1. Considere a família de funções f de domínio R definida por:

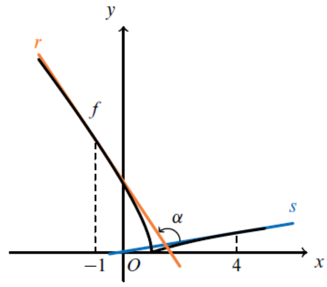
$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{2-2x}-ax+1 & se\ x\leq 1\\ \ln\left(\frac{x+2}{3}\right) & se\ x>1\end{cases}$$

1.1. Justifique se f é diferenciável em $x=1$.

1.2. Defina a função f´, primeira derivada de f.

1.3. Considere a função representada no gráfico e a reta r que é tangente ao gráfico no ponto de abcissa -1. A reta s é tangente ao gráfico de f em $x\ =\ 4$.

Determine o valor de a sabendo que as retas são perpendiculares.



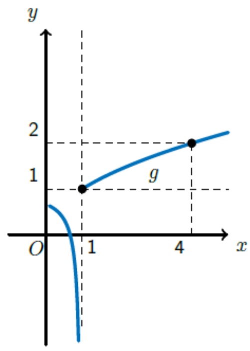
2. Seja f uma função continua e diferenciável em R, tal que $f(a)\ =\ 0$.

Considere a função $g(x)=\ e^{f(x)}$. Mostre que se o ponto $\left(b,f(b)\right)$ pertence à reta tangente ao gráfico no ponto de abcissa a, então o ponto $(b,f(b)+1)$ pertence à reta tangente ao gráfico de g no mesmo ponto de abcissa a.

3. Considere a função f definida por $f(x)=\ln\left(x^2-1\right)$.

3.1. Caraterize a função inversa de f.

3.2. Considere uma função g de domínio $]0,+\infty[$ cujo gráfico está representado no referencial.



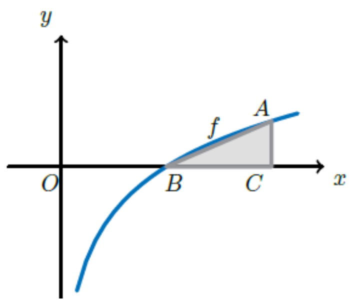
3.2.1. Calcule $fog(4)+\ (g^{-1}of)(\sqrt{e^2+1})$.

3.2.2. Prove que $1\notin Dfog$

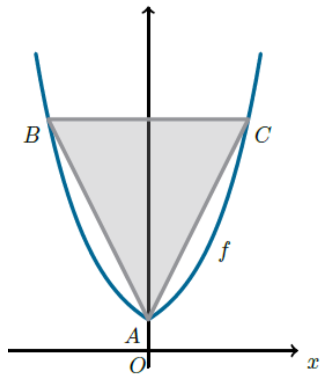
3.3. Considere a sucessão $u_n=1+\frac{1}{n}$. Determine $\lim\ (f+g)(u_n)$

4. Considere a função f definida por $f(x)=\ln\left(ax\right)$, cujo gráfico está representado na figura. Sabe-se que a função tem um zero em $x=b$, e que o ponto A e C tem abcissa $x=2b$. A área do triângulo $[ABC]$ é $ln(2)$.

Determine os valores de a e b.



5. Considere a função $f(x) = e^{|x|}$ cujo gráfico está representado na figura. Sabe-se que o ponto A pertence ao gráfico de f, os pontos B e C tem abcissas simétricas e a função g define a zona sombreada, a área do triangulo em função de x.



5.1. Mostre que $g(x) = x(e^x - 1), x \in R$.

5.2. Considere a função h definida por $h(x) = log_a(a^x)$, determine o valor de $(goh)(\ln(\frac{1}{4}))$.

5.3. Considere a função j definida em R^+ dada por $h(x) = 3 - 3e^{-x}$, calcule o intervalo real em que $\frac{g(x)}{x} \geq j(x)$.

6. Para certos valores reais a e b, f é uma função contínua no ponto de abcissa 0, sabendo que f está definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{sen(x)}{1 - \sqrt{1-x}} & ; x < 0 \\ a & ; x = 0 \\ b + \dfrac{1}{3x} - \dfrac{cos^2(x)}{3x} & ; x > 0 \end{cases}$$

Determine os valores de a e b?

7. Sejam f e g as funções de domínio R, definidas por:

$$f(x) = \cos(2x) + sen(3x) \;\; e \;\; g(x) = x^2$$

Seja a uma número real e as retas r e s, tais que: a reta r é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $a + \frac{\pi}{2}$ e a reta s tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa a.

Mostre que existe elo menos um ponto $a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ em que as retas r e s são perpendiculares.

8. Seja f uma função duas vezes diferenciável em R e a um número real positivo, tal que:

- f(a) é um extremo relativo de f;
- $\forall x \in [0, a], -5 < f''(x) < -1$.

O teorema de Lagrange, aplicando à função f' em $[0, a]$, permite concluir que:

(A) $0 < f'(0) < 4a$ (B) $a < f'(0) < 5a$

(C) $2a < f'(0) < 6a$ (D) $3a < f'(0) < 7a$

9. Uma fábrica produz três tipos de bolachas (chocolate, baunilha e morango), com uma distribuição de produção de 50%, 30% e 20%, respetivamente.

