Caderno 1

1. Os seis peões brancos ocuparão apenas casas nas diagonais, pelo que existem ${}^{9}C_6$ formas diferentes de dispô-los nas 9 casas respeitantes às diagonais.

O cavalo, a torre, o rei e a rainha não poderão ocupar as casas nas diagonais restantes, pelo que existem 16 casas disponíveis para dispôr estas 4 peças distintas. Existem então ${}^{16}A_4$ formas diferentes de dispôr estas peças nas restantes casas.

Existem, portanto, ${}^{9}C_6 \times {}^{16}A_4 = 3\,669\,120$ formas diferentes de dispôr as peças nas condições do enunciado.

Resposta: (A)

2.1. Para que o produto dos números das bolas seja nulo, então uma dessas bolas terá de ser a bola com o número 0. A probabilidade do produto ser nulo, p, é então dada por: $p = \dfrac{{}^{1}C_1 \times {}^{2}C_1}{{}^{3}C_2} = \dfrac{2}{3}$

Pretende-se determinar a probabilidade, P, de, numa série de seis extrações, o produto ser nulo em pelo menos cinco, o que é possível com recurso à distribuição binomial de probabilidades $X \sim \text{Bin}\left(6; \dfrac{2}{3}\right)$, tal que:

$$P = {}^{6}C_5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^5 \times \frac{1}{3} + {}^{6}C_6 \times \left(\frac{2}{3}\right)^6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^0 \approx 0{,}35$$

Resposta: (D)

2.2. Da equação da elipse tem-se: $a^2 = 12 \wedge b^2 = 9 \wedge c^2 = a^2 - b^2 \overset{a,b,c>0}{\Leftrightarrow} a = \sqrt{12} \wedge b = 3 \wedge c = \sqrt{3}$

Pela Lei dos Cossenos é possível escrever: $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \cos\beta$, em que:

- $\overline{AC} = a + c = \sqrt{12} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$, tal que $\overline{AC}^2 = 27$
- $\overline{AB} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{12 + 9} = \sqrt{21}$, tal que $\overline{AB}^2 = 21$
- $\overline{BC} = a = \sqrt{12}$, tal que $\overline{BC}^2 = 12$

Vindo então:

$$27 = 21 + 12 - 2 \times \sqrt{21} \times \sqrt{12} \times \cos\beta \Leftrightarrow \cos\beta = \frac{-6}{-2 \times \sqrt{21} \times \sqrt{12}} \Leftrightarrow \cos\beta = \frac{\sqrt{7}}{14} \approx 0{,}19$$

Resposta: (A)

3.

3.1. Do enunciado sabe-se que $C(0) = 90$ e que $C(5) = \dfrac{C(0)}{3} = 30$, vindo que:

$C(0) = 90 \Leftrightarrow 25 + (a - 25)e^{-b \times 0} \Leftrightarrow 25 + (a - 25)e^0 = 90 \Leftrightarrow 25 + (a - 25) \times 1 = 90 \Leftrightarrow a = 90$

Tem-se então $C(t) = 25 + (90 - 25)e^{-bt} = 25 + 65e^{-bt}$, vindo:

$C(5) = 30 \Leftrightarrow 25 + 65e^{-5b} = 30 \Leftrightarrow 65e^{-5b} = 5 \Leftrightarrow e^{-5b} = \dfrac{1}{13} \Leftrightarrow -5b = \ln\left(\dfrac{1}{13}\right) \Leftrightarrow b = \dfrac{\ln\left(\frac{1}{13}\right)}{-5} \Leftrightarrow b \approx 0{,}5$

3.2. Tem-se:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty}[C(t) - B(t)] &= \lim_{t\to+\infty} C(t) - \lim_{t\to+\infty} B(t) = \lim_{t\to+\infty}(25 + 65e^{-0,5t}) - \lim_{t\to+\infty}(35 - 25e^{-0,3t}) \\ &= 25 + 65e^{-\infty} - (35 - 25e^{-\infty}) = 25 + 65 \times 0 - 35 + 25 \times 0 = 25 - 35 = -10\end{aligned}$$

No contexto do problema, o valor deste limite indica que a temperatura ambiente no café é em 10 graus Celsius inferior à temperatura ambiente dentro do estabelecimento.

