Números Complexos

Números complexos: Forma Algébrica:

1. Identifique *Re*(*z*) e *Im*(*z*) nos seguintes complexos:

a) $z = 3 + 2i$ **b)** $z = i + 2$ $c)$ $z = 1 - i$ **d)** $z = \sqrt{2}i - \ln 2$

$e)$ $z = 4$ **f)** $z = 2i$ $g)$ $z = -\frac{1}{4} + \frac{i}{2}$ **h)** $z = 0$

2. Determine os valores de $\boldsymbol{x}$ e de $\boldsymbol{y}$ para os quais os números complexos seguintes são iguais:

a) $z_1 = x - 2i$ e $z_2 = 3 + \frac{y}{2}i$ b) $z_1 = \sqrt{2}\,x + i$ e $z_2 = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}yi$

$c)$ $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2i$ e $z_2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{4}yi$ d) $z_1 = -\sqrt{3}x + \sqrt{2}yi$ e $z_2 = \sqrt{6} - 2i$

$e)$ $z_1 = \pi x + \pi^2 i$ e $z_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}yi$ f) $z_1 = \frac{1}{4}x - \sqrt{6}yi$ e $z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{8}i$

3. Calcule:

a) $(3 - i) + (4 + 2i) - (5 + 3i)$

$b)$ $(4 + 3i) - (2 - 2i) + (3 - 4i)$

$c)$ $(1 - 2i) \times (3 + i)$

$d)$ $(7 + i) \times (1 - 3i)$

$e)$ $\left(\sqrt{2} - i\right) \times \left(\sqrt{2} + i\right)$

$f)$ $\left(2 - \sqrt{3}i\right) \times \left(1 + \sqrt{3}i\right)$

$g)$ $\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i\right) \times (1 - i)$

h) $\left(\frac{1}{2} + i\right) \times \left(\frac{3}{2} + i\right)$

i) $(1 - i) \times (1 - i)$

j) $i(-2i) \times (2 + i)$

k) $i(1 + i) + 2i(2 + i)$

l) $-i(5 + i) - (1 + 2i) \times (1 - 3i)$

m) $i\left(\sqrt{6} - \sqrt{6}i\right) - \left(\sqrt{2} + \sqrt{2}i\right) \times \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}i\right)$

3. Determine o valor de $\boldsymbol{a}$ para o qual:

a) $(1 - ai) + (3 + 4i)$ é um número real.

b) $(3a - 2i) + (1 + 3i)$ é um número imaginário puro.

c) $(2 - ai) + (a - i)$ é um número real.

d) $(3a - 4i) + (-6 + a^2 i)$ é um número real.

e) $(\ln a - 2i) + (-1 + 3i)$ é um número imaginário puro.

f) $(-\log a + 2i) + (2 + 3i)$ é um número imaginário puro.

4. Seja *A* o afixo do complexo $\boldsymbol{z = 2 - 3i}$. Indique as coordenadas do afixo *B* do complexo:

a) $z + z_0$, em que $z_0 = -1 - 3i$.

b) $z + z_0$, em que $z_0 = -2 + 4i$.

c) $z - z_0$, em que $z_0 = 3 - 2i$.

d) $z - z_0$, em que $z_0 = -1 + 3i$.

e) $z_0 - z$, em que $z_0 = 2 + i$.

f) $z_0 - z$, em que $z_0 = 1 - 3i$.

5. Seja *A* o afixo do complexo $\boldsymbol{z = 1 - i}$. Indique o complexo $\boldsymbol{z_0}$, de modo que o afixo *B* do complexo:

a) $z + z_0$ tenha as coordenadas (2, 3) .

b) $z + z_0$ tenha as coordenadas (–1, –2) .

c) $z + z_0$ tenha as coordenadas (0, 2) .

d) $z - z_0$ tenha as coordenadas (–3, 1) .

e) $z - z_0$ tenha as coordenadas (1, 4) .

