frac{25}{100}\sqrt{0,7}}$$

⑥

$$y_1 = \sqrt{\frac{2t+0{,}7}{e^{0{,}3t}}}$$

$$y_2 = \frac{25}{100} \times \sqrt{0{,}7}$$



$x_{min} = 0$

$x_{max} = 30$

$y_{min} = 0$

$y_{max} = 2$

Atinge os 25% ________ horas após a refeição do mundo.

$= 23{,}284 - 2{,}983$

$= \underline{20{,}301\ h}$

$= 20\ h\ 18'$

$20\ h + 0{,}3\ h$

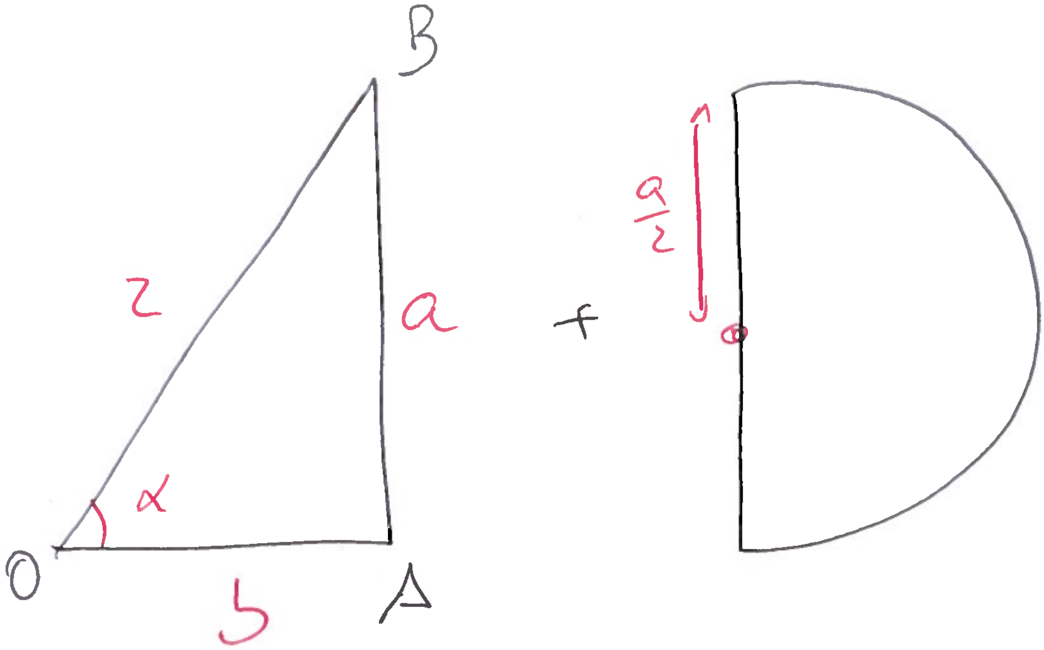
$1\ h$ — $60'$

$0{,}3$ — a

$a = 18'$

4

4.1



$$A = \frac{b \times a}{2} + \frac{\pi \times \left(\frac{a}{2}\right)^2}{2}$$

$$= \frac{b \times a}{2} + \frac{\pi a^2}{8}$$

$$\text{Sen}(\alpha) = \frac{a}{2} \Leftrightarrow \boxed{a = 2\,\text{Sen}(\alpha)}$$

$$\text{Cos}(\alpha) = \frac{b}{2} \Leftrightarrow \boxed{b = 2\,\text{Cos}(\alpha)}$$

8

$$A(\alpha) = \frac{4 \operatorname{Sen}(\alpha) \cos(\alpha)}{2} + \frac{\pi \times \cancel{2} \times \cancel{2} \operatorname{Sen}^2(\alpha)}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times 2}$$

$$= 2 \operatorname{Sen}(\alpha) \cos(\alpha) + \frac{\pi \operatorname{Sen}^2(\alpha)}{2}$$

$$= \operatorname{Sen}(2\alpha) + \frac{\pi}{2} \operatorname{Sen}^2(\alpha);$$

c.q.d.