Considere-se agora uma função H, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $H(t) = C(t) - B(t)$. A função H é contínua em $[5{,}6]$, uma vez que resulta da diferença entre duas funções contínuas no seu domínio. Tem-se então:

- $H(5) = C(5) - B(5) = 25 + 65e^{-0{,}5\times 5} - (35 - 25e^{-0{,}3\times 5}) \approx 0{,}91$
- $H(6) = C(6) - B(6) = 25 + 65e^{-0{,}5\times 6} - (35 - 25e^{-0{,}3\times 6}) \approx -2{,}63$

Uma vez que $H(5) \times H(6) < 0$, conclui-se, então, através do Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, que $\exists\, c \in]5{,}6[: C(c) = B(c)$.

No contexto do problema, interpreta-se este resultado como a existência de, pelo menos, um instante durante o sexto minuto, após as bebidas terem sido servidas, em que estas estiveram à mesma temperatura.

4. Considerando (a_n) uma progressão aritmética de razão r, tem-se $a_4 = a_2 + 2r \Leftrightarrow 2r = 6 \Leftrightarrow r = 3$

A soma dos vinte termos consecutivos, a partir do quinto, incluindo-o é dada por:

$S = a_5 + a_6 + \cdots + a_{24} = \dfrac{a_5 + a_{24}}{2} \times (24 - 5 + 1)$, em que $a_{24} = a_5 + 19r = 6 + 19 \times 3 = 63$, logo:

$S = \dfrac{6 + 63}{2} \times 20 = 690$

Resposta: (B)

5. Como $f(a) = 3$, tem-se:

$$\lim_{x\to a} \frac{x-a}{3-f(x)} = \lim_{x\to a} \frac{x-a}{f(a)-f(x)} = \lim_{x\to a} \frac{x-a}{-(f(x)-f(a))} = -\frac{1}{\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}} = -\frac{1}{f'(a)}$$

Logo $-\dfrac{1}{f'(a)} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow f'(a) = -3$, e como a reta r tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a tem declive $f'(a)$, vem $\tan\alpha = f'(a) = -3$, em que α é a inclinação da reta r. Resulta então:

$\tan\alpha = -3 \Leftrightarrow \alpha = \tan^{-1}(-3) \overset{\alpha\in]0,\pi[}{\Leftrightarrow} \alpha \approx \pi - \arctan(3) \Leftrightarrow \alpha \approx 1{,}89$

Resposta: (C)

6.

6.1. Como $\overrightarrow{DA}$ tem a mesma direção do vetor diretor da reta AD, tem-se:

$\overrightarrow{DA} = k(-2{,}4{,}3) = (-2k{,}4k{,}3k),\ k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

e como $\left\|\overrightarrow{AD}\right\| = \left\|\overrightarrow{DA}\right\| = 2\sqrt{29}$, vem:

$$\begin{aligned}\left\|\overrightarrow{DA}\right\| = 2\sqrt{29} &\Leftrightarrow \sqrt{(-2k)^2 + (4k)^2 + (3k)^2} = 2\sqrt{29} \Leftrightarrow \sqrt{4k^2 + 16k^2 + 9k^2} = 2\sqrt{29}\\ &\Leftrightarrow \sqrt{29k^2} = 2\sqrt{29} \Leftrightarrow \sqrt{29}|k| = 2\sqrt{29} \Leftrightarrow |k| = 2\\ &\Leftrightarrow k = -2 \vee k = 2\end{aligned}$$

Para $k = 2$ vem $\overrightarrow{DA}(-4{,}8{,}6)$ o que não é possível, uma vez que $x_A > x_D, y_A < y_D, z_A < z_D$, resultando então para $k = -2$ em $\overrightarrow{DA}(4,-8,-6)$, como se pretendia mostrar.

O ponto A tem coordenadas $(x_A{,}0{,}0)$ e pertence à reta AD pelo que vem:

$x_A = 0 - 2k \wedge 0 = 4 + 4k \wedge 0 = 3 + 3k \Leftrightarrow x_A = 2 \wedge k = -1$

Considerando y_D como a ordenada de D, conclui-se que o volume do prisma, V, é dado por:

$V = \overline{OA}^2 \times y_D = 2^2 \times 8 = 32$

6.2. Como $[OABC]$ é um quadrado, que o ponto C tem coordenadas $(0{,}0{,}2)$

O vetor normal ao plano ADC, $\vec{n}(a{,}b{,}c)$, é perpendicular aos vetores $\overrightarrow{DA}$ e $\overrightarrow{CA}$ tal que:

