Proposta de Teste Global n.º 3

Temas: Cálculo Diferencial II

Matemática A – 12.º Ano – Janeiro de 2016

"Conhece a Matemática e dominarás o Mundo."
Galileu Galilei

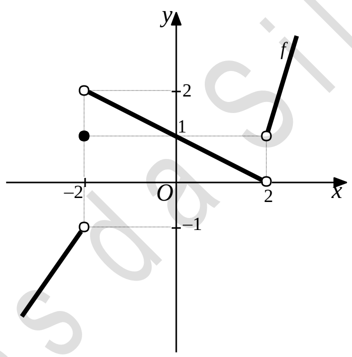
Grupo I – Itens de Escolha Múltipla

1. Sejam a, b e c as medidas dos comprimentos dos lados de um triângulo rectângulo, com $a < b < c$.

Sabendo que $\log_4(c-a)+\log_4(c+a)=3$, qual é o valor de b?

A 4 **B** 6 **C** 8 **D** 12

2. Na figura está representado, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função f de domínio $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.



Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = \dfrac{\ln\left(\frac{1}{n}\right)}{n^{15}}$. Qual é o valor de $\lim f(-u_n-2)$?

A -1 **B** 0 **C** 1 **D** 2

3. Seja f a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por:

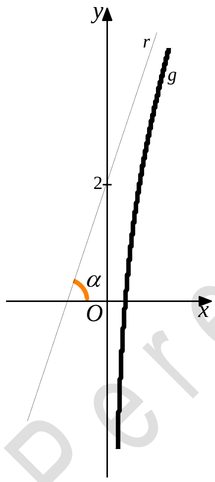
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-6x+5}{x^2-1} & \text{se} \quad x<1 \\ \dfrac{e^{b^2x-b^2}-1}{\sqrt{x}-x} & \text{se} \quad x>1 \end{cases}, \text{ com } b\in\mathbb{R}^+$$

Sabendo que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ existe, qual é o valor de b?

A -1 **B** 1 **C** 2 **D** 4

4. Na figura está representado, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função g de domínio $\mathbb{R}^+$ e uma recta r, assimptota do gráfico de g.

Sabe-se que:

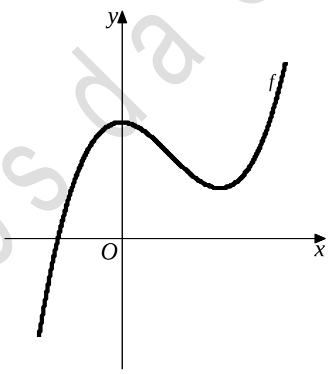


- α é a inclinação da recta r, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$;
- $\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$;
- a recta r intersecta o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0,2)$.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2}{g(x)} - x\right)$?

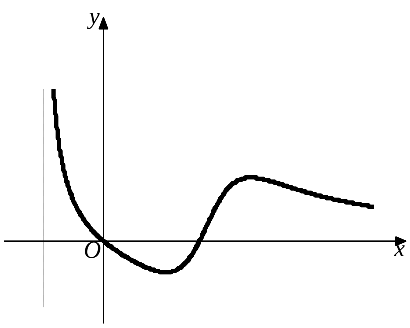
A -6 **B** $-\frac{2}{3}$ **C** $\frac{2}{3}$ **D** 6

7. Na figura está representado em referencial o.n. xOy parte do gráfico de uma função f de domínio $\mathbb{R}$.

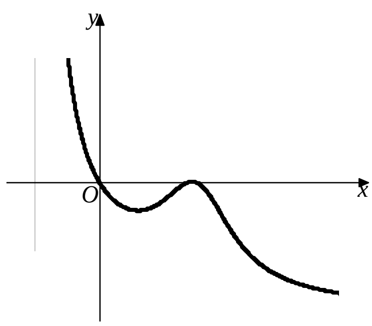


Seja g a função definida por $g(x) = \ln(f(x))$. Em qual das opções seguintes pode estar representado parte do gráfico da função g' , função derivada de g.

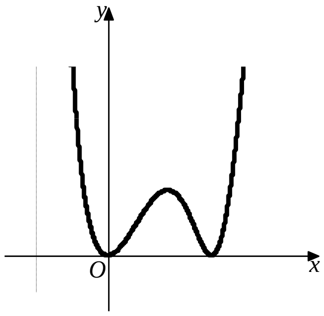
A



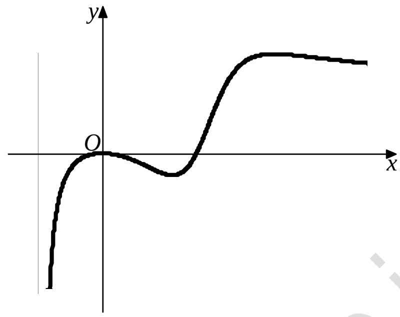
B



C



D



Grupo II – Itens de Resposta Aberta

1. O número de bactérias numa cultura, em centenas, varia, em função do tempo, em horas, de acordo com a função:

$$B(t)=\begin{cases} k\times 1{,}1^{bt} & \text{se} \quad 0\le t\le 10 \\ \dfrac{k\times 1{,}1^{bt}}{0{,}5+0{,}5\times 1{,}1^{bt-20}} & \text{se} \quad t>10 \end{cases}$$

, com k e b, constantes reais positivas.

1.1. Sabendo que a função B é contínua, mostre que $b=2$.

1.2. Nas primeiras dez horas, qual é o aumento, em percentagem, da população de bactérias a cada duas horas? Apresente o resultado arredondado às décimas.

