Preparação para o Exame Nacional 12º Ano

Ano letivo 2018 / 2019 **Maio e Junho de 2019**

Matemática A **Prova Modelo Nº 10**

1. Na figura está parte da representação gráfica de uma função cúbica g e um triângulo $[ABC]$.

Sabe-se que:

- $g(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 4)(x - 3)$;
- o ponto C percorre a curva do gráfico da função g, sendo a a sua abcissa, e com $a \in]-2; 2[$.

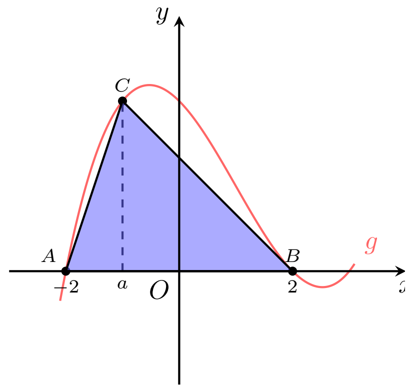


Figura 1

1.1. Determina, em função de a, a área do triângulo $[ABC]$.

1.2. Determina o valor de a, para o qual a área do triângulo $[ABC]$ é máxima.

1.3. Recorrendo às potencialidades da calculadora gráfica, determina o valor de a para o qual a área do triângulo $[ABC]$ é igual a 3.

2. Na figura está representado, num plano munido de um referencial ortonormado, parte do gráfico da função f, definida por $f(x) = \sqrt{x-1} + 2$ e os pontos A, B e C.

Sabe-se que o ponto B, de abcissa x, percorre a curva do gráfico da função f, e o ponto C acompanha esse movimento, ao longo da reta $y = 2$, de tal modo que se tem sempre $\overline{AB} = \overline{BC}$ e a abcissa de C superior à abcissa de B.

2.1. Prova que para todo o $x \in D_f$, a área do triângulo $[ABC]$, é dada, em função de x, por $g(x) = (x-1)\sqrt{x-1}$.

2.2. Recorrendo às potencialidades da calculadora gráfica, determina a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) do gráfico de f para o(s) qual(ais), a área do triângulo $[ABC]$ é igual a 5 unidades quadradas.

2.3. Existe um ponto em que os gráficos de f e de g se intersetam. Determina-o recorrendo à calculadora gráfica.

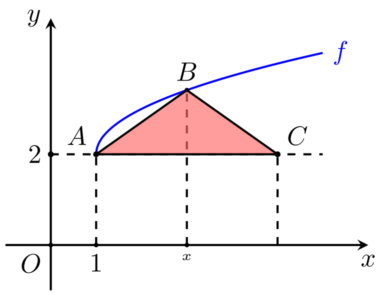


Figura 2
(Retirado e adaptado do caderno de apoio às metas)

3. Na figura está representado, num plano munido de um referencial ortonormado, parte do gráfico da função f, definida por $f(x) = -x^2 + 4x$ e o ponto A de coordenadas $(1; 0)$.

Considera a função g que associa a cada x a distância entre o ponto A e o ponto P do gráfico de f de abcissa x.

3.1. Prova que para todo o x, $g(x) = \sqrt{x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 2x + 1}$.

3.2. Recorrendo às potencialidades da calculadora gráfica, determina as abcissas dos pontos do gráfico de f que distam três unidades do ponto A.

3.3. Recorrendo às potencialidades da calculadora gráfica, determina as abcissas dos pontos do gráfico de f que distam uma unidade do ponto A.

3.4. Existe um ponto em que os gráficos de f e de g se intersetam. Determina-o por métodos analíticos e interpreta geometricamente o resultado obtido.

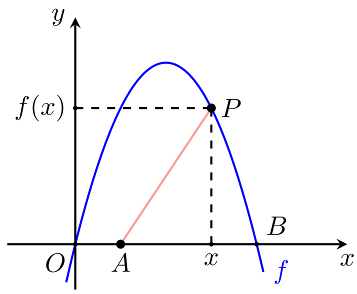


Figura 3

(Retirado e adaptado do caderno de apoio às metas)

4. Na figura está representado um trapézio isósceles $[ACDF]$.

Considera que A é um ponto que se desloca ao longo da reta AF.

Os pontos B, C, D e F, acompanham o movimento de A de tal modo que $[BCDE]$ é um quadrado de lado x e $\overline{AB} = x + 1$.

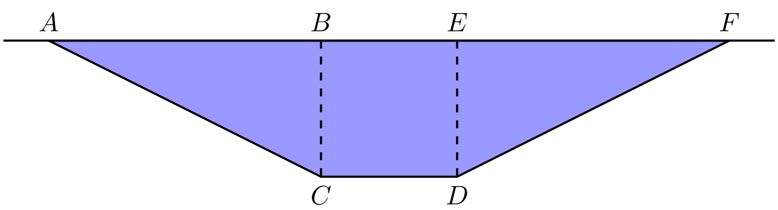


Figura 4

Considerando x como o lado do quadrado $[BCDE]$, seja f a função que a cada valor de x faz corresponder o perímetro do trapézio $[ACDF]$.