- $\overrightarrow{DA} = (4,-8,-6)$
- $\overrightarrow{CA} = A - C = (2{,}0{,}0) - (0{,}0{,}2) = (2{,}0,-2)$

Resultando então em:

$$\begin{cases} \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{DA} = 0 \\ \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a,b,c) \cdot (4,-8,-6) = 0 \\ (a,b,c) \cdot (2,0,-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 8b - 6c = 0 \\ 2a - 2c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a - 8b = 0 \\ c = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\dfrac{a}{4} \\ c = a \end{cases}$$

O vetor normal ao plano ADC é então da forma $\overrightarrow{n}\left(a,-\dfrac{a}{4},a\right)$, $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, vindo para $a = 4$: $\overrightarrow{n}(4,-1,4)$

A equação do plano ADC é da forma $4x - y + 4z + d = 0$, e como passa no ponto A de coordenadas $(2,0,0)$ tem-se: $4 \times 2 - 0 + 4 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -8$

Uma equação cartesiana do plano ADC é $4x - y + 4z = 8$

6.3. Número de casos possíveis = ${}^{20}C_3$, uma vez que este é o número de maneiras de selecionar três pontos de entre os vinte pontos do prisma.

Número de casos favoráveis = $2 \times \left({}^{8}C_3 - 4\right) + {}^{4}C_3$, uma vez que se pretende que os três pontos definam um plano perpendicular ao eixo Oy, i.e, um plano da forma $y = d$.
Existem $2 \times \left({}^{8}C_3 - 4\right)$ maneiras distintas de formar um plano com os pontos referentes às bases do prisma, uma vez que qualquer seleção de três pontos entre os oito pontos em cada base formam um plano, com excepção das seleções de 3 pontos que correspondam à escolha de dois vértices de uma mesma aresta e ao ponto médio dessa aresta, já que 3 pontos colineares não formam um plano.
Para além disso, qualquer seleção de três pontos entre os pontos médios dos segmentos $[AF]$, $[BE]$, $[CD]$ e $[OD]$ formam um plano de equação $y = d$, i.e, existem ${}^{4}C_3$ maneiras distintas de formar um plano com esses pontos médios.

Pela Regra de Laplace, vem que a probabilidade pedida, p, é tal que: $p = \dfrac{2 \times \left({}^{8}C_3 - 4\right) + {}^{4}C_3}{20C_3} = \dfrac{9}{95}$

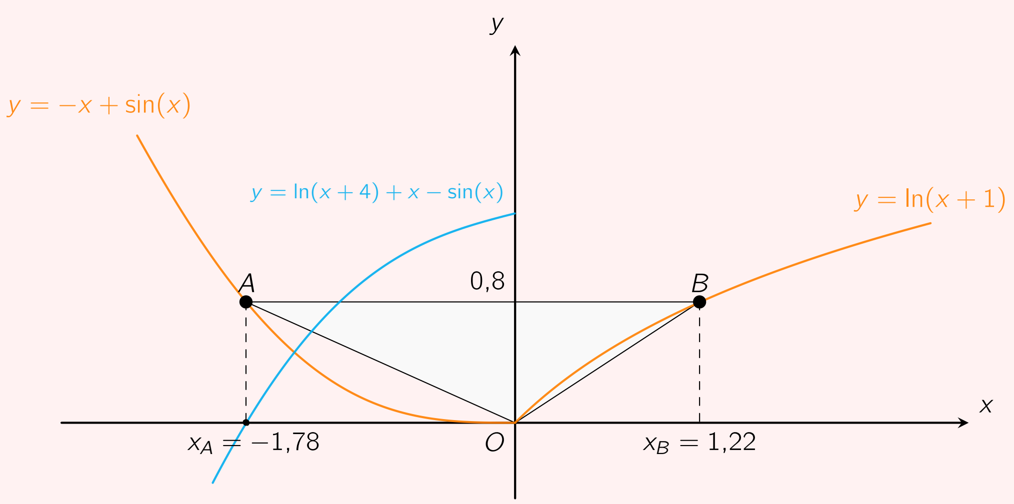
7. Seja A o ponto de coordenadas $(x_A, g(x_A))$, tal que $x_A < 0$

