Doc 3 - Limites:

---

1. Utilize o Teorema das Funções Enquadradas para determinar o valor de:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{cos^2(x)}{x^3 + 1}$$

2. Sejam $u_n = \frac{n+1}{2n+3}$ e $v_n = \frac{\sqrt{4n^2+2}}{4n}$. Sabendo que $u_n \leq w_n \leq v_n$, determine o valor de $\lim\ w_n$.

3. Utilize o Teorema da Comparação de sucessões para justificar as seguintes igualdades:

3.1. $\lim \frac{2n^2+1}{n+3} = +\infty$ **3.2.** $\lim \frac{-n^3+2}{2n+1} = -\infty$ **3.3.** $\lim (\frac{2}{3})^{-2n+1} = +\infty$

4. Utilize o Teorema das Sucessões Enquadradas para calcular o limite de cada uma das sucessões seguintes:

4.1. $\lim \frac{\cos(n^2+1)}{n}$ **4.2.** $\lim \frac{2-\cos(n^3+2)}{2n+1}$ **4.3.** $\lim \frac{cos^2(n)}{3-2n}$ **4.4.** $\lim \sum_{k=1}^{n} \frac{n+1}{n^2-k}$

4.5. $\lim (\frac{n+1}{3n+2})^n$ **4.6.** $\lim \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ **4.7.** $\lim \frac{n^2(sen(n)+cos^2(n))}{n^3+1}$

5. Utilize o Teorema das Funções Enquadradas para calcular o limite de cada uma das expressões seguintes:

5.1. $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \cos(\frac{1}{x^2})$ **5.2.** $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \text{sen}(\frac{2+x}{x})$ **5.3.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2+2}$

5.4. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x^2}{1+cos^2(x)}$ **5.5.** $\lim\limits_{x \to 1} (x-1)^2 2^{\frac{1}{x-1}}$ **5.6.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2+\text{sen}(x)}{2x^2}$

5.7. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5+sen(x)}{\sqrt{x}}$ **5.8.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\text{sen}(4x)}{1+x^2}$ **5.9.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-x+\cos(x)}{x+2}$

5.10. $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2(2 + \cos(x))$ **5.11.** $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + \frac{x}{2} sen(x))$

6. Considere a sucessão u_n de termo geral $u_n = \frac{3n-1}{n}$.

6.1. Determine os três primeiros termos.

6.2. Indique, justificando, o valor lógico de:

6.2.1. $\exists n \in N: u_n = 1$

6.2.2. $\forall n \in N, 2 \leq u_n < 3$

7. Determine cada um dos seguintes limites:

7.1. $\lim\left(\frac{1}{n}\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right)$ **7.2.** $\lim\left(\frac{\text{sen}\,(n)}{-n^2+n}\right)$ **7.3.** $\lim\left(\frac{n^2+2n+\sqrt{n}}{\sqrt{n^5+n}}\right)$ **7.4.** $\lim\left(\frac{\sqrt{n^2+n}-1}{\sqrt{n^2+n}+1}\right)$

7.5. $\lim\left(\frac{4n^2-5n-7}{-n^2+6n}\right)$ **7.6.** $\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-1}\right)$ **7.7.** $\lim\left(-n^7+5n^3+2n\right)$

8. Considere as sucessões u_n e v_n tais que o lim (u_n) = - ∞ e $v_n \geq -u_n + \sqrt[n]{2}$. Indique justificando o valor do limite de v_n.

9. Considere as sucessões u_n e v_n tais que o lim (u_n) = - ∞ e $v_n = \begin{cases} 2^n & se\ n < 2019 \\ 3u_n & se\ n \geq 2019 \end{cases}$. Calcule, justificando, o valor do limite de v_n.

10. Considere as sucessões u_n e v_n tais que o lim (u_n) = + ∞ e $v_n \leq 5 - u_n$. Indique justificando o valor do limite de v_n.

