Exame Nacional do Ensino Secundário – Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Site: http://recursos-para-matematica.webnode.pt/

Facebook: https://www.facebook.com/recursos.para.matematica

Prova Modelo n.º 8

Julho de 2016

Grupo I

Na resposta aos itens deste grupo, seleccione a opção correcta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. Considere todos os números pares de cinco algarismos.

Quantos destes números têm exactamente um 0 e um 3 em posições consecutivas?

A 1176

B 1792

C 2048

D 3000

2. Numa certa linha do triângulo de Pascal sabe-se que o quociente entre o oitavo elemento e o décimo quinto elemento é 1.

Escolhem-se, ao acaso, sucessivamente e sem repetição, três elementos desta linha.

Considere os acontecimentos:

A: «a soma dos dois primeiros elementos escolhidos é 2»

B: «o produto dos três elementos escolhidos é igual ao valor do décimo primeiro elemento»

Qual é o valor de $P\left(B|A\right)$?

A $\frac{2}{20}$

B $\frac{1}{19}$

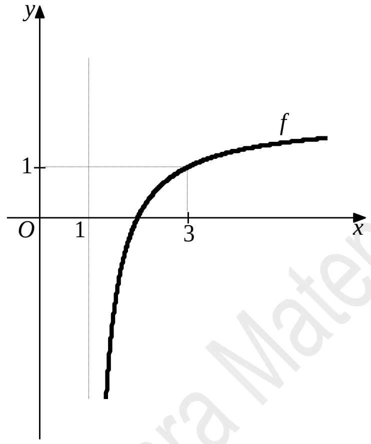
C $\frac{2}{22}$

D $\frac{1}{20}$

3. Seja f uma função de domínio $]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[$ cujo gráfico está parcialmente representado na figura.

Sabe-se que:

- a função f é par;
- a recta de equação $x=1$ é assimptota vertical do gráfico de f
- $f(3)=1$



Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{f(x)}{\ln(f(x))}$?

A $-\infty$

B 0

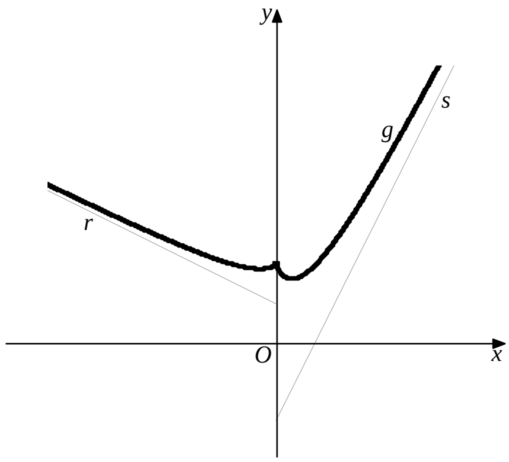
C 1

D $+\infty$

4. Na figura está representada parte do gráfico de uma função g de domínio $\mathbb{R}$

Sabe-se que:

- a recta r é assimptota do gráfico de g quando $x\to -\infty$
- a recta s é assimptota do gráfico de g quando $x\to +\infty$
- as rectas r e s são perpendiculares
- a equação reduzida da recta s é $y=2x-2$



Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{g(-x)-xg(x)}{x} + 2x \right)$?

A $-\dfrac{5}{2}$

B $-\dfrac{3}{2}$

C $\dfrac{3}{2}$

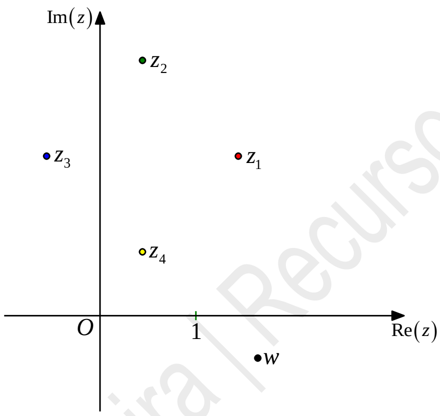
D $\dfrac{5}{2}$

5. Considere a função h de domínio $\mathbb{R}$ definida por $h(x)=\operatorname{sen}(2nx)$, com $n\in\mathbb{N}$.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{h(x)}{x^2-\pi^2}$?

