Proposta de Teste Intermédio n.º 1

Matemática A – 12.º Ano

"Pascal e Fermat criaram um mundo novo: submeteram o acaso à ordem, o arbitrário à lei."
Bell

Grupo I – Itens de Escolha Múltipla

1. De um conjunto de sete homens e cinco mulheres pretendem-se escolher quatro pessoas para ocuparem quatro cargos distintos na administração de uma empresa. Sabe-se que todos têm as mesmas possibilidades de serem escolhidos. De quantas maneiras pode ser feita a escolha de modo que pelo menos três desses cargos sejam ocupados por mulheres?

A $7 \times {}^5C_3 + {}^5C_4$

B $7 \times 4 \times {}^5A_3$

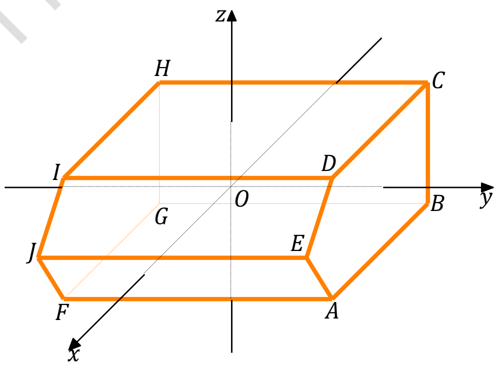
C $7 \times {}^5C_3 \times 4! + {}^5A_4$

D $7 \times {}^5A_3 + {}^5A_4$

2. Na figura está representado num referencial o.n. $Oxyz$ um prisma pentagonal $[ABCDEFGHIJ]$.

Sabe-se que:

- as bases pentagonais são paralelas ao plano xOz;
- a face $[BCHG]$ e o plano ADI são paralelos ao plano yOz;
- as faces $[ABGF]$ e $[DCHI]$ são paralelas ao plano xOy.



Escolhendo ao acaso dois vértices deste prisma, qual é a probabilidade de serem extremos de uma aresta perpendicular ao eixo Oy?

A $\frac{2}{15}$

B $\frac{2}{9}$

C $\frac{4}{15}$

D $\frac{4}{9}$

Exercício extra: Escolhem-se, simultaneamente e ao acaso, três vértices do prisma. Qual é a probabilidade de definirem um plano paralelo ao eixo Oy?

3. Seja S o espaço de resultados associados a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos possíveis ($A \subset S$ e $B \subset S$). Sabe-se que $P(\bar{A} \cup B) = 0{,}9$; $P(A \cup \bar{B}) = 0{,}6$ e $P(B) = 3P(A)$.

Qual é o valor de $P(A)$?

A 0,15

B 0,20

C 0,25

D 0,30

4. Um dado cúbico equilibrado com as faces numeradas com os números 1, 1, 2, 2, 4, e 6 é lançado seis vezes. Considere os acontecimentos:

A: «sair face numerada com um número par no máximo uma vez»

B: «sair face numerada com um número par no máximo duas vezes»

Qual é o valor de $P(A|B)$?

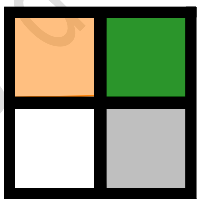
A $\frac{13}{729}$ **B** $\frac{12}{73}$ **C** $\frac{13}{73}$ **D** $\frac{72}{73}$

5. Considere uma variável aleatória X com distribuição normal. Sabe-se que $P(X < a) = P(X > b) = 0{,}02275$. Qual é o desvio padrão da variável aleatória X?

A $\frac{a+b}{4}$ **B** $\frac{b-a}{2}$ **C** $\frac{a+b}{2}$ **D** $\frac{b-a}{4}$

GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

1. Na figura está a representação de uma caixa com quatro divisões. O Francisco trabalha numa empresa que fabrica jóias com pedras preciosas. No final de um dia de trabalho tem de arrumar na caixa, seis Ametistas e seis Dolomitas, de modo que fiquem exactamente três pedras em cada divisão. Admita que não existem duas pedras iguais.



1.1. De quantas maneiras pode o Francisco arrumar as pedras preciosas na caixa?

Exercício Extra: Admitindo que as arruma ao acaso, qual é a probabilidade de em cada divisão não ficarem pedras preciosas de tipos diferentes? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

1.2. Escolhendo, simultaneamente e ao acaso, sete das doze pedras, qual é a probabilidade de pelo menos cinco serem do mesmo tipo de pedra preciosa? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

1.3. No dia seguinte, o Francisco tem de fazer uma faixa de cabedal incrustada com as doze pedras preciosas que arrumou na caixa e com mais algumas Jades, todas distintas.

Suponha que as pedras irão ser colocadas numa só fila. Depois de fazer alguns cálculos, o Francisco determinou que o número de maneiras de colocar as pedras de modo que as Ametistas fiquem juntas e que as Jades também fiquem juntas é $696\ 729\ 600$.

Quantas Jades serão colocadas na faixa de cabedal?

2. Considere duas caixas, A e B que contêm bolas pretas e brancas com a composição indicada na figura.

Caixa A Caixa B

Considere um dado viciado com as faces numeradas de 1 a 6, tal que a probabilidade de sair face com o número 1 é o dobro de sair qualquer uma das outras faces.