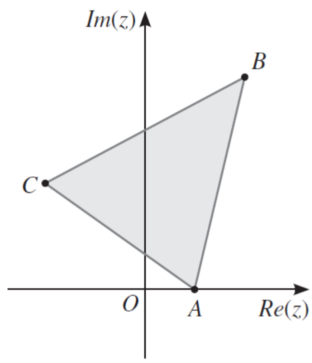
f) $z_0 - z$ tenha as coordenadas (–2, 0) .

g) $z_0 - z$ tenha as coordenadas (3, –1) .

h) $z - z_0$ tenha as coordenadas (–1, –1) .

6. Considere, no plano complexo, um triângulo [*ABC*] . Sabe-se que:

- *A* é o afixo do complexo $\boldsymbol{z_1 = 1}$;
- *B* é o afixo do complexo $\boldsymbol{z_2 = 2 + 4}$i ;
- *C* é o afixo do complexo $\boldsymbol{z_3 = -2 + 2}$i .



6.1. Determine o perímetro do triângulo [*ABC*] .
Apresente o resultado arredondado às décimas.

6.2. Determine a área do triângulo [*ABC*] .

6.3. Considere um ponto *D*, que é a imagem do afixo de *C* pela translação de vetor $\vec{u}(0, a)$. Sabe-se que a área do triângulo [*ABD*] é superior em uma unidade à área do triângulo [*ABC*] . Determine a.

Números complexos: Operações na forma algébrica

1. Calcule na forma $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{i}$, com, $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in$ IR:

a) $(3i)^2$ **b)** $(3-i)(-2-i)$ **c)** $\left(2+2\sqrt{2}i\right)^2$ **d)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\right)^2$

e) $\left(-\sqrt{2}i\right)^2$ **f)** $(2-2i)(3+4i)$ **g)** $(1+2i)(-1-3i)$ **h)** $(1-2i)^2$

j) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2$ **k)** $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2$ **l)** $(-2+i)(1+2i)$ **m)** $\left(\sqrt{2}-i\right)^2$

2. Simplifique:

g) i^3 **e)** i^{20} **i)** i^{-1000} **m)** i^{2019}

h) i^4 **f)** i^{50} **j)** i^{2000} **n)** i^{2099}

i) i^5 **g)** i^{-100} **k)** i^{2017} **o)** $(i^{-17})^{138}$

j) i^6 **h)** i^{500} **l)** i^{-2018}

3. Calcule na forma $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{i}$, com $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in$ IR:

a) $(4+i)(3-i)(2+2i)$ **b)** $2(3-i)-i(1+i)$

c) $(3i)(2i)(1-2i)(4-5i)$ **d)** $i(1+5i)-3i(2-4i)$

4. Calcule na forma $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{i}$, com $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in$ IR:

a) $(2i)^3$ **b)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^3$ **c)** $\left(\sqrt{3}i\right)^3$ **d)** $(1-i)^3$

e) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^3$ **f)** $(3+2i)^3$ **g)** $(-2+i)^3$ **h)** $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$

5. Determine $\boldsymbol{a}\in$ IR , de modo que:

a) $(a-2i)(3+3i)$ seja um número real. b) $(1+ai)(3+2i)$ seja um número imaginário puro.

c) $(a^2-i)(a+3i)$ seja um número real. d) $(a+i)^2+(1+ai)^2$ seja um número imaginário puro.

6. Escreva $\sqrt{\boldsymbol{6+8i}}$ na forma $\boldsymbol{a+bi}$, com $\boldsymbol{a,b} \in$ IR.

7. Sabe-se que $\boldsymbol{z = 2-3i}$ e $\boldsymbol{w = 1+2i}$. Calcule:

a) $\frac{1}{z}$ **b)** $\frac{1}{\bar{w}}$ **c)** $\frac{z}{1+i}+\frac{w}{1-i}$ **d)** $\frac{1}{w}$ **e)** $\frac{w}{z}$

f) $\frac{\bar{z}\bar{w}}{-2-i}$ g) $\frac{1}{\bar{z}}$ **h)** $\frac{\bar{z}}{\bar{w}}$ **i)** $\frac{1}{\bar{z}+\bar{w}}$