4.2.

$$\lim_{\alpha \to \pi/8} \frac{f(\alpha) - f(\pi/8)}{\alpha - \pi/8}$$

$$= f'(\pi/8)$$

$$= 2 \cos(2\pi/8) + \pi/2 \operatorname{Sen}(2\pi/8)$$

$$= \cancel{2} \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} + \frac{\pi}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \sqrt{2} + \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

$$\left[\operatorname{Sen}(2\alpha)\right]' + \frac{\pi}{2}\left[\operatorname{Sen}^2\alpha\right]'$$

$$(2\alpha)' \cos(2\alpha) + \frac{\pi}{\cancel{2}} \times \cancel{2} \operatorname{Sen}(\alpha) \times (\operatorname{Sen}\alpha)'$$

$$2 \cos(2\alpha) + \frac{\pi}{2} \boxed{2 \operatorname{Sen}(\alpha) \cos(\alpha)}$$

$$2 \cos(2\alpha) + \frac{\pi}{2} \operatorname{Sen}(2\alpha)$$

1

5

$$x(t) = 2{,}5\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right)$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$(A>0)$ amplitud — $(\omega>0)$ pulsación — $(\varphi \in [0, 2\pi])$ ∡ fase

$$x(t) = 2{,}5\,\frac{\cancel{\sqrt{2}}\,2}{\cancel{\sqrt{2}}}\left(\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= 5\left(\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\cos(\pi/4) - \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\sin(\pi/4)\right)$$

$$= 5\cos\left(\frac{\pi t}{2} + \pi/4\right)$$ c.q.d.

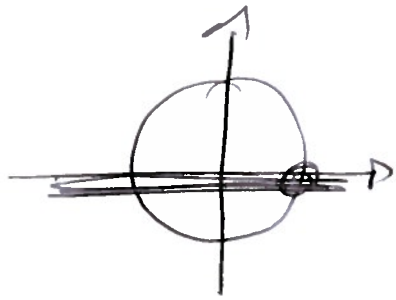
5.2.

$$x(t) = 5$$

(10)

$$5\cos\left(\frac{\pi t}{2}+\pi/4\right)=5$$

$$\cos\left(\frac{\pi t}{2}+\pi/4\right)=1$$



$$\frac{\pi t}{2}+\pi/4=0+2k\pi;\quad k\in\mathbb{Z}$$

$$2\pi t+\pi=0+8k\pi$$

$$t=\frac{-1\cancel{\pi}}{2\cancel{\pi}}+\frac{8k\cancel{\pi}}{2\cancel{\pi}}$$

$$t=-\frac{1}{2}+4k;\quad k\in\mathbb{Z}$$

$[0, 12]$

$k=0 \longrightarrow \cancel{-\frac{1}{2}}$

$k=1 \longrightarrow \frac{7}{2}$

$k=2 \longrightarrow \frac{15}{2}$

$k=3 \longrightarrow \frac{23}{2}$

$k=4 \longrightarrow \cancel{\frac{31}{2}}$

C.S. $\left\{\frac{7}{2}, \frac{15}{2}, \frac{23}{2}\right\}$

5.2.2.

$$x'(t) = 5 \times \left[-\frac{\pi}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2} + \pi/4\right) \right]$$

$$= -\frac{5\pi}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2} + \pi/4\right)$$

$$x''(t) = -\frac{5\pi}{2} \times \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2} + \pi/4\right) \right]'$$

$$= -\frac{5\pi}{2} \times \left(\frac{\pi t}{2} + \pi/4\right)' \cos\left(\frac{\pi t}{2} + \pi/4\right)$$

$$= -\frac{5\pi}{2} \times \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi t}{2} + \pi/4\right)$$

$$x''(t) = k \times x(t)$$

$$-\frac{\cancel{5}\pi^2}{4} \cancel{\cos\left(\frac{\pi t}{2} + \pi/4\right)} = k \times \cancel{5} \cancel{\cos\left(\frac{\pi t}{2} + \pi/4\right)}$$

$$\boxed{k = -\frac{\pi^2}{4}}$$

5.2.3.

$$\lim_{t\to \frac{1}{2}} \frac{x(t)-x(\frac{1}{2})}{2(t-\frac{1}{2})}$$

$$= \frac{x'(\frac{1}{2})}{2} = \frac{-\frac{5\pi}{2}\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\pi/4\right)}{2}$$

$$= \frac{-\frac{5\pi}{2}\times 1}{2} = -\frac{5\pi}{4}$$

5.2.4.