Sabe-se ainda que nas bolachas de morango, 10% tem mais de 450 calorias por cada 100 gr, enquanto que as de baunilha, 20% tem mais de 450 calorias e as de morango todas têm mais de 450 calorias por cada 100 gramas.

9.1. Qual a probabilidade de escolher uma bolha com menos de 450 calorias por casa 100 gramas.

9.2. De entre as bolhas com mais de 450 calorias, determine a percentagem de bolhas que são de baunilha?

10. Seja E o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória e A, B dois acontecimentos possíveis que pertencem a esse espaço de resultados.

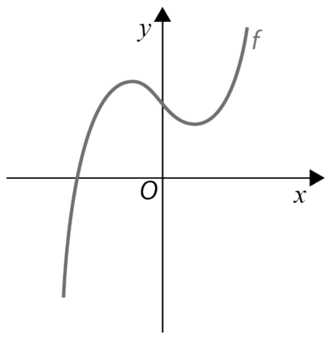
10.1. Prove que:

$$P(B|A) \times P(A) - P(A) + P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\bar{A})$$

10.2. Num congresso participaram 300 enfermeiros de vários países, entre os quais Portugal. Metade dos enfermeiros portugueses é do sexo feminino. Escolhido ao acaso um enfermeiro, a probabilidade de ele ser estrangeiro ou do sexo feminino é de 80 %. Quantas enfermeiras portuguesas estavam no congresso?

11. Na figura está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função polinomial f. Considere que:

- a função f tem um único máximo relativo para $x = -1$;
- a função f tem um único mínimo relativo para $x = 1$;
- o ponto de abcissa 0 é o único ponto de inflexão do gráfico de f.

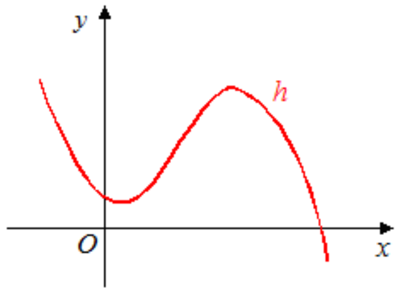


Sejam f' e f'' a primeira e a segunda derivadas da função f, respetivamente. Qual é o conjunto-solução da condição $f'(x) \times f''(x) \leq 0$?

(A) $[-1, 0] \cup [1, +\infty[$ **(B)** $]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$ **(C)** $]-\infty, -1] \cup [0, 1]$ **(D)** $]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[$

12. Na figura encontra-se parte do gráfico de uma função *h*, de domínio $\mathbb{R}$. Sejam h' e h'' a primeira e a segunda derivadas de *h*, respetivamente. Admita que estas duas funções também têm domínio $\mathbb{R}$.

Qual das expressões seguintes designa um número negativo?



(A) $h(0)-h'(0)$ **(B)** $h'(0)\times h''(0)$ **(C)** $h(0)+h''(0)$ **(D)** $h(0)\times h''(0)$

13. De duas funções f e g, ambas de domínio R, sabe-se que:

- $f(2)=3$
- $g(2)=-f(2)$
- $f''(2)=1$
- $g''(2)=4$
- $f'(2)\times g'(2)=3$

Seja h a função definida, em R, por $h(x)=f(x)\times g(x)$.

Qual é o valor de $h''(2)$?

(A) 3 **(B)** 9 **(C)** 12 **(D)** 15

14. Seja j uma função de domínio R, definida por um polinómio de grau 6.

Dos quatro valores apresentados a seguir, apenas um deles pode ser o número de pontos de inflexão do gráfico de j. Qual é esse valor?

(A) 2 **(B)** 5 **(C)** 6 **(D)** 12

15. Considere a função f, de domínio R, definida por $f(x)=2x^4-x^2+3$.

15.1. Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

15.2. Indique o valor lógico da seguinte proposição: p: O gráfico da função f tem concavidade voltada para cima no intervalo $\left]-\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{3}}{6}\right[$ ou tem dois pontos de inflexão.

15.3. Resolva, em R, a equação $f'(x)=-x\,f''(x)$.

Apresente as soluções com denominador racional.

16. Seja f uma função de domínio R, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-4x+5}} & se\ x \geq 2 \\ \dfrac{x^2+2x+1}{x-2} & se\ x < 2 \end{cases}$$

16.1. Estude a função quanto à existência de assintotas do seu gráfico, para $+\infty$.

16.2. Determine o valor de f'(1), recorrendo à definição de derivada.

16.3. Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

16.4. Estude a monotonia e a existência de extremos relativos da função f, em $2 < x \leq 8$.

17. Dois amigos registaram os resultados das 30 partidas de ténis que disputaram entre si no último verão. Sabe-se que o Vasco venceu 60% e entre as que o António venceu, 50% foram decididas em Tie-break. Quantas partidas terminaram com a vitória do António e não foram decididas em Tie-Break?

(A) 3 (B) 6 (C) 9 (D) 12