8.Determine o conjugado dos seguintes complexos:

a) $\frac{2+i}{1-i}$ **b)** $\frac{(1+i)^2}{3+i}-i^3$ **c)** $\frac{3+2i}{2+i}$ **d)** $\frac{(2-3i)(1+2i)^2}{1+i}-\frac{i^{11}(2-i)}{2}$

e) $\frac{-1-3i}{1-2i}$ **f)** $\frac{(1-4i)^2-(2+i)^2}{1+i}+\frac{i^7(1+i^{13})}{1-i}$

9. Determine o módulo dos seguintes complexos:

a) $z = 2-i$ **b)** $s = \frac{6-8i}{8+6i}$ **c)** $w = \frac{1-2i}{3+i}$ **d)** $t = \frac{2-4i}{\sqrt{2}-\sqrt{3}i}$

10. Seja $\boldsymbol{f}$ a função, de domínio $\mathbb{C}$, definida por $\boldsymbol{f(z) = (1-i)z^2-(3+2i)z+1+4i}$. Determine:

a) $f(1)$ **b)** $f(1+i)$ **c)** $f\left(\frac{1}{2-i}\right)$

11. Resolva, em $\mathbb{C}$, as seguintes equações e apresente os resultados na forma $\boldsymbol{a+bi}$, com $\boldsymbol{a,b} \in$ IR:

a) $z^2+9=0$ **b)** $(1+3i)z-i\bar{z}=7+5i$ c) $z^3+4z=0$

d) $z^2-15+8i=0$ e) $z^2+2z+4=0$ **f)** $z+|z|=8+4i$

g) $\frac{z-2i}{3-z}=1+3i$ **h)** $z+2|z|+2\bar{z}=5+\sqrt{3}i$ i) $\frac{i-z}{3+i}=z+1$

j) $z^2-2iz-5=0$ k) $z+2\bar{z}=3-2i$ **l)** $5z^2-8iz-13=0$

12. Considere, em $\mathbb{C}$, as equações $\boldsymbol{z^2 + kz - 1 = 0}$ e $\boldsymbol{z^2 + z + k = 0}$. Determine *k* , de modo que as duas equações tenham uma solução em comum.

13. Considere, em $\mathbb{C}$, a equação $\boldsymbol{az^2 + bz + c = 0}$, com $\boldsymbol{a \neq 0}$. Sabe-se que:

- $\boldsymbol{a, c} \in$ IR⁺ e $\boldsymbol{b} \in$ IR ;
- $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ estão em progressão geométrica de razão $\boldsymbol{r}$.

13.1. Mostre que as raízes da equação são da forma $z = \frac{-\sqrt{ac} \pm i\sqrt{3ac}}{2a}$.

13.2. Determine as raízes da equação quando:

a) $a = 1$ e $r = 2$ **b)** $b = 6$ e $r = 3$ **c)** $c = 50$ e $r = -5$

14. Considere, no plano complexo, os pontos *A* e *B* , afixos dos complexos $\boldsymbol{z_1 = 1 + i}$, $\boldsymbol{z_2 = -z_1}$, respetivamente.

14.1. Mostre que $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z - z_1| = |z - z_2| \Leftrightarrow z = a - ai$, com $a \in$ IR .

14.2. Seja *C* o afixo do complexo z_3 e $Re(z_3) < 0$. Considere o triângulo equilátero [*ABC*] .

14.2.1. Determine z_3 .

14.2.2. Represente o triângulo [*ABC*] no plano complexo.

14.2.3. Determine a área do triângulo [*ABC*].

Números complexos: Forma Trigonométrica

1. Mostre que os complexos seguintes são unitários:

$z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ **c)** $z_3 = \frac{15}{17} - \frac{8}{17}i$ **e)** $z_5 = -\frac{12}{13} - \frac{5}{13}i$

$z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ **d)** $z_4 = \frac{6\sqrt{2}}{19} + \frac{17}{19}i$ **f)** $z_6 = \frac{2\sqrt{22}}{11} - \frac{\sqrt{33}}{11}i$

2. Considere os complexos $\boldsymbol{z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}$ e $\boldsymbol{z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i}$.