11. Considere as sucessões u_n e v_n tais que o lim (u_n) = + ∞ e $v_n = \begin{cases} \frac{5}{n+1} & se\ n < 19 \\ 3u_n & se\ n \geq 19 \end{cases}$. Calcule, justificando, o valor do limite de v_n.

12. Utilize o Teorema das Sucessões Enquadradas para calcular o limite de cada uma das sucessões seguintes:

12.1. lim $\frac{2+\text{sen}\,(n)}{n}$ **12.2.** lim $\frac{2n+\cos\,(n)}{n+2}$ **12.3.** lim $\frac{cos^4(n)}{3n+2}$

12.4. lim $\left(\frac{2n}{4n+1}\right)^n$ **12.5.** lim$\left(\frac{2n+3}{6n+1}\right)^n$ **12.6.** lim $\frac{sen^2(n)+1}{2^n}$

12.7. $\lim \sum_{k=1}^{2n} \frac{3n}{4n^2+k}$ **12.8.** $\lim \frac{\text{sen}\,(\frac{n\pi}{6})}{2n+3}$

13. Mostre que a sucessão de termo geral $u_n = n^4(\cos(n) - 2)$ tende para - ∞

14. Considere as funções f e g definidas em R tais que f é limitada e $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.
Mostre a existência de uma função h, definida em R e de limite nulo, tal que:

$\forall\, x \in R, -h(x) \leq f(x)g(x) \leq h(x)$ e conclui que e $\lim_{x\to+\infty} f(x)g(x) = 0$.

15. Mostre que a sucessão de termo geral $\frac{\cos\,(n\pi)}{n}$ é convergente.

16. Considere as sucessões u_n e v_n definidas por:

$$u_n = \begin{cases} u_1 = \frac{3}{5} \\ u_{n+1} = \frac{u_n - 3}{6} \end{cases} \qquad \text{e } v_n = 5\,u_n + 3$$

16.1. Mostre que a sucessão v_n é uma progressão geométrica

16.2. Escreve, em função de n, o termo geral de u_n e v_n.

16.3. Estude a convergência da sucessão u_n.

17. Averigúe se a sucessão u_n de termo geral $u_n = 2 + \frac{n^2 + sen(n)}{n^2+1}$ é convergente.

18. Considere as sucessões seguintes: $u_n = 2 + \sum_{k=1}^{n} (\frac{2}{3^k})\ e\ v_n = \frac{(\frac{3}{2})^n}{n!}$. Mostre que a sucessão u_n é crescente e v_n é decrescente.

19. Considere a função g definida por $g(x) = \frac{x}{x^2+1-\cos\,(x)}$

19.1. Determine uma função f tal que $f(x) \leq g(x)$, em R e de modo que $\lim_{x\to o^+} f(x) = +\infty$.

19.2. Justifique que $\lim_{x\to o^+} \frac{x}{x^2+1-\cos(x)} = +\infty$.

19.3. Mostre que $\lim_{x\to o^-} \frac{x}{x^2+1-\cos(x)} = -\infty$

20. Recorrendo ao Teorema das Funções Enquadradas ,mostre que:

20.1. $\lim_{x\to 0} x^2 sen(\frac{1}{x^2}) = 0$

20.2. $\lim_{x\to -\infty} (\frac{xcos^2(x)}{x^2-1}) = 1$

20.3. $\lim_{x\to +\infty} \frac{x-sen(x)}{x+2} = 0$

20.4. $\lim_{x\to +\infty} (\frac{2x^2}{x^2+1-\cos(x)}) = 2$

21. Sejam u_n, v_n e w_n as sucessões definidas por:

$$u_n = \frac{3n-1}{2n+5} \quad , \quad v_n = \frac{\sqrt{2}n-1}{3} \quad , \quad w_n = \frac{5-3n}{2}$$

Mostre que os limites das sucessões são respetivamente: $\frac{3}{2}$; $+\infty$ e $-\infty$

