PROPOSTA DE TESTE GLOBAL N.º 4

TEMAS: PROBABILIDADES E COMBINATÓRIA, EXPONENCIAIS E LOGARITMOS

MATEMÁTICA A – 12.º ANO – JANEIRO DE 2016

"Conhece a Matemática e dominarás o Mundo."
Galileu Galilei

GRUPO I – ITENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. Considere uma caixa com vinte compartimentos numerados de 1 a 20. Pretende-se guardar nessa caixa doze bolas, uma por compartimento: cinco pretas, indistinguíveis; quatro brancas numeradas de 1 a 4; três azuis, numeradas de 1 a 3.

De quantas maneiras distintas se pode fazê-lo?

A $^{20}C_5 \times {}^{15}A_4 \times 3!$

B $^{20}C_{12} \times {}^{12}C_5 \times 7!$

C $^{20}C_5 \times 7!$

D $^{20}C_{12} \times {}^{12}C_5 \times 4! \times 3!$

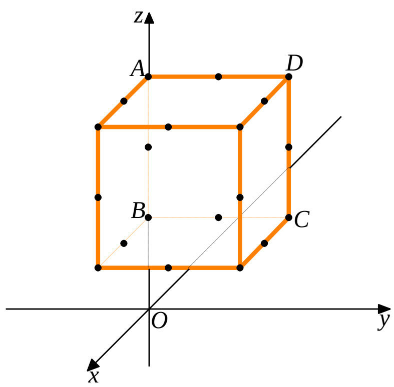
2. Seja S o espaço de resultados associados a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos possíveis ($A \subset S$ e $B \subset S$). Sabe-se que $P(A) + 0{,}75P(B) = 1$ e que $P(A|B) = 0{,}5$.

Qual é o valor de $P\left((A \cup B)|\overline{A}\right)$?

A $\frac{1}{4}$ **B** $\frac{1}{3}$ **C** $\frac{2}{3}$ **D** $\frac{3}{4}$

3. Na figura está representado num referencial o.n. $Oxyz$ um cubo no qual se assinalaram vinte pontos, os vértices e pontos médios das suas arestas. Quatro dos vértices do cubo estão identificados com as letras A, B, C e D.

Sabe-se que a aresta $[AB]$ está contida no eixo Oz e a face $[ABCD]$ contida no plano yOz.



Escolhem-se, simultaneamente e ao acaso, dois dos pontos assinalados.

Qual é a probabilidade de definirem uma recta perpendicular ao eixo Oy?

A $\frac{8}{95}$ **B** $\frac{12}{95}$ **C** $\frac{16}{95}$ **D** $\frac{31}{95}$

4. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x)=\log\left(2\sqrt{25^{x^2}}\right)+\log\left(625\times 2^{x^2+3}\right)$.

Qual das seguintes expressões também pode definir a função g?

A $g(x)=2x^2+3$ **B** $g(x)=x^2+4$ **C** $g(x)=2x^2+4$ **D** $g(x)=x^2+3$

5. Sejam a, b e c três números reais tais que $\log_a b\times\log_c a=2$.

Qual é o valor de $\log_c\left(\frac{b^3}{c^7\sqrt{b}}\right)$?

A -2 **B** -1 **C** 1 **D** 2

Grupo II – Itens de Resposta Aberta

1. Seja S o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória e sejam A e B dois acontecimentos possíveis ($A\subset S$ e $B\subset S$).

1.1. Mostre que $P\left(A|\overline{B}\right)\times\left(\frac{1}{P(B)}-1\right)-\frac{P(A)}{P(B)}=P\left(\overline{A}|B\right)-1$.

1.2. Uma caixa contém bolas pretas e encarnadas numeradas com números naturais.

Sabe-se que:

- O número de bolas pretas é o dobro do número de bolas numeradas com um número par.
- Entre as bolas numeradas com um número ímpar, 70% são pretas.
- Entre as bolas numeradas com um número par, dois quintos são encarnadas.