2.1. Mostre que z_1 e z_2 são unitários.

2.2. Indique um argumento de:

a) z_1 **b)** $\frac{z_2}{z_1}$ **c)** $\overline{\left(\frac{\bar{z}_1}{z_2}\right)}$ **d)** z_2 **e)** $z_1 z_2$ **f)** $\overline{(\bar{z}_1 z_2)}$

g) $\frac{z_1}{z_2}$ **h)** $z_1 \bar{z}_2$

3. Escreva na forma $\boldsymbol{a + bi}$, $\boldsymbol{a, b}$ ∈ IR os seguintes números complexos:

a) $e^{i\frac{\pi}{6}}$ **b)** $4e^{-i\frac{\pi}{6}}$ **c)** $10e^{i\frac{5\pi}{6}}$ **d)** $e^{i\frac{5\pi}{3}}$ **e)** $\sqrt{6}\,e^{-i\frac{4\pi}{3}}$ **f)** $2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

g) $e^{-i\frac{3\pi}{4}}$ **h)** $\frac{4}{3}e^{i\frac{7\pi}{6}}$ **i)** $4e^{i\frac{\pi}{3}}$ **j)** $\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$ **k)** $8e^{-i\frac{\pi}{2}}$ **l)** $2\sqrt{2}e^{-i\frac{7\pi}{4}}$

4. Escreva os seguintes complexos na forma trigonométrica. Apresente os argumentos em radianos, na forma de racionais múltiplos de $\boldsymbol{\pi}$ ou, caso utilize a calculadora, apresente-os com 3 casas decimais.

a) $2i$ **g)** $\sqrt{3} - i$ **m)** $6\sqrt{3} + 6i$

b) -5 **h)** $-\sqrt{3} - i$ **n)** $3 + 4i$

c) $1 - i$ **i)** $-1 + \sqrt{3}i$ **o)** $1 - 2i$

d) $1 + \sqrt{3}i$ **j)** $-1 - i$ **p)** $-10 + 5i$

e) $-2 + 2\sqrt{3}i$ **k)** $3 - 3\sqrt{3}i$ **q)** $-3 - i$

f) $-2 - 2i$ **l)** $-5i$

5. Considere os números complexos $\boldsymbol{z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}}$, $\boldsymbol{z_2 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i}$ e $\boldsymbol{z_3 = -4i}$. Calcule, apresentando o resultado na forma trigonométrica:

a) $z_1 z_2$ **d)** $\frac{\overline{z_1}}{z_3}$ **f)** $\frac{iz_1 z_3}{4}$ **h)** $-\frac{iz_2 z_3^3}{z_1^2}$ **j)** $\frac{z_1}{z_2} \times \frac{2-2i}{1+i}$

b) $z_2 z_3$

c) $z_1 \overline{z_3}$ **e)** $\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_3}$ **g)** $\frac{-z_1 \bar{z}_2}{z_3^2}$ **i)** $\frac{\bar{z}_1^2 z_3^2}{128 z_2^3}$

6. Escreva os seguintes números complexos na forma *rw* , com $\boldsymbol{r} \in$ IR⁺ e $\boldsymbol{w} \in \mathbb{C}$, tal que |w| = 1 :

a) $-1 + 3i$ **b)** $1 + 3\sqrt{3}i$ **c)** $3 - 2\sqrt{2}i$ **d)** $\sqrt{2} + \sqrt{6}i$

7. Determine as raízes quadradas dos complexos seguintes. Apresente o resultado na forma trigonométrica.

a) $z = 9e^{i\frac{5\pi}{6}}$ **c)** $z = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$ **e)** $z = 25e^{i\frac{\pi}{6}}$

b) $z = 4\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$ **d)** $z = e^{i\pi}$ **f)** $z = 18e^{i\frac{2\pi}{5}}$