Seja B o ponto de coordenadas $(x_B, g(x_B))$, tal que $x_B > 0$

A reta AB é paralela ao eixo Ox, i.e, $g(x_A) = g(x_B)$, e como $\overline{AB} = 3 \Leftrightarrow x_B - x_A = 3$, vem $x_B = x_A + 3$, de onde resulta então a equação:

$g(x_A) = g(x_B) \Leftrightarrow g(x_A) = g(x_A + 3) \Leftrightarrow -x_A + \sin(x_A) = \ln(x_A + 3 + 1) \Leftrightarrow \ln(x_A + 4) + x_A - \sin(x_A) = 0$

Recorrendo às capacidades gráficas, determine-se a interseção da curva $y = \ln(x+4) + x - \sin(x)$ com o eixo Ox de forma a determinar a abcissa do ponto A, e determinem-se as coordenadas dos pontos A e B:



É possível concluir que $x_A \approx -1{,}78$, $x_B \approx 1{,}22$ e que a altura do triângulo $[OAB]$ é 0,8 correspondente a $g(-1{,}78) = g(1{,}22)$.

Vem então que $A_{[OAB]} = \dfrac{3 \times 0{,}8}{2} = 1{,}2$ unidades de área.

8. Tem-se: $\log_a(ab^3) = 3 \Leftrightarrow \log_a a + \log_a b^3 = 3 \Leftrightarrow 1 + 3\log_a b = 3 \Leftrightarrow \log_a b = \dfrac{2}{3}$

Logo: $\log_b\left(\dfrac{a}{\sqrt{b}}\right) = \log_b a - \log_b \sqrt{b} = \dfrac{\log_a a}{\log_a b} - \log_b b^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\frac{2}{3}} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2} = 1$

Resposta: (A)

9.1. Repare-se que $-2x + 2y + 4z + 2 = -2(x + y - 2z - 1)$, pelo que os planos α e β são coincidentes e a sua interseção é o próprio plano.

Intersetando com o plano γ de equação $x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$ vem:

$x + y - 2z = 1 \wedge x = y \Leftrightarrow 2x - 2z = 1 \wedge x = y \Leftrightarrow x = z + \dfrac{1}{2} \wedge x = y \Leftrightarrow x = y = z + \dfrac{1}{2}$

o que corresponde a uma reta de vetor diretor $(1,1,1)$ e que passa no ponto de coordenadas $\left(0,0,-\dfrac{1}{2}\right)$

Resposta: (C)

9.2. A reta t passa pelos pontos de coordenadas $(-1,2)$ e $(2,3)$ pelo que o seu declive é dado por $m = \dfrac{3-2}{2-(-1)} = \dfrac{1}{3}$

Através do Teorema de Lagrange é possível concluir que:

a) $\exists c \in]-1,2[: f'(c) = \dfrac{f(2) - f(-1)}{2-(-1)} = m = \dfrac{1}{3}$

b) $\exists d \in]2,4[: f'(d) = \dfrac{f(4) - f(2)}{4-2} = m = \dfrac{1}{3}$

Como a reta de equação $3y = x + 7$ tem equação reduzida $y = \dfrac{x}{3} + \dfrac{7}{3}$, conclui-se que a afirmação I. é verdadeira devido a **a)**.

Através de **b)** vem que $\exists\, c, d \in]-1,4[\wedge c \neq d : f'(c) = f'(d) = \dfrac{1}{3}$, logo, a afirmação II. é verdadeira.

Resposta: (A)

10. Tem-se:

$$\begin{aligned}
P(\overline{A \cap \overline{B}}|A) + P(\overline{A}|B) &= P\left[(\overline{A} \cup B)|A\right] + P(\overline{A}|B) \\
&= \frac{P\left[(\overline{A} \cup B) \cap A\right]}{P(A)} + \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} \\
&= \frac{P\left[(\overline{A} \cap A) \cup (A \cap B)\right]}{P(A)} + \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} \\
&= \frac{P\left[\emptyset \cup (A \cap B)\right]}{P(A)} + \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} \\
&= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} + \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} \\
&= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + 1, \quad P(A), P(B) \neq 0
\end{aligned}$$

Se $P(\overline{A \cap \overline{B}}|A) + P(\overline{A}|B) = 1$, então vem:

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + 1 = 1 \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \overset{P(A \cap B) \neq 0}{\Leftrightarrow} P(A) = P(B)$$

isto é, os acontecimentos A e B são equiprováveis, como se pretendia mostrar.

