1. Considera a sucessão (u_n) definida por $u_n = 1 - \dfrac{2}{n}$.

   1.1. Prova que a sucessão é limitada. Determina um majorante e um minorante do conjunto dos seus termos.

   1.2. Mostra, pela definição, que $\lim(u_n) = 1$

2. Considera as sucessões (a_n) e (b_n) de termos gerais $a_n = \dfrac{2n+3}{n+1}$ e $b_n = 2n+1$.

   2.1. Mostra que $2 < a_n \leq \dfrac{5}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$.

   2.2. Comenta a afirmação seguinte: "a sucessão (a_n) é limitada".

   2.3. Determina $\lim{(a_n)}^n$.

   2.4. Mostra, pela definição, que $\lim(b_n) = +\infty$.

   2.5. Relativamente a uma sucessão (c_n), sabe-se que $c_n \geq b_n, \forall n > 55$. O que podes afirmar quanto ao $\lim(c_n)$?

3. Mostra, recorrendo ao teorema das sucessões enquadradas, que:

   3.1. $\lim\left(\dfrac{2n+3}{4n+2}\right)^n = 0$

   3.2. $\lim\dfrac{3\cos(4n)+1}{2n^2+4} = 0$

   3.3. $\lim\sqrt[n]{5^n+6^n+7^n+8^n} = 8$

   3.4. $\lim\displaystyle\sum_{p=1}^{2n}\dfrac{6n+1}{\sqrt{4n^4+p}} = 6$

4. Considera a função g, real de variável real, definida por $g(x) = 2x^2 - 4x$.

   4.1. Determina a taxa média de variação da função no intervalo $[1;2]$.

   4.2. Determina a taxa média de variação da função no intervalo $[-2;0]$.

   4.3. Geometricamente, o que representa o valor encontrado no item anterior?

5. Usando as regras de derivação, escreve a expressão da função derivada de cada uma das funções seguintes:

   5.1. $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 5x + 4$

   5.2. $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$

   5.3. $f(x) = \dfrac{x^3-1}{1+2x}$

6. Considera a função f, real de variável real, definida por $f(x) = \dfrac{-x^2 + x - 1}{2x}$, com $x \neq 0$.

    6.1. Escreve a equação da reta tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa -1.

    6.2. Faz o estudo da monotonia e determina, caso existem, os extremos da função.

7. Relativamente a uma função f, sabe-se que

$$\lim_{h \mapsto 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = 2$$

Escreve a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto $T(-1; 2)$.

8. Na figura está representado, em referencial o.n. xOy, a circunferência de centro O e raio 4.

Sabe-se que:

- P e B são os pontos de interseção da circunferência com os semieixos positivos Ox e Oy, respetivamente;
- E é o ponto de interseção da circunferência com os semieixo negativo Oy;
- o ponto A desloca-se ao longo do arco PB, nunca coincidindo com o ponto P nem com o ponto B;
- os pontos C, D, e F, acompanham o movimento do ponto A, de tal modo que se tem sempre, , $[AF]//[CD]$; $[AC]//[DF]$; $[AC]\perp Oy$ e $[AF]\perp Ox$;
- x é a amplitude, em radianos, do ângulo POA, $\left(x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\right)$.

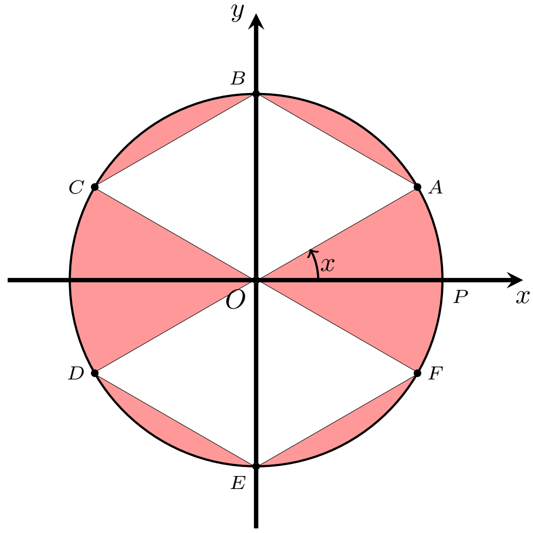


Figura 1

Resolve os três primeiros itens sem recorreres à calculadora.

8.1. Mostra que a área da região sombreada, é dada, em função de x, por $A(x) = 16\pi - 32\cos(x)$.

8.2. Sabendo que $\alpha \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$ e que $tg(\pi - \alpha) = -\dfrac{2}{3}$, determina o valor exato de $A(\alpha)$.

8.3. Determina $x \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$ tal que $A(x) = 16\pi - 16\sqrt{3}$

8.4. Recorrendo às potencialidades da calculadora gráfica, resolve o seguinte problema: "Qual ou quais os valores de x para os quais a área sombreada é igual a 8π unidades de área".
Apresenta o resultado arredondado às décimas.

9. Resolve, em $\mathbb{R}$, as equações seguintes:

    9.1. $\sin(x) - \sin(x)\cos(x) = 0$

    9.2. $\sin^4(x) - \cos^4(x) = 0$

10. Considera a função f, real de variável real, definida por $f(x) = \sqrt{2} - 2\cos\left(\frac{2x}{3}\right)$.

10.1. Mostra que a função f é par.

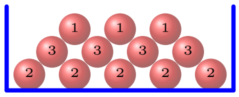
10.2. Determina o período positivo mínimo da função f.

10.3. Determina o contradomínio da função f.

11. Uma caixa contém doze bolas, indistinguíveis ao tato: três bolas com o número 1, cinco bolas com o número 2 e quatro bolas com o número 3. Retiram-se, da caixa, três bolas ao acaso. Qual a probabilidade de a soma dos números saídos ser igual a cinco?

Uma resposta correta para este problema é: $\frac{{}^3C_2 \times 4 + {}^5C_2 \times 3}{{}^{12}C_3}$

Numa pequena composição, explica esta resposta.
Deves organizar a tua composição de acordo com os seguintes tópicos:
Referência à regra de Laplace;
Explicação do número de casos possíveis;
Explicação do número de casos favoráveis.



12. O quarto elemento de uma certa linha do Triângulo de Pascal é 19600. A soma dos quatro primeiros elementos dessa linha é 20876.
Qual é o terceiro elemento da linha seguinte?

13. A soma de todos os elementos das n primeiras linhas do Triângulo de Pascal é 16383.

13.1. Quantas linhas foram adicionadas?

13.2. Qual é o penúltimo número da linha seguinte à última que foi adicionada?

14. Considera a expressão algébrica $\left(\sqrt[8]{x^2} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right)^{12}$, $y > 0$.

14.1. Haverá algum termo de grau três na incógnita x, no desenvolvimento $\left(\sqrt[8]{x^2} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right)^{12}$? Caso exista, determina-o.

14.2. Determina o termo médio do desenvolvimento de $\left(\sqrt[8]{x^2} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right)^{12}$

15. Considera o desenvolvimento de $\left(\frac{x^9}{y^2} - \frac{\sqrt[6]{y}}{x}\right)^n$ com $n \in \mathbb{N}_0$. Um dos termos deste desenvolvimento é igual a $15x^{-5}y^{\frac{1}{3}}$. Determina n.