A $\dfrac{2n}{\pi}$ **B** $\dfrac{n}{2\pi}$ **C** $\dfrac{n}{\pi}$ **D** $n\pi$

6. Na figura está representada, no plano complexo, as imagens geométricas dos números complexos w, z_1, z_2, z_3 e z_4.



Qual dos seguintes pode ser igual a $iw+i^{-4n+109}$?

A z_1 **B** z_2 **C** z_3 **D** z_4

7. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano α definido por $4ax+a^2y+a^2z=0$, com $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Sabe-se que o ponto P de coordenadas $(1,1,1)$ pertence ao plano α.

Qual das seguintes condições define a recta perpendicular ao plano α que contém o ponto P ?

A $x-1=y-1=z-1$

B $(x,y,z)=(1,1,0)+k(-2,1,1)$, $k\in\mathbb{R}$

C $-\dfrac{x}{2}=y-\dfrac{3}{2}=z-\dfrac{3}{2}$

D $(x,y,z)=(-2,1,1)+k(1,1,1)$, $k\in\mathbb{R}$

8. Seja (v_n) uma progressão tal que $v_6 = 3$ e $v_8 = 9$.

Dos seguintes números, qual não pode ser a razão da progressão (v_n)?

A -3 **B** $-\sqrt{3}$ **C** $\sqrt{3}$ **D** 3

GRUPO II

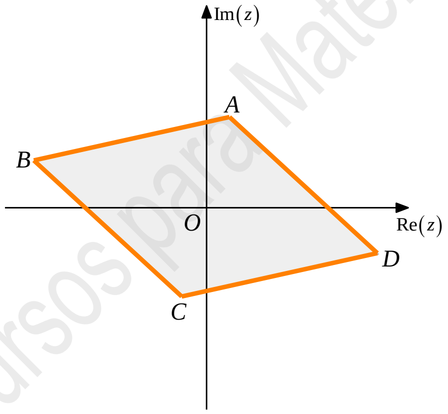
Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exacto

1. Na figura está representada, no plano complexo, o losango $[ABCD]$ centrado na origem.

Sabe-se que:

- o vértice A é a imagem geométrica do número complexo z_1
- o vértice B é a imagem geométrica do número complexo z_2
- um argumento de z_1 é $\frac{5\pi}{12}$
- a área do losango $[ABCD]$ é 8



Determine as raízes quartas do número complexo $\frac{z_1 \times \overline{z_2}}{-\sqrt{3}+i}$, apresentando-as na forma trigonométrica, e calcule a área do polígono cujos vértices são as imagens geométricas dessas raízes.

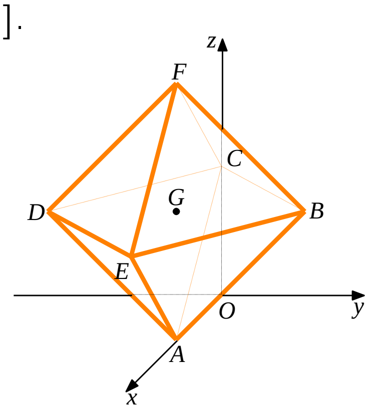
2. Seja S, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos possíveis ($A \subset S$ e $B \subset S$).

Mostre que, $P(A \cup B) - P(A|B) = P(B) \times P(\overline{A})$ se e só se A e B são acontecimentos independentes.

3. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o octaedro $[ABCDEF]$.

Sabe-se que:

- o quadrado $[ACFE]$ está contido no plano xOz;
- o ponto A pertence ao eixo Ox e o ponto C pertence ao eixo Oz
- o ponto G é o centro do octaedro



- os vértices do octaedro pertencem à superfície esférica de equação $x^2+y^2+z^2-4x-4z+4=0$

Resolva os itens seguintes por métodos analíticos, sem recorrer à calculadora.