8. Determine as raízes indicadas. Apresente os resultados na forma algébrica:

a) $\sqrt[3]{8e^{i\frac{\pi}{2}}}$ **b)** $\sqrt[3]{27e^{i\pi}}$ **c)** $\sqrt[4]{64e^{i\frac{2\pi}{3}}}$

9. Determine as raízes indicadas. Apresente os resultados na forma trigonométrica:

a) $\sqrt[4]{-\boldsymbol{i}}$ **b)** $\sqrt[3]{\sqrt{\boldsymbol{3}} - \boldsymbol{i}}$ **c)** $\sqrt[3]{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{1} - \boldsymbol{i})}$ **d)** $\sqrt[3]{\frac{\boldsymbol{2-2i}}{\boldsymbol{2+2i}}}$ **e)** $\sqrt[3]{\left(\frac{\boldsymbol{1+i}}{\boldsymbol{1-i}}\right)^{\boldsymbol{3}}}$

10. Considere, em $\mathbb{C}$, a equação $\boldsymbol{z^n - 1 = 0}$. Resolva a equação para $\boldsymbol{n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}}$. Apresente o resultado na forma algébrica. Para $\boldsymbol{n \geq 3}$, os afixos das soluções da equação são os vértices de um polígono regular. Para cada caso, represente, no plano de Argand, esse polígono e determine o perímetro.

11. No plano complexo, sejam *A*, *B* e *C* os afixos dos complexos $\boldsymbol{z_1 = -2 + 3i}$, $\boldsymbol{z_2 = 1 - 2i}$ e $\boldsymbol{z_3 = 3 + 6i}$, respetivamente. Seja $\boldsymbol{w = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}}$.

Mostre que $\boldsymbol{w = e^{i\frac{\pi}{2}}}$.Conclua que o triângulo *[ABC]* é retângulo em *A* .

12. Determine o módulo e o argumento principal do complexo $\boldsymbol{z = 1 + \cos\theta + i\sin\theta}$ **e** $\boldsymbol{\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[}$. Sejam z_1 e z_2 dois complexos não nulos. Sabe-se que:

$$\boldsymbol{|z_1 z_2| = 1 \text{ e } Arg(z_1) = Arg(z_2) + \frac{\pi}{2}}$$

Determine $\boldsymbol{\bar{z}_1 z_2}$. Apresente o resultado na forma trigonométrica.

13. Represente as regiões do plano definidas pelas seguintes condições:

a) $|z - 1| = 3$

b) $|z + 2 - i| \leq 2$

c) $|z - 1| = |z + i|$

d) $|z - 1 - i| \leq 2 \ \wedge \ 0 \leq Re(z) \leq 1 \wedge Re\big((1 + i)z\big) \geq -2$

e) $\frac{\pi}{2} \leq Arg(z) \leq 2\pi \ \ \wedge |z| \leq 2$

f) $\frac{\pi}{4} \leq Arg(z) \leq \frac{3\pi}{4} \wedge 1 \leq |z - i| \leq 2$

g) $Im(z) \geq 1 \wedge |z - 2 - i| \leq 2 \wedge Re(1 - i)z) \geq \sqrt{3}$

h) $Im\big(z(1 + 2i)\big) \geq -1 \ \wedge \ |z + 2 - i| \leq 2 \wedge$

14. Sejam $\boldsymbol{z}$ e $\boldsymbol{w}$ dois complexos não nulos. Represente no plano de Argand as regiões do plano definidas pelas condições:$\boldsymbol{|z| = 12}$ e $\boldsymbol{|w - 3 + 4i| = 5}$

Determine o valor mínimo de $|z - w|$.

15. Sejam $\boldsymbol{z}$ e $\boldsymbol{w}$ dois complexos não nulos. Sabe-se que $\boldsymbol{|z| = 3}$. Represente no plano de Argand as regiões definidas por $\boldsymbol{|z| = 3}$ e por $\boldsymbol{w = -i + \frac{12}{z}}$**.**

Defina a região do plano definida por $w = -i + \frac{12}{z}$.