$A=5$

$\omega=\pi/2$

$\varphi=\pi/4$

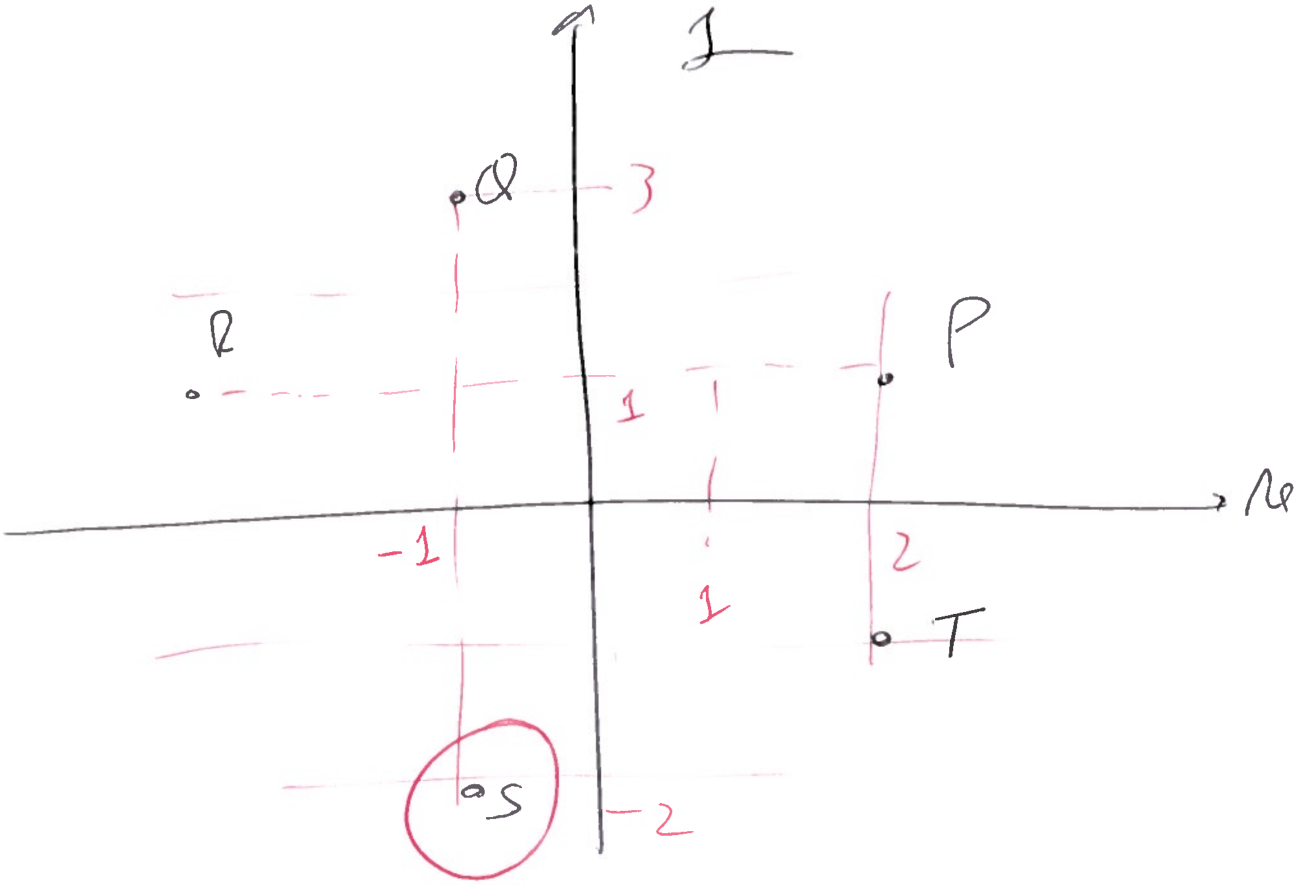
$$\frac{\pi t}{2} = 2\pi$$

$$t = \frac{4\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}}$$

$P=4$

Logo $f=\frac{1}{4}$ (c)

6



$$z_P = 2 + 1i$$

$$w = -\bar{z}\, i$$

$$= -\left(\overline{2+i}\right) i$$

$$= -\boxed{(2-i)\times i}$$

$$= -\left(2i - i^2\right) = -1 - 2i$$

(S)

7

$$z_1 = (2+i)^2 - 3i$$

$$= 4 + 4i + i^2 - 3i$$

$$= \underline{3 + i}$$

Con $\frac{b}{a} = \frac{1}{3} \notin$ Tab

fico alg.

$$z_2 = \frac{5i}{\bar{z}_1} = \frac{(5i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}$$

$$= \frac{15i + 5i^2}{9 - i^2}$$

$$= -\frac{5}{10} + \frac{15i}{10}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$$

15

7.1

$$z_2 = a + bi$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} i$$

7.2.

$$\underbrace{|z - (3+i)| \leq 2}_{\odot} \land \underbrace{|z| \geq 3}_{\odot}$$

$c = (3, 1)$

$r = 2$

$c(0,0)$

$r = 3$