4.1. Prova que $f(x) = 4x + 2 + 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$.

4.2. Resolve, por processos exclusivamente analíticos, a equação $f(x) = 24$. Interpreta o resultado obtido no contexto do problema.

5. Num referencial o.n. $Oxyz$, os planos α e β são definidos pelas equações:

$$\alpha: 4x + 12z + 11y - 28 = 0 \text{ e } \beta: x - \frac{11}{4}y + 3z = 6$$

Os planos α e β são:

(A) coincidentes.

(B) perpendiculares.

(C) estritamente paralelos.

(D) concorrentes não perpendiculares.

6. Num referencial o.n. do plano, os vetores $\vec{u} = (-k, 6)$ e $\vec{v} = (k + 1, 1)$, com $k \in \mathbb{R}$, formam um ângulo obtuso, se:

(A) $k \in \,]-\infty, -3[$

(B) $k \in \,]-\infty, -3[\cup]2, +\infty[$

(C) $k \in \,]-3, 2[$

(D) $k \in \,]2, +\infty[$

7. Considera, num referencial o.n. *Oxyz*, o plano definido pela equação $5x + 4y + 3z = 2$. Para um certo número real p, a condição $x = 1 \wedge y = \frac{z-2}{p}$ define uma reta paralela ao referido plano. Qual é o valor de p?

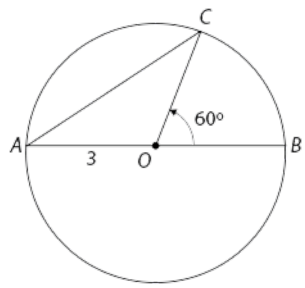
(A) $-\frac{3}{4}$ **(B)** $\frac{3}{4}$ **(C)** $\frac{4}{3}$ **(D)** $-\frac{4}{3}$

8. Num referencial o.n. xOy, considera a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 1 = 0$. Em qual das seguintes opções se encontra uma condição que defina a circunferência concêntrica com esta e que é tangente à reta de equação $y = 2x - 5$?

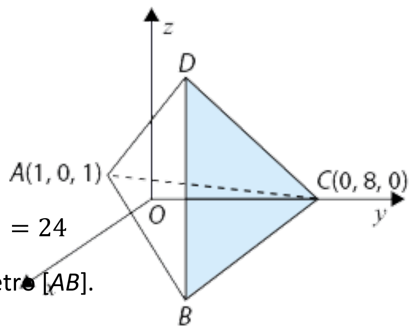
(A) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = \frac{36}{5}$ **(B)** $(x+1)^2 + (y+3)^2 = \frac{36}{5}$

(C) $x^2 + y^2 - 2x - 6y = \frac{2809}{25}$ **(D)** $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 9$

9. Na figura está representada uma circunferência de centro O e raio 3. Os pontos A, B e C são pontos da circunferência e $[AB]$ é um diâmetro da circunferência.
Sabe-se ainda que $B\hat{O}C = 60^\circ$. Determina o valor exato de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.



10. A figura representa, em referencial o.n. *Oxyz*, uma pirâmide triangular oblíqua de vértices A, B, C e D.
Sabe-se que $\overrightarrow{CB} = (6, -4, 0)$ e $\overrightarrow{CD} = (1, -7, 5)$.



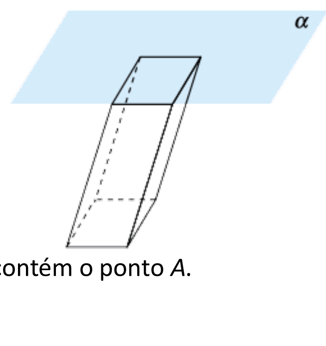
10.1. Escreve as equações cartesianas da reta que passa no ponto A e tem a direção do vetor $\overrightarrow{CD}$.

10.2. Mostra que o plano BCD pode ser definido por: $2x + 3y + \frac{19}{5}z = 24$

10.3. Escreve uma condição que defina a superfície esférica de diâmetro $[AB]$.

11. Considera, num referencial o.n. *Oxyz*, a reta r de equações cartesianas $x = 1 \wedge \frac{y}{3} = \frac{z+1}{6}$. Determina os valores de k para os quais a reta de equações $\frac{x}{2} = \frac{y}{8} = \frac{-kz}{k^2-5}$ é perpendicular à reta r.

12. Um prisma oblíquo de bases quadradas tem uma das suas bases contida no plano α de equação $-2x + 3z = 12$. Sabe-se que o ponto $A(-2, -4, 1)$ é um vértice da outra base e que a aresta das bases mede 4 metros.



12.1. Determina uma equação do plano que contém a outra base do prisma.

12.2. Escreve as equações cartesianas da reta que é perpendicular ao plano α e que contém o ponto A.

12.3. Calcula o volume do prisma.