11. Uma vez que $\lim u_n = \lim \frac{\ln n}{n^2} = \underbrace{\lim \frac{\ln n}{n}}_{\text{Limite Notável}} \times \lim \frac{1}{n} = 0^+ \times 0^+ = 0^+$, tem-se:

$$\lim f(u_n) = \lim_{x\to \lim u_n} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{3x}-1}{1-e^{4x}} = -\frac{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{3x}-1}{x}}{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{4x}-1}{x}} = -\frac{3\overbrace{\lim\limits_{3x\to 0^+}\frac{e^{3x}-1}{3x}}^{\text{Limite Notável}}}{4\underbrace{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{4x}-1}{4x}}_{\text{Limite Notável}}} = -\frac{3\times 1}{4\times 1} = -\frac{3}{4}$$

Resposta: (A)

12. O número complexo $z = 3+4i$ é tal que $|z| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$, e como θ é um argumento de z, pode-se escrever $z = 5e^{i\theta}$

Tem-se: $-\frac{\overline{z}}{5} = e^{i\pi} \times \frac{5e^{-i\theta}}{5} = e^{i\pi} \times e^{-i\theta} = e^{i(\pi-\theta)}$, e como $e^{i(\pi-\theta)}$ e w são raízes quartas de um mesmo número complexo, então w é um número da forma: $e^{i\left(\pi-\theta+\frac{\pi}{2}k\right)}$, $k \in \{1,2,3\}$, vindo:

- Para $k=1$, $w = e^{i\left(\pi-\theta+\frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)} = \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right) = -\sin\theta - i\cos\theta$
- Para $k=2$, $w = e^{i(2\pi-\theta)} = e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta$
- Para $k=3$, $w = e^{i\left(\frac{5\pi}{2}-\theta\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta + i\cos\theta$

Resposta: (B)

13. Seja $z_1 = \rho\, e^{i\beta}$, tal que:

- $\rho = \sqrt{((\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$
- $\beta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = \tan^{-1}(1) \overset{z_1\in 1^{\text{o}}Q}{=} \frac{\pi}{4}$
- $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$

Repare-se ainda que $z_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right) = e^{-i\frac{2\pi}{5}}$

Seja R a região a sombreado. Vem então: $R = \left\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2 \wedge -\frac{2\pi}{5} \leq \operatorname{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{4}\right\}$

O número complexo w é dado por:

$$w = \frac{z_1 \times (z_2)^2}{\sqrt{2}i^{4n+39}} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{4}} \times \left(e^{-i\frac{2\pi}{5}}\right)^2}{\sqrt{2}\times i^{4n} \times i^{36} \times i^3} = \sqrt{2} \times \frac{e^{i\frac{\pi}{4}} \times e^{-i\frac{4\pi}{5}}}{1\times 1 \times (-i)} = \sqrt{2} \times \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{4\pi}{5}\right)}}{e^{-i\frac{\pi}{2}}} = \sqrt{2} \times e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{4\pi}{5}+\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{20}}$$

e como $1 \leq \sqrt{2} \leq 2$ e $-\frac{2\pi}{5} \leq -\frac{\pi}{20} \leq \frac{\pi}{4}$, conclui-se que w pertence a R.

14.

14.1. A função f é contínua em $[-1,+\infty[\setminus\{0\}$, uma vez que resulta de operações básicas entre funções contínuas tanto em $[-1,0[$, como em $\mathbb{R}_0^+$.

Desta forma, a existência de assíntota vertical só se pode dar em $x=0$, sendo necessário o cálculo do limite:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+2x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(x+2)(\sqrt{x+4}+2)} \\
&= \lim_{x\to 0^-} \frac{(\sqrt{x+4})^2 - 2^2}{x} \times \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{(x+2)(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x+4-4}{x} \times \frac{1}{(0+2)(\sqrt{0+4}+2)} \\
&= \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{x} \times \frac{1}{2\times(2+2)} = 1 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

conclui-se então que o gráfico de f não admite assíntotas verticais.