Proposta de Teste Números Complexos

Grupo I

1. Considere, em $\mathbb{C}$, os complexos $z = 2 + i(1 + 2\ \ln a)$ e $w = (3 - i \ln a^4)$, com $a \in$ IR⁺.

Se $z + w$ é um número real, qual é o valor de a?

(A) $a = e$ **(B)** $a = \sqrt{e}$ **(C)** $a = \frac{\sqrt{e}}{e}$ **(D)** $a = 1 - e$

2. Considere, em $\mathbb{C}$, os complexos $z = -i$ e $w = 1 + i$. Sejam as proposições:

- p: $\frac{-2z}{w} = w$ e q: $Arg(zw) = \frac{3\pi}{4}$

Qual das opções seguintes é uma proposição verdadeira?

(A) $\sim p \wedge q$ **(B)** $p \Leftrightarrow q$ **(C)** $\sim p \vee q$ **(D)** $q \Rightarrow \sim p$

3. Considere, em, $\mathbb{C}$, os complexos $z = 1 - 3i$ e $w = 2 + i^9$. Qual é o valor de $\left|\frac{\overline{w}}{z}\right|$?

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **(B)** $\frac{\sqrt{5}}{2}$ **(C)** $\sqrt{2}$ **(D)** $\sqrt{5}$

4. Considere, em $\mathbb{C}$, um número complexo *w* diferente de zero. Em qual das opções, está indicada a representação no plano da condição $|z - w| = |z + \overline{w}|$?

(A) Eixo real.

(B) Eixo imaginário.

(C) Bissetriz dos quadrantes pares.

(D) Bissetriz dos quadrantes ímpares.

5. Considere, em $\mathbb{C}$, os complexos $z = \frac{\sqrt{2}}{2}\, e^{i\frac{\pi}{3}}$ e $w = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$.

Qual dos números complexos seguintes corresponde a $i\bar{z}w$ na forma trigonométrica?

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}\, e^{i\frac{13\pi}{12}}$ **(B)** $\frac{\sqrt{2}}{2}\, e^{i\frac{5\pi}{12}}$ **(C)** $\sqrt{2}\, e^{i\frac{13\pi}{12}}$ **(D)** $\sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{12}}$

Grupo II

1. Considere, em $\mathbb{C}$, o complexo $z = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$.

1.1. Determine $\left(\bar{z} - \sqrt{6}\right)^5 \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{4}\right)^2$. Apresente o resultado na forma algébrica.

1.2. Seja $w = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$. Determine $\frac{w}{z}$. Apresente o resultado na forma trigonométrica.

2. Considere, em $\mathbb{C}$, o complexo $\boldsymbol{z_1 = -1}$. Sejam $\boldsymbol{z_1}$, $\boldsymbol{z_2}$ e $\boldsymbol{z_3}$ as raízes da equação $\boldsymbol{z^3 + z^2 + 9z + 9}$. Seja *A* o afixo de $\boldsymbol{z_1}$, *B* o afixo da raiz em que $Im(\boldsymbol{z}) > \boldsymbol{0}$ e *C* o afixo da restante raiz.

2.1. Determine o perímetro do triângulo *[ABC]*.

2.2. Construa o triângulo $[A'B'C']$ imagem do triângulo $[ABC]$ dada pela função $f(z) = iz + 1$.

3. Considere, em $\mathbb{C}$, a equação $\boldsymbol{z^6 = 1}$. Os pontos afixos das soluções da equação são vértices de um polígono regular.

3.1. Sejam z_1 e z_2 duas raízes da equação. Sabe-se que os pontos afixos são vértices consecutivos do polígono, e que $Arg(z_1) > Arg(z_2)$. Determine $\frac{z_1}{z_2}$ na forma algébrica.

