1. Seja Ω, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Sabe-se que: $P\left(\overline{A}\right)=0{,}75$, $P\left(\overline{B}\right)=0{,}55$ e $P\left(\overline{A}\cap B\right)=0{,}3$. Qual é o valor da probabilidade condicionada $P\left(B|A\right)$?

(A) $\frac{3}{5}$ **(B)** $\frac{3}{20}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{9}{100}$

2. De um número natural *n* sabe-se que $\left(n+2\right)!=k$ e $\left(n+1\right)!=p$. Então, pode concluir-se que *n* é igual a:

(A) $\frac{k^2+kp}{p}$ **(B)** $\frac{k}{p}$ **(C)** $\frac{k-2p}{p}$ **(D)** $\frac{k+p}{p}$

3. Considere a função f de domínio IR definida por $f(x)=\begin{cases} e^x(x+1) & se \quad x\leq 0 \\ x-\dfrac{\ln x}{x} & se \quad x>0 \end{cases}$

3.1. Estude a função f quanto à continuidade em $x=0$ e, de acordo com o resultado obtido, diga o que pode concluir quanto à derivabilidade da função f em $x=0$.

3.2. Estude a função f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico.

3.3. Considere os seguintes pontos:

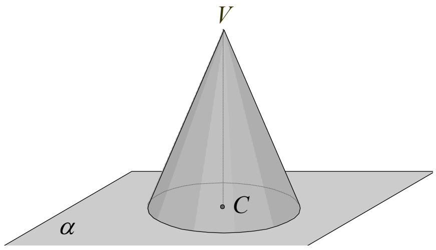
- O ponto A cuja abcissa é o zero de f;

- O ponto B, do primeiro quadrante, cuja ordenada é um mínimo relativo da função f;

- O ponto O, origem do referencial.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora determine a área do triângulo [AOB]. Explique o seu raciocínio numa pequena composição. Apresente um esboço do(s) gráfico(s) em que baseou a sua resposta, indicando as coordenadas dos pontos relevantes.

4. Fixado um referencial ortonormado *Oxyz*, considere:



- o plano α de equação $2x+3y+6z+1=0$;

- o ponto *V* de coordenadas $\left(\frac{5}{3},\ 2,\ 1\right)$;

- a superfície esférica *S* definida pela equação $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=1$;

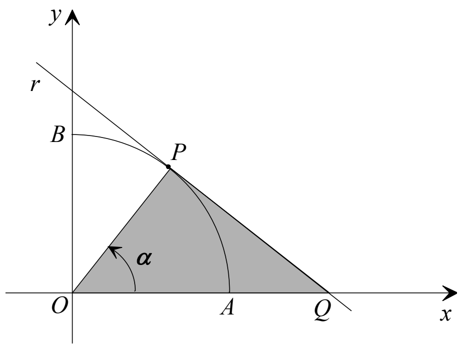
- o cone reto de vértice *V* e base de centro *C* contida no plano α.

4.1. Determine uma equação vetorial da reta *VC*.

4.2. Determine a interseção da reta *VC* com o plano α para concluir que o ponto *C* tem de coordenadas (1, 1, –1).

4.3. Sabendo que a interseção da superfície esférica com o plano α é a circunferência que limita a base do cone, determine a medida do volume do cone.

5. Na figura ao lado está representado, em referencial o. n. *xOy*, um arco *AB* contido numa circunferência de centro na origem do referencial. Os pontos *A* e *B* têm coordenadas $(1,\ 0)$ e $(0,\ 1)$, respetivamente. O ponto *P* desloca-se ao longo do arco *AB*, nunca coincidindo com o ponto *A* nem com o ponto *B*. Para cada posição do ponto *P*, sabe-se que:



- a reta *r* é tangente à circunferência no ponto *P*;
- o ponto *Q* é o ponto de interseção da reta *r* com o eixo *Ox*;
- *α* é a amplitude, em radianos, do ângulo *AOP*.

Qual é a expressão que representa a área do triângulo [*OQP*] em função de *α* ?

