Proposta de Teste Intermédio n.º 2

Matemática A – 12.º Ano

"O Binómio de Newton é tão belo como a Vénus de Milo. O que há é pouca gente a dar por isso."
Álvaro de Campos

Grupo I – Itens de Escolha Múltipla

1. Seja x um número real. Quantas soluções tem a equação ${}^{x^2}C_x - {}^{x^2+1}C_{49-x} = -{}^{x^2}C_{x+1}$?

A uma **B** duas **C** três **D** quatro

2. Um código de acesso às instalações de uma fábrica é constituído por três letras, seguidas de três algarismos que são seguidos de mais quatro letras.

Suponha que o código só admite as letras do conjunto $X = \{A, B, E, F, H, L, M, R, S\}$ e os algarismos do conjunto $Y = \{0{,}3{,}4{,}5{,}8\}$. Um exemplo de código é $\text{ABB} - 444 - \text{FFML}$.

Alguns destes códigos satisfazem as seguintes condições:

- têm exactamente quatro letras iguais e não têm mais letras repetidas;
- os algarismos são todos iguais.

Quantos são estes códigos?

A $15\,120$ **B** $378\,000$

C $529\,200$ **D** $13\,230\,000$

Exercício extra:

a) Escolhendo ao acaso um destes códigos, qual é a probabilidade de ter as letras todas distintas e a soma dos algarismos ser 8? Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às décimas.

b) Um dos funcionários da empresa tem apenas a informação que as letras do código são vogais e que os algarismos são distintos. Qual é a probabilidade de aceder às instalações da empresa à segunda tentativa. Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

3. Seja S o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos possíveis ($A \subset S$ e $B \subset S$). Sabe-se que $P(A) = 0{,}4$ e $P(\overline{B}) = 0{,}2$. Qual pode ser o valor de $P(\overline{A}|B)$?

A $0{,}4$ **B** $0{,}6$ **C** $0{,}8$ **D** $0{,}9$

4. A distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é dada pela tabela:

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{n!}$	$\frac{1}{2p}$	$\frac{6}{p^2}$	$\frac{15}{n!}$

(n e p designam números reais positivos)

Sabe-se que $P(1 < X \leq 3) = \frac{5}{6}$. O valor de n e o valor médio da variável aleatória X são, respectivamente:

A 5 e $\frac{23}{8}$ **B** 4 e $\frac{25}{8}$ **C** 5 e $\frac{25}{8}$ **D** 4 e $\frac{23}{8}$

5. Considere o desenvolvimento de $\left(\frac{x^3}{y} - \sqrt[3]{y}\right)^n$, com $y \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}_0$. Um dos termos deste desenvolvimento tem parte literal igual a $x^{30}y^{-8}$.

Escolhendo, simultaneamente e ao acaso, três dos termos deste desenvolvimento, qual é a probabilidade do produto dos seus coeficientes ser negativo?

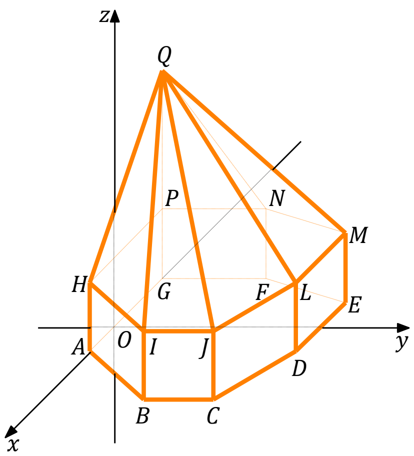
A $\frac{42}{85}$ **B** $\frac{80}{161}$ **C** $\frac{81}{161}$ **D** $\frac{43}{85}$

GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

1. Na figura está representado num referencial o.n. $Oxyz$ um sólido $[ABCDEFGHIJLMNQ]$. O sólido é constituído por um prisma heptagonal e por uma pirâmide heptagonal. O polígono $[HIJLMNP]$ é simultaneamente base do prisma e da pirâmide.

Sabe-se que:

- a face $[AGQH]$ está contida no plano xOz;
- a face $[DEML]$ é paralela ao plano xOz;
- as faces $[FNQG]$ e $[BCJI]$ são paralelas ao plano yOz;
- Os pontos A, D, L e H têm a mesma abcissa;
- Os pontos B, F, N e I têm a mesma ordenada;
- A base $[ABCDEFG]$ está contida no plano xOy.



