1. Uma caixa contém vinte bolas bolas, umas com numeração par e outras com numeração ímpar, indistinguíveis ao tato. Sabe-se que $\frac{2}{5}$ do número total de bolas têm numeração ímpar. Considera a experiência aleatória que consiste em retirar, de uma só vez, oito bolas da caixa.
Qual é a probabilidade de se retirarem pelo menos seis bolas com numeração par?
Uma resposta possível é a seguinte:

$$\frac{{}^{12}C_6 \times {}^8 C_2 + {}^{12} C_7 \times {}^8 C_1 + {}^{12} C_8}{{}^{20}C_8}$$

Numa pequena composição explica a resposta fazendo referência:

- à Lei de Laplace;
- ao número de casos possíveis;
- ao número de casos favoráveis.

2. Relativamente a uma certa linha do triângulo de Pascal, sabe-se que a soma dos dois últimos elementos da linha é igual a 51.
O Rodrigo Escreveu, em bolas, os números dos elementos da linha anterior à linha referida acima (um número em cada bola) e colocou-as numa caixa. De seguida, retirou, ao acaso, duas bolas da caixa.
Qual é a probabilidade de essas bolas terem o mesmo número?
Apresenta o resultado sob a forma de fração irredutível.

3. Considera o desenvolvimento de $\left(-\frac{\sqrt[6]{x}}{3}+\frac{3}{\sqrt[4]{x^2}}\right)^{12}$, com $x>0$. Determina o termo médio do desenvolvimento.

4. Numa caixa estão seis bolas brancas e três bolas pretas. Considera a experiência aleatória que consiste em retirar, ao acaso, e de uma só vez, quatro bolas da caixa.

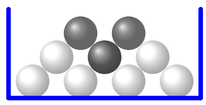

Figura 1

Determina a probabilidade de retirar no máximo duas bolas brancas.
Apresenta o resultado sob a forma de fração irredutível.

5. Seja E, conjunto finito e não vazio, o espaço amostral de uma experiência aleatória, seja $P(E)$ o espaço dos acontecimentos, sendo equiprováveis os acontecimentos elementares, P uma probabilidade em $P(E)$, e sejam A, B e C, acontecimentos dessa experiência aleatória ($A \in P(E), B \in P(E)$ e $C \in P(E)$).

Mostra que, se $P(B)>0$, então, $P[(A \cup C)|B] = P(A|B)+P(C|B)-P[(A \cap C)|B]$

6. No referencial o.n. xOy da figura 2 está representado o círculo trigonométrico e um trapézio $[ABCD]$.
Sabe-se que:

- o ponto A é um ponto móvel pertencente à circunferência que limita o círculo trigonométrico e movimenta-se ao longo do primeiro quadrante;
- o ponto B pertence ao eixo das abcissas e acompanha o movimento do ponto A de modo que $[AB]$ se mantém paralelo ao eixo Oy;
- C é o ponto de interseção do círculo trigonométrico com o eixo das abcissas;
- D é o ponto de interseção da semirreta $\dot{O}A$ com a reta de equação $x = 1$;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo BOA ($\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$).

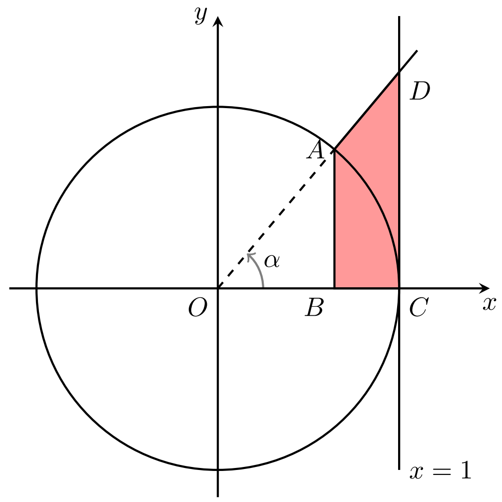

Figura 2

6.1. Mostra que a área do trapézio $[ABCD]$ é dada, em função de α, por:

$$A(\alpha) = \frac{tg\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}{2}$$

6.2. Para um dado valor de $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sabe-se que $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{3}{5}$.
Sem utilizares a calculadora, determina, para esse valor de α, a área do trapézio $[ABCD]$.

6.3. Resolve, por processos analíticos, a equação $A(\alpha) = \dfrac{1 - \sin\alpha\cos\alpha}{2}$.

7. Considera a função g, real de variável real, definida por $g : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \mapsto \mathbb{R}$, $g(x) = 1 - \dfrac{4x-6}{x+1}$.
Recorrendo ao Teorema de Bolzano, mostra que a função g tem pelo menos um zero no intervalo $]2; 3[$.

8. Considera a função h, real de variável real, definida por $h : [3; +\infty[\mapsto \mathbb{R}$, $h(x) = 3 + \dfrac{\sqrt{2x-6}}{x}$.
Recorrendo ao Teorema de Bolzano, mostra que o gráfico da função h a reta de equação $y = x - 1$, em pelo menos um ponto, cuja abcissa pertence ao intervalo $]4; 5[$.

9. Considera a função f, real de variável real, definida por $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}, x \neq 1$.
Determina os intervalos de monotonia e indica, caso existam, os extremos da função.

Na resolução dos itens não é permitido a utilização de calculadora gráfica

1. Considera num referencial ortonormado xOy, a representação gráfica da função g, real de variável real, definida por $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, e das suas duas assíntotas não verticais, tal como se observa na figura 1.

   Mostra, recorrendo a processos exclusivamente analíticos, que as duas assintotas ao gráfico se intersetam na origem do referencial.

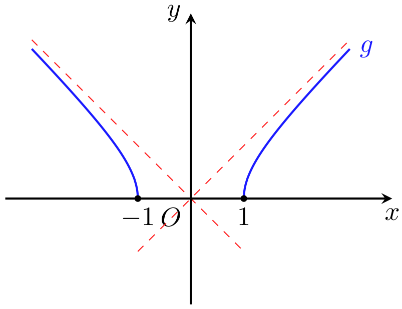

Figura 1

2. Considera as funções f e g, reais de variável real, definidas por $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x^2 - 4}{x + 1}$ e $g : [-2; 2] \mapsto \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$, respetivamente.

   Para cada uma delas, faz um estudo tão completo quanto possível.

   Na tua resolução deves abordar (sempre que possível) os seguintes tópicos:

   Domínio / Interseção com os eixos coordenados / Sinal / Paridade / Assíntotas ao gráfico / Monotonia e extremos / Sentido das concavidades do gráfico e pontos de inflexão / Contradomínio / Esboço do gráfico