De forma a mostrar que existe uma assíntota não vertical quando $x \to +\infty$, determine-se o valor de $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ e $b = \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - mx]$:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2+1)e^{-x}+x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2e^{-x}+e^{-x}}{x} + \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x} = \lim_{x\to+\infty}(xe^{-x}) + \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{x} + 1$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} + \frac{e^{-\infty}}{+\infty} + 1 = \frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}} + \frac{0}{+\infty} + 1 = \frac{1}{+\infty} + 0 + 1 = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}[f(x)-x] = \lim_{x\to+\infty}\left[(x^2+1)e^{-x}+x-x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(x^2e^{-x}+e^{-x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x} + e^{-\infty}$$

$$\frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}} + 0 = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Conclui-se que $y = x$ é equação da assíntota oblíqua do gráfico de f quando $x \to +\infty$

14.2. Em $\mathbb{R}^+$, tem-se:

$$f'(x) = \left[(x^2+1)e^{-x}+x\right]' = (x^2+1)'e^{-x} + (x^2+1)\left(e^{-x}\right)' + (x)'$$

$$= 2xe^{-x} - (x^2+1)e^{-x} + 1 = e^{-x}(-x^2+2x-1)+1$$

$$f''(x) = (e^{-x})'(-x^2+2x-1)' + e^{-x}(-x^2+2x-1)' + (1)' = -e^{-x}(-x^2+2x-1) + e^{-x}(-2x+2)$$

$$= e^{-x}(x^2-2x-1-2x+2) = e^{-x}(x^2-4x+3)$$

tal que: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-x}=0}_{\text{Impossível}} \vee x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3)=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=3$

Estudando o sinal de f'':

x	0		1		3	$+\infty$
$f''(x)$	ND	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	ND	$\cup$	P.Inf	$\cap$	P.Inf	$\cup$

concluindo-se que:

- o gráfico de f tem concavidade voltada para cima em $]0,1]$ e em $[3,+\infty[$
- o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $[1,3]$
- o gráfico de f admite pontos de inflexão nos pontos de abcissa $x = 1$ e $x = 3$

15.

15.1. Como $0 < \beta < 2\pi$, tem-se que $0 < \dfrac{\beta}{4} < \dfrac{\pi}{2}$, i.e, $\dfrac{\beta}{4} \in 1^{\text{o}}Q$. Como $\tan\left(\dfrac{\beta}{4}\right) = \sqrt{8}$ vem:

$$1+\tan^2\left(\frac{\beta}{4}\right) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\beta}{4}\right)} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\beta}{4}\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{1+(\sqrt{8})^2}} \overset{\frac{\beta}{4}\in 1^{\text{o}}Q}{\Leftrightarrow} \cos\left(\frac{\beta}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{9}} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\beta}{4}\right) = \frac{1}{3}$$

e uma vez que $\tan\left(\dfrac{\beta}{4}\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{\beta}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\beta}{4}\right)}$ conclui-se que $\sin\left(\dfrac{\beta}{4}\right) = \sqrt{8}\times\dfrac{1}{3} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, e portanto:

$$g(\beta) = \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\beta}{4}\right)\cos\left(\frac{\beta}{4}\right) = 2\times\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

15.2. Tendo em conta que $\sin x = 2\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) \Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{\sin x}{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$, tem-se:

$$\lim_{x\to2\pi}\frac{1-\cos^2 x}{(x-2\pi)g(x)} = \lim_{x\to2\pi}\frac{\sin^2 x}{(x-2\pi)\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \overset{y=x-2\pi}{=} \lim_{y\to0}\frac{\sin^2(y+2\pi)}{y\sin\left(\frac{y+2\pi}{2}\right)} = \lim_{y\to0}\frac{\sin^2(y)}{y\sin\left(\frac{y}{2}+\pi\right)}$$

$$= -\lim_{y\to0}\frac{\sin^2 y}{y\sin\left(\frac{y}{2}\right)} = -\lim_{y\to0}\frac{\sin^2 y}{y\times\dfrac{\sin y}{2\cos\left(\frac{y}{2}\right)}} = -\lim_{y\to0}2\cos\left(\frac{y}{2}\right)\times\underbrace{\lim_{y\to0}\frac{\sin y}{y}}_{\text{Limite Notável}}$$

$$= -2\cos(0)\times1 = -2$$

repare-se que como $x \to 2\pi$, então $y \to 0$, e ainda que $\sin\left(\dfrac{y}{2}+\pi\right) = -\sin\left(\dfrac{y}{2}\right)$