22. Calcule os limites seguintes:

22.1. $\lim (1-2n^2)$

22.2. $\lim (\frac{1}{2n+3})$

22.3. $\lim (2n-1)(3-n)$

22.4. $\lim \frac{2n-1}{n+3}$

22.5. $\lim (\frac{2n^2-1}{n^3+3n+10})$

22.6. $\lim (\sqrt{4n+3} - 2\sqrt{n})$

22.7. $\lim (3^n - 2^{n-1} - 5^{-n})$

22.8. $\lim (\frac{2n}{\sqrt{9n^2+4n}})$

22.9. $\lim \frac{3^n-2^{2n-1}}{2^{2n}+3^{n+1}}$

22.10. $\lim \frac{2n^2-1}{n^3+10} . \frac{n+1}{4}$

22.11. $\lim \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{\sqrt{n+10}}{n}}$

23. Identifica as afirmações verdadeiras:

23.1. $\forall n \in N, \frac{n}{n^2+1} < \frac{n}{n^2}$

23.2. $\forall n \in N, \frac{n+1}{n^2} < \frac{2n}{n^2}$

23.2. $\forall n \in N, \frac{n+1}{2n+1} \geq \frac{n}{3n}$

24. Determine o menor valor de $p \in N$ tal que:

24.1. $n \geq p \Rightarrow \frac{1}{2n-1} < \frac{1}{n}$

24.2. $n \geq p \Rightarrow \frac{n+5}{n^2} < \frac{3n}{n^2}$

24.3. $n \geq p \Rightarrow \frac{n+4}{n^2+1} < \frac{2n}{n^2}$

25. Prove que a sucessão u_n de termo geral $u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+i}}$ tende para + ∝.

26. Determine, por comparação, os seguintes limites:

26.1. $\lim \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt[3]{n^4+k}}$

26.2. $\lim \sum_{k=1}^{n} \frac{1-\sqrt{n}}{n+k}$

26.3. $\lim n(2-\cos(n))$

26.4. $\lim (\frac{2n+1}{n})^n$

26.5. $\lim (\frac{3n+2}{n+1})^n$

27. Determine $\lim (\frac{2n+4}{5n+3})^n$ e $\lim \sum_{k=0}^{2n} (\frac{1}{\sqrt{n^2+2k}})$

28. Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x+\cos(x)}$

29. Seja u_n a sucessão definida por: $u_n = \frac{3n-1}{2n+4}$.

29.1. Mostre que existe uma ordem a partir da qual os termos são todos maiores que 1,4.

29.2. Calcule o $\lim {u_n}^n$.

30. Determine o limite de cada uma das seguintes sucessões:

30.1. $u_n = (\frac{2n-1}{4n})^n$

30.2. $u_n = (\frac{sen(n)}{2})^n$

30.3. $u_n = \frac{n+cos^2(n)}{n+1}$

30.4. $u_n = (\frac{1}{2} + \frac{sen(2n)}{3})^n$

30.5. $u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{2n}{3n^2+i}$

30.6. $u_n = \sum_{i=3}^{2n} \frac{2}{\sqrt{n^2+i}}$

31. Aplicando a definição de limite segundo Heine, calcule:

31.1. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1-3x}{x^2+1}$ **31.2.** $\lim\limits_{x\to -\infty} (x - 3x^2)$

32. Acerca de uma função f sabe-se que: $\forall x \in R, x \leq f(x) \leq x + 1$. Determine, justificando, $\lim\limits_{x\to -\infty} (\frac{f(x)}{x})$

33. Acerca de uma função f de domínio $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sabe-se que: $\forall x \in D, 1 - x^2 \leq f(x) \leq x^2 + 1$. Determine, justificando, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{2\cos(x)}$.

34. Recorrendo ao Teorema das Funções Enquadradas, calcule $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x - sen(x)}{x + \mathrm{sen}\,(x)}$