Escolhendo ao acaso uma bola da caixa, qual é a probabilidade de ser preta? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

Sugestão: Pode utilizar a igualdade enunciada em 2.1. Nesse caso, deverá começar por caracterizar claramente os acontecimentos A e B, no contexto da situação apresentada.

2. Um grupo de amigos é constituído por rapazes e raparigas, sendo que o número de rapazes excede o número de raparigas em uma unidade. Seja n o número de rapazes, com $n\in\mathbb{N}$.

2.1. O grupo de amigos vai colocar-se numa só fila para uma foto, com os rapazes sentados em lugares consecutivos. Sabendo que o número de maneiras de o fazerem é 14400, determine o valor de n.

2.2. Considere $n = 6$. O grupo de amigos vai ao cinema, compram bilhetes para uma só fila da sala e distribuem-nos ao acaso por todos.

a) Qual é a probabilidade de não ficarem duas raparigas juntas? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

b) Vão ser escolhidos ao acaso sete amigos do grupo para formar uma lista para concorrer às eleições para a associação de estudantes da escola que frequentam. Nessa lista há um presidente, um vice-presidente, um tesoureiro e um relações públicas. Os restantes membros desempenharão tarefas indiferenciadas.

Qual é a probabilidade de os quatro primos serem escolhidos para os lugares de presidente, vice-presidente, tesoureiro e relações públicas?

Uma resposta a este problema é $\frac{4!}{{}^{11}A_4}$. Numa pequena composição explique porquê. A composição deve incluir:

- uma referência à regra de Laplace;
- uma explicação para o números de casos possíveis;
- uma explicação para o número de casos favoráveis.

3. Numa caixa estão oito bolas, uma numerada com o número 1, duas com o número 2 e cinco com o número 3.

3.1. Considere a experiência aleatória que consiste em retirar, simultaneamente e ao acaso, seis bolas da caixa e em seguida formar, também ao acaso, um número de seis algarismos. Sejam A e B os acontecimentos:

A: «são retiradas da caixa quatro bolas com o número 3 e as duas com o número 2»

B: «o número formado é uma capicua»

Sem recorrer à fórmula da probabilidade condicionada, indique, justificando, o valor de $P(B|A)$. Apresente o resultado na forma de dízima.

3.1. Considere a experiência aleatória que consiste em retirar, ao acaso, sucessivamente e sem reposição, bolas da caixa. Seja X a variável aleatória:

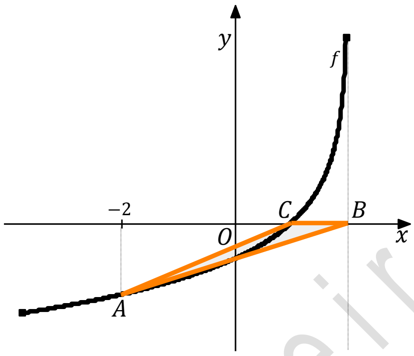
X: «número de extracções até sair a primeira bola numerada com o número 3»

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X.

4. Considere a função f, de domínio $]-\infty, 2]$, definida por $f(x) = 1 - \log_3(6 - 3x)$.

4.1. Determine o conjunto solução da inequação $f(x) - f(1-2x) \geq 1 + \log_3 x$.

4.2. Na figura estão representados, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f e um triângulo $[ABC]$.



Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao gráfico de f e tem abcissa -2
- o ponto B pertence ao eixo Ox e à assimptota do gráfico de f
- o ponto C pertence ao eixo Ox e ao gráfico de f

Mostre que a área do triângulo $[ABC]$ é igual a $\log_3 2$.

4.3. Caracterize a função f^{-1}, função inversa de f.

4.4. Determine o conjunto solução da equação $f^{-1}(x)+3^{x+1}=0$.

5. A massa, m, em miligramas, do isótopo radioactivo Zinco – 65 (Z65) relaciona-se com tempo, t, medido em anos, através da fórmula:

$$t(m)=-0{,}965\ln(m)+a$$

Sendo a uma contantes real.