2.1. Considere a experiência aleatória que consiste em lançar o dado e retirar uma bola de uma das caixas. Se sair face numerada com o número 1, retira-se uma bola da caixa A, caso contrário, retira-se uma bola da caixa B.

Depois de realizada a experiência, verificou-se que a bola extraída era preta. Qual é a probabilidade de ter sido retirada da caixa A? Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.

2.2. Considere a seguinte experiência aleatória:

Lança-se o dado. Se sair face numerada com o número 3 ou 5, retiram-se quatro bolas da caixa A, caso contrário, retiram-se cinco bolas da caixa B.

Sejam X e Y os acontecimentos:

X: «sair um número ímpar no lançamento do dado»

Y: «pelo menos três das bolas retiradas são brancas»

Sem recorrer à fórmula da probabilidade condicionada, indique, justificando, o valor de $P(Y|\bar{X})$. Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

2.3. Considere agora que foram acrescentadas algumas bolas encarnadas à caixa B. Extraindo, simultaneamente e ao acaso, duas bolas da caixa B, a probabilidade de no máximo uma ser branca é $\frac{19}{20}$. Quantas bolas encarnadas foram acrescentadas à caixa B?

Exercício extra: Considere as caixas A e B com a sua composição inicial. Escolhem-se, simultaneamente e ao acaso, duas bolas da caixa A e três bolas da caixa B. Qual é a probabilidade de exactamente duas das cinco bolas extraídas serem pretas? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

3. Seja S o espaço de resultados associados a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos independentes ($A \subset S$ e $B \subset S$). Seja a um número real positivo tal que:

$$P(A \cup B) = a, \qquad P(\bar{A}|B) = a - \frac{2}{9} \qquad \text{e} \qquad P(B) = a - \frac{1}{18}$$

Qual é o valor de a?

4. Numa caixa estão seis cartões numerados, três com o número 1, dois com o número 2 e um com o número 3. Considere a experiência aleatória que consiste em retirar, ao acaso, sucessivamente e sem reposição, três cartões da caixa. A tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X: «maior dos números retirados» é dada por:

x_i	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{3!}{{}^6A_3}$	$\frac{({}^3C_2\times 2+3)\times 3!}{{}^6A_3}$	$\frac{{}^5C_2\times 3!}{{}^6A_3}$

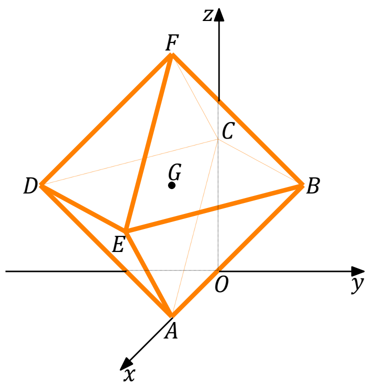
Numa pequena composição, explique porquê. A composição deve incluir:

- uma referência à regra de Laplace;
- uma explicação para os valores que a variável aleatória X pode tomar;
- uma explicação para cada uma das probabilidades, indicando o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, justificando devidamente.

Exercício extra (Geometria):

Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um octaedro.

Sabe-se que:



- o quadrado $[ACFE]$ está contida no plano xOz;
- o ponto A pertence ao eixo Ox;
- o ponto C pertence ao eixo Oz;
- os vértices do octaedro pertencem à superfície esférica de equação:

$$x^2+y^2+z^2-4x-4z+4=0$$

Seja r a recta definida pela condição $\frac{x-2}{3}=\frac{4-z}{4} \quad \wedge \quad y=2$

a) Mostre que uma equação cartesiana do plano ABE é $x+y-z=2$ e determine as coordenadas do ponto de intersecção do plano ABE com a recta r.

b) Sejam T um ponto pertencente ao eixo Oy com a mesma ordenada de B e Q um ponto que se desloca sobre a recta r. Quais são as coordenadas de Q de modo que o triângulo $[TQF]$ seja rectângulo em Q?

c) Considere os seis vértices do octaedro e o seu centro. Escolhendo, simultaneamente e ao acaso, três dos sete pontos, qual é a probabilidade de definirem um plano paralelo ao eixo Oy? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

Solucionário

Grupo I – Itens de escolha múltipla

1. C **2.** B **Exercício Extra:** $\frac{1}{3}$ **3.** A **4.** C **5.** D

Grupo II – Itens de resposta aberta

1.1. $369\,600$ **Exercício Extra:** $\frac{1}{154}$ **1.2.** $\frac{8}{33}$ **1.3.** Quatro Jades.

2.1. $\approx 37\%$ **2.2.** $\frac{5}{14}$ **2.3.** Sete bolas encarnadas. **Exercício Extra:** $\frac{6}{35}$

3. $a = \frac{8}{9}$

Exercício Extra:

a) $\left(\frac{20}{7}, 2, \frac{20}{7}\right)$ **b)** $Q(2{,}2{,}4)$ ou $Q\left(\frac{16}{5}, 2, \frac{12}{5}\right)$ **c)** $\frac{16}{35}$