(**A**) $\dfrac{1}{2\operatorname{tg}\alpha}$ (**B**) $\dfrac{\sin\alpha\times\cos\alpha}{2}$ (**C**) $\dfrac{\sin\alpha}{2}$ (**D**) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{2}$

6. Seja k um número real diferente de zero. Sabe-se que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{kx}-1}{2x}=3$. Então, pode concluir-se que o domínio da função g definida por $g(x)=\ln(k-x)$ é:

(A) $\left]0,\frac{2}{3}\right]$ **(B)** $\left]-\infty,6\right[$ **(C)** $\left[3,+\infty\right[$ **(D)** $\left]\frac{3}{2},+\infty\right[$

7. Quantos números diferentes é possível representar, utilizando exatamente os mesmos algarismos do número 328 257 ?

(A) ${}^{6}C_{2} \times 4!$ **(B)** ${}^{6}A_{2} \times 4!$ **(C)** $\dfrac{{}^{6}A_{4}}{2!}$ **(D)** ${}^{6}C_{4}$

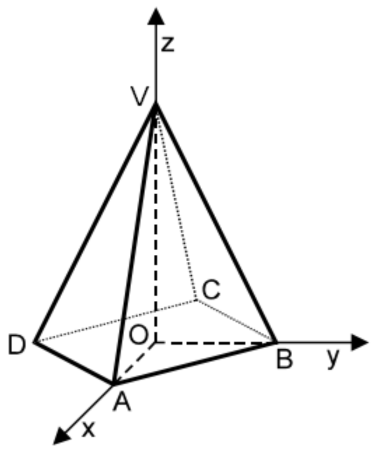
8. Num grupo de sete jovens, cada um com o seu guarda-chuva, sendo estes de cores diferentes.

8.1. De quantas maneiras diferentes se podem colocar os jovens, lado a lado, de modo que os guarda-chuvas verde, cor de laranja e amarelo fiquem juntos e o guarda-chuva azul fique num dos extremos?

8.2. O André, o Rui e o Carlos fazem parte do grupo. Admite que os guarda-chuvas foram distribuídos pelos jovens ao acaso. Calcula a probabilidade de, nessa distribuição, os guarda-chuvas azul e verde serem atribuídos a dois destes três elementos.

9. Na figura, em referencial o. n. *Oxyz* , está representada uma pirâmide quadrangular regular [*ABCDV*] . Sabe-se que:

- os vértices *A* e *C* pertencem a *Ox* ;
- os vértices *B* e *D* pertencem a *Oy* ;
- o vértice *V* pertence a *Oz* ;
- a reta *AV* é definida por $\dfrac{3-x}{6} = \dfrac{z-4}{8} \wedge y = 0.$



9.1. Determina as coordenadas do vértice *A* .

9.2. A interseção do plano definido pela equação $z = 2$ com a pirâmide é um quadrado. Determina a área desse quadrado.

10. Considera a família de funções *f* de domínio R definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^{x}-1} + k & \text{se } x \neq 0 \\ k+1 & \text{se } x = 0 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}$$

10.1. Mostra que qualquer função da família é contínua.

10.2. Considera a função da família em que $k = 2$. Determina, caso existam, as equações das assíntotas do gráfico de *f* .

11. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória e sejam A e B dois acontecimentos possíveis ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Mostra que:

$$P(B \cup \bar{A}) - P(\bar{B}|A) \times P(\bar{A}) = P(B|A).$$

12. Considera a família de funções f definidas por: $f(x) = (k - x^2)\,e^{-\frac{x^2}{2}}$, $k \in \mathbb{R}$

12.1. Mostra que a reta $y = 0$ é assíntota do gráfico de qualquer função da família.

12.2. Determina para que valores de k as derivadas das funções da família têm um único zero.

12.3. Na figura ao lado, está representada uma das funções da família. Os zeros desta função são -1 e 1 .

Determina, por processos exclusivamente analíticos, as abcissas dos pontos que são extremos da função.