3.2. Determine a área desse polígono.

4. Sejam *w* e *z* dois números complexos, tais que: $\boldsymbol{w = \frac{z-i}{2z+i}}$

Determine o conjunto dos números complexos *z*, tal que *w* seja um imaginário puro.

5. Considere, em $\mathbb{C}$, os complexos $\boldsymbol{z_1 = 2 + 2i}$ e $\boldsymbol{z_2 = 2z_1}$.

Represente graficamente a região *S* do plano definida pela condição:

$$\boldsymbol{1 \leq |z - z_1| \leq 2 \wedge Im(z) \geq Re(z_1) \wedge |z| \geq |z - z_2|}$$

Números complexos **Duração: 90 minutos**

Grupo I

1. Considere o complexo $z = 8 - 6i$. Qual das afirmações é verdadeira?

(A) O conjugado de z é $-8 - 6i$.

(B) O inverso de z é $\frac{1}{8} - \frac{1}{6}i$.

(C) O simétrico de z é $8 + 6i$.

(D) O módulo de z é 10.

2. Para um certo valor de k real, sabe-se que $1 + i$ é uma raiz da equação $x^2 + kx - k = 0$.

O valor de *k* é:

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** -1 **(D)** -2

3. Seja z um número complexo de argumento $\frac{\pi}{7}$.

Qual poderá ser um argumento do complexo resultante do produto de $-i$ por $\bar{z}$?

(A) $\frac{5\pi}{14}$ **(B)** $\frac{19\pi}{14}$ **(C)** $\frac{9\pi}{14}$ **(D)** $-\frac{5\pi}{14}$

4. Sejam $z = e^{i\frac{4\pi}{3}}$ e $w = -2 + 2i$. O valor de $z \times \frac{1}{w}$ é:

(A) $2\sqrt{2}\, e^{i\frac{7\pi}{12}}$ **(B)** $\frac{\sqrt{2}}{4}\, e^{i\frac{\pi}{12}}$ **(C)** $\frac{\sqrt{2}}{4}\, e^{i\frac{7\pi}{12}}$ **(D)** $2\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{12}}$

5. A representação geométrica, no plano complexo, da condição $z + \bar{z} = 24 \wedge z\bar{z} \leq 169$ é uma linha. O comprimento dessa linha é:

(A) 10 **(B)** 5 **(C)** 25 **(D)** 12

Grupo II

1. Considere os números complexos $z_1 = 3 - 2i$ e $z_2 = -1 + i$.

1.1 Mostre que $\overline{\overline{z_1} + \overline{\overline{z_2}}} - (2z_1 + i)$ é um número real.

1.2 Determine $\frac{{z_1}^2 - i^{35}}{z_2}$.

2. Considere os números complexos $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{4}}$ e $z_3 = 27e^{i\frac{\pi}{6}}$.

2.1 Determine:

2.1.1 $6z_1 + 2z_2$ e apresente o resultado na forma $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$;

2.1.2 as raízes quadradas de $z_1 \times z_2$ e apresente o resultado na forma trigonométrica.

2.2 Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $-i^{11}z^3 = z_3$.

3. Considere a família de números complexos $z_m = \left(\sqrt{2}m - 1\right) + \left(\frac{m^2}{5} - 1\right)i, m \in \mathbb{R}$. Determine o(s) valor(es) do parâmetro m tal que:

3.1 z_m seja um número real; 3.2. z_m seja um imaginário puro;

3.2 $Re(z_m) = Im(z_m)$.

4. Sabendo que $-2 + 2i$ é uma das raízes quartas de z, determine, na forma $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$, as restantes raízes.

5. Considere os números complexos $z_1 = \sqrt{8} + \sqrt{8}i$ e $z_2 = e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Determine o valor exato de $\cos\frac{5\pi}{12}$, atendendo a que $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$.

6. Represente no plano de Argand os pontos do plano que verificam a seguinte condição:

$$|z - i| \leq 2 \wedge Re(z) \leq 0 \wedge \frac{\pi}{4} \leq \arg(z + 2) \leq \frac{\pi}{2}$$