1.1. Escolhem-se, simultaneamente e ao acaso dois vértices do sólido. Qual é a probabilidade de definirem uma diagonal espacial do sólido? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

1.2. Escolhendo, simultaneamente e ao acaso três vértices do sólido, qual é a probabilidade de definirem um plano perpendicular a Ox ou perpendicular a Oz? Apresente o resultado na forma dizima com quatro casas decimais.

1.3. Dispõe-se de dez cores (amarelo, azul, encarnado, preto, branco, verde, roxo, laranja, rosa e castanho) para colorir o sólido. Pretende-se que sejam respeitadas as seguintes condições:

- cada face é pintada de uma só cor;
- a base $[ABCDEFG]$ só pode ser pintada de preto, branco ou azul;
- cada uma das sete faces do sólido, perpendiculares a xOy, é pintada de amarelo, branco, verde ou roxo, não podendo serem pintadas todas com a mesma cor;
- duas faces laterais do sólido, oblíquas a xOy, não podem ser pintadas com a mesma cor.

De quantas maneiras diferentes pode ser pintado o sólido?

Uma resposta a este problema é $3 \times ({}^{4}A'_{7} - 4) \times {}^{10}A_{5}$. Numa pequena composição explique porquê.

1.4. Considere o seguinte jogo:

- um jogador, escolhe, simultaneamente e ao acaso, três dos 16 pontos marcados na figura (incluído a origem);
- se os três vértices escolhidos estiverem marcados com uma vogal, o jogador ganha 6 pontos;
- se entre os três vértices escolhidos apenas um ou apenas dois estiverem marcados com uma vogal, o jogador ganha 2 pontos;
- se entre os três vértices escolhidos nenhum estiver marcado com uma vogal, o jogador perde 1 ponto.

Qual é a pontuação média por cada jogada?

Exercício Extra: Considere a figura anterior nas mesma condições do enunciado e considere ainda que:

- o ponto Q pertence ao plano xOz e tem abcissa -4;
- uma equação que define o plano QJL é $2x + 8y + 15z = 82$;
- uma equação que define o plano CDL é $x + 4y - 26 = 0$.

a) Mostre que uma condição que define a recta JL é $\frac{26-x}{4} = y \quad \wedge \quad z = 2$.

b) Escreve uma equação do plano perpendicular à recta JL que contém o ponto Q.

c) Sejam R e S os pontos de intersecção da recta JL com os planos xOz e QGF, respectivamente. Determine o volume da pirâmide $[RPSQ]$.

d) Mostre que $\overrightarrow{HQ} \cdot \overrightarrow{QF} = -24$.

2. Seja S o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos possíveis ($A \subset S$ e $B \subset S$), tal que $P\left((A \cup B)\middle|(A \cup \overline{B})\right) = \frac{P(A)}{P(B)\times\left(1+P(A)\right)}$.

Mostre que A e B são acontecimentos independentes se e só se B e $\overline{B}$ forem equiprováveis.

3. Num grupo de amigos, todos licenciados em Matemática ou em Engenharia, sabe-se que:

- 40% das mulheres e $\frac{3}{5}$ dos homens são licenciados em Matemática;
- o número de mulheres é metade do número de amigos licenciados em Matemática.

Escolhe-se ao acaso um destes amigos.

3.1. Qual é a probabilidade ser mulher? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

3.2. Qual é a probabilidade de ser homem, sabendo que é licenciado em Engenharia? Apresente o resultado na forma de percentagem.

4. Numa escola a variável aleatória X: «altura dos alunos da escola» segue uma distribuição normal de valor médio $1{,}65$ metros. Sabe-se que $P(X < 1{,}50) = p$, com $p \in \mathbb{R}$.

Sabendo que numa amostra de seis alunos dessa escola, a probabilidade de exactamente três terem altura entre $1{,}65$ metros e $1{,}80$ metros é $27{,}648\%$, determine o valor de p. Apresente o resultado na forma de dízima.

Solucionário

Grupo I – Itens de Escolha Múltipla

1. B **2.** C **Exercício Extra:** **a)** $\approx 0{,}4\%$ **b)** $\frac{1}{7680}$ **3.** B **4.** A **5.** D

Grupo II – Itens de Resposta Aberta

1.1. $\frac{38}{91}$ **1.2.** $\approx 0{,}1841$ **1.4.** $0{,}85$ pontos por jogada.

Exercício Extra:

b) $-4x + y = 16$ **c)** 150

3.1. $\frac{3}{11}$ **3.2.** 64%

4. $0{,}1$