5.1. Num certo instante inicial foi colocado em repouso uma amostra de cinco miligramas de Z65. Qual é o valor de a? Apresente o resultado arredondado às centésimas.

5.2. Mostra que $t\left(\frac{m}{3}\right)-t(m)$ é constante e interpreta o resultado no contexto do problema. Apresente o resultado em anos e meses, meses arredondados às unidades.

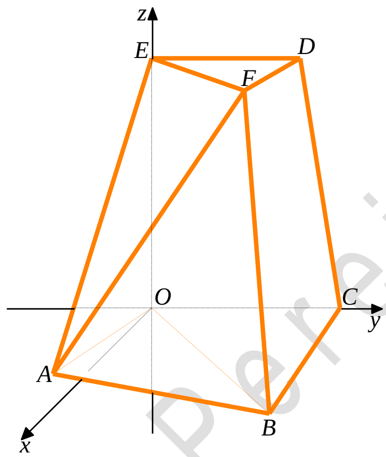
5.3. Determine o valor de x tal que $t(xm)=t(m)+0{,}6692$. Interprete o resultado no contexto do problema. Apresente o resultado arredondados às decimas.

5.4. Escreva m em função de t. Apresente o resultado na forma Ae^{Bt}. Apresente o valor de B arredondados às milésimas.

5.5. Mostre que $\dfrac{m(t+2)}{m(t)}$ é constante e interprete o resultado no contexto do problema.

Exercício Extra (Geometria Analítica)

Na figura está representado num referencial o.n. $Oxyz$ o sólido $[ABCDEF]$.



Sabe-se que:

- uma equação do plano ABF é $6x+2y+z=34$
- uma equação do plano BCF é $8x+32y+5z=192$
- uma equação vectorial da recta AF é:

$$(x,y,z)=(6-3k,5k-1,8k),\quad k\in\mathbb{R}$$

- o ponto A pertence ao plano xOy e o ponto C ao eixo Oy

a) Escreva as equações cartesianas da recta BF.

b) Escreva uma equação do plano ACF.

F I M

Solucionário

Grupo I – Itens de escolha múltipla

1. B **2.** C **3.** D **4.** B **5.** A

Grupo II – Itens de resposta aberta

1.2. $\frac{2}{3}$

2.1. $n=5$

2.2. **a)** $\frac{1}{22}$

3.2. $0,2$

3.3.

x_i	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{5}{8}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{5}{56}$	$\frac{1}{56}$

4.1. $\left]0,\frac{1}{3}\right]\cup[1,2[$

4.3. $D_{f^{-1}}=\mathbb{R}$; $f^{-1}(x)=2-\frac{1}{3^x}$

4.4. $\{-1\}$

5.1. $a\approx 1,55$

5.2. $t\left(\frac{m}{3}\right)-t(m)\approx 1,06$. A massa de Z65 reduz-se $\frac{2}{3}$ ($\approx 66,7\%$) a cada ano e um mês, aproximadamente ($0,06\times 12\approx 1$).

5.3. $x\approx 0,5$. A massa de Z65 reduz-se 50% a cada 244 dias, aproximadamente ($0,6692\times 365\approx 244$). Ou, a semi-vida do Z65 é, aproximadamente, de 244 dias.

7.4. $m(t)=\underbrace{e^{\frac{a}{0,965}}}_{A}\times e^{-1,036t}$

7.5. $\frac{m(t+2)}{m(t)}\approx 0,126$. A massa de Z65 reduz-se, aproximadamente, 87,4% a cada dois anos ($100\%-12,6\%=87,4\%$).

E.E. **a)** Por exemplo: $x=y-1=\frac{32-z}{8}$ **b)** $56x+48y-9z=288$