1.3. Determine o instante depois das primeiras dez horas em que o número de bactérias na cultura é igual a dez vezes o número de bactérias inicial. Apresente o resultado em horas e minutos, minutos arredondados às unidades. Caso proceda a arredondamentos, conserve no mínimo quatro casas decimais.

1.4. Com o passar do tempo, o número de bactérias na cultura tende para 2691. Qual é o valor de k? Apresente o resultado arredondado às unidades.

2. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\ln\left(\sqrt{\dfrac{e^{6x+4+\ln 4}}{4x^4+16x^2+16}}\right)-2$.

2.1. Mostre que $f(x)=3x-\ln\left(x^2+2\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}$

2.2. Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação $3x-\ln(3-x)-f(x)\ge\ln(2x+2)$.

2.3. Estude a função g, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, definida por $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ quanto à existência de assimptotas do seu gráfico. Caso existam, indica as suas equações.

3. Considera a função g, de domínio $\mathbb{R}$, tal que a recta de equação $y = 6x - 2$ é assimptota oblíqua do seu gráfico, quando $x \to \pm\infty$.

Seja f a função de domínio $\mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = \dfrac{xg(-x)}{g(x)}$.

Mostre que a recta de equação $y = -x - \dfrac{2}{3}$ é assimptota do gráfico de f.

4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x\ln x - 2x & \text{se} \quad x \geq 1 \\ \dfrac{2e^{0,5-0,5x}}{x-2} & \text{se} \quad x < 1 \end{cases}$$

4.1. Mostre que $f'(1) = -1$ e escreva a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

4.2. Seja $g(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x}$. Mostre que $(f \circ g)'(-1) = -\dfrac{1}{3}$

4.3. Estude a função f quanto à monotonia e existência de extremos relativos.

4.4. Determine $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ e conclua sobre a existência de assimptota horizontal do gráfico de f, quando $x \to -\infty$.

5. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $h(x) = x^3 - 6\ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

5.1. Estude a função h, quanto ao sentido das concavidades e à existência de pontos de inflexão do seu gráfico.

5.2. Mostre que o gráfico de h e a bissectriz dos quadrantes pares se intersectam pelo menos uma vez no intervalo $\left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$.

5.3. Considere a recta r definida por $2y - x = 4$. A recta r intersecta o gráfico de h em três pontos A, B e C, sendo que A tem a menor abcissa e C tem a maior abcissa.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determine a área do triângulo $[AOC]$.

Na sua resposta deve:

- reproduzir o(s) gráfico(s) (devidamente identificado(s)) que achar necessário(s) para a resolução do problema;
- representar o triângulo $[AOC]$;

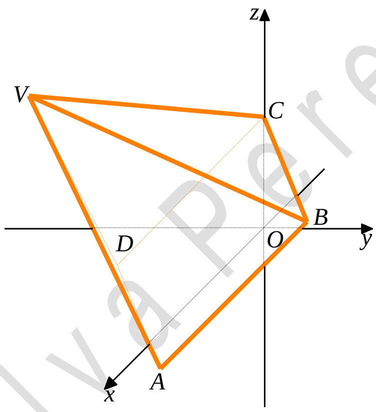
- indicar as coordenadas dos pontos A e C, arredondadas às milésimas;

- indicar a área do triângulo $[AOC]$, arredondada às décimas.

Exercício Extra (Geometria Analítica)

Na figura está representada, em referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide $[ABCDV]$ cuja base é o quadrilátero $[ABCD]$.

Sabe-se que:



- o ponto V tem a cota igual a 5 e abcissa positiva;
- o ponto A tem pertence ao plano xOz;
- a abcissa do ponto A é o dobro da abcissa do ponto V;
- O ponto C pertence ao eixo Oz;
- uma equação do plano ACV é $5x+8y+10z=30$;
- $\overrightarrow{AV}\cdot\overrightarrow{CA}=-56$

a) Mostre que $A(8,0,-1)$ e que $V(4,-5,5)$.

Sugestão: designe por a, com $a>0$, a abcissa do ponto V.

b) Admita que $D(0,-4,-1)$. Mostre que uma condição que define o plano ABC é $x-2y+2z=6$ e determine a altura da pirâmide.

F I M

Solucionário

Grupo I – Itens de escolha múltipla

1. C **2.** D **3.** B **4.** B **5.** A

Grupo II – Itens de resposta aberta

1.2. Aproximadamente 46,4% **1.3.** Passadas 15 horas e 35 minutos, aproximadamente. **1.4.** $k \approx 2$

2.2. $x \in \left]-1,-\frac{2}{3}\right] \cup \left[2,3\right[$ **2.2.** A.V: $x=0$. A.H.: $y=3$, quando $x \to \pm\infty$

4.1. $y=-x-1$

4.3. f é crescente em $\left]-\infty,-0\right]$ em $\left[e,+\infty\right[$, é decrescente em $\left[0,e\right]$, tem mínimo relativo em $x=e$ e tem máximo relativo em $x=0$.

4.4. $-\infty$; quando $x \to -\infty$ o gráfico de f não tem assimptota horizontal.

5.1. o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $\left]-\infty,0\right[$ e em $\left]0,\sqrt[3]{2}\right]$, tem a concavidade voltada para cima em $\left[\sqrt[3]{2},+\infty\right[$ e tem ponto de inflexão em $x=\sqrt[3]{2}$.

5.3. $A_{[AOC]} \approx 2,9$

E.E. **a)** 6