3.1. Determine as coordenadas do ponto G.

3.2. Escreva uma equação do plano ABE.

3.3. Seja r a reta definida pela condição $\frac{x-2}{3}=\frac{4-z}{4} \quad \wedge \quad y=2$.

Considere um ponto T pertencente ao eixo Oy com a mesma ordenada de B e Q um ponto que se desloca sobre a recta r.

Quais são as coordenadas de Q de modo que o triângulo $[FQT]$ seja rectângulo em Q?

3.4. Considera os seis vértices do octaedro e o seu centro.

Escolhendo, simultaneamente e ao acaso, três dos sete pontos, qual é a probabilidade de definirem um plano paralelo ao eixo Oy? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

Adaptado de um exercício do livro "Preparar o Exame 2016 – Matemática A" da Raiz Editora

4. Uma substância radioactiva desintegra-se segundo a lei:

$$t=B(\ln(m)+A),\ t\geq 0$$

em que m é a massa medida em miligramas, t anos após uma amostra da substância ter sido colocada em repouso, e A e B são constantes reais.

Uma amostra de uma certa substância radioactiva foi colocada em repouso.

Resolva os itens seguintes por métodos analíticos, sem recorrer à calculadora.

4.1. Passados dezoito meses a massa da amostra era de $1{,}66$ miligramas e ao fim de dois anos essa massa tinha diminuído $0{,}1$ miligramas em relação ao seu peso seis meses antes.

Determine o valor de A e mostre que $B\approx -8{,}05$

Apresente o resultado de A arredondado às centésimas.

4.2. Determine o valor real de x de modo que $\frac{m(x+t)}{m(t)}=0{,}8$.

Apresente o resultado em anos e meses, meses arredondados às unidades, e interprete o resultado no contexto do problema.

5. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, cuja derivada, também de domínio $\mathbb{R}^+$ é definida por:

$$g'(x) = x^n \ln x - 1 \text{, com } n \in \mathbb{N}$$

Resolva os itens **5.1.** e **5.2.** recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

5.1. Sabendo que $\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{g(2)-g(x)} = -\frac{1}{\ln(256)-1}$ determine o valor de n.

Interprete o resultado no contexto da situação descrita.

5.2. Estude a função g quando ao sentido das concavidades do seu gráfico e à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta deve indicar:

- o(s) intervalo(s) onde o gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) onde o gráfico de g tem a concavidade voltada para cima;
- a(s) coordenada(s) do(s) ponto(s) de inflexão.

5.3. Considere $n = 2$.

Mostre que no intervalo $\left[\frac{1}{k}, k\right]$, com $k \geq 3$, o gráfico de g contém pelo menos um ponto onde a recta tangente ao seu gráfico nesse ponto é paralela ao eixo Ox.

Recorrendo à calculadora gráfica, determine a abcissa desse ponto.

Na sua resposta deve:

- mostrar analiticamente a existência de pelo menos uma abcissa nas condições do problema;
- reproduzir, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora, devidamente identificado(s);
- apresentar a abcissa pedida, arredondada às centésimas.

6. Considere a função f de domínio $\left[-\pi,+\infty\right[$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{e^{2x-1}-e} & \text{se} \quad x>1\\ \cos x+\operatorname{sen}^2 x & \text{se} \quad -\pi\leq x\leq 1\end{cases}$$

Resolva os itens seguintes recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

6.1. Estude a função f quanto à existência de assimptotas do seu gráfico, paralelas aos eixos coordenados.

6.2. Para $x\in\left[-\pi,1\right[$, mostre que $f'(x)=\operatorname{sen}(2x)-\operatorname{sen} x$ e estude, neste intervalo, a função f quando à monotonia e à existência de extremos relativos.

Na sua resposta deve indicar:

- o(s) intervalo(s) onde a função f é crescente;
- o(s) intervalo(s) onde a função f é decrescente;
- a(s) abcissa(s) do(s) extremo(s) relativo(s).

FIM

Solucionário

Grupo I

1. B **2.** A **3.** A **4.** D **5.** C **6.** B **7.** C **8.** A

Grupo II

1. $\sqrt[4]{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}$, $\sqrt[4]{2}\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}$, $\sqrt[4]{2}\operatorname{cis}\frac{7\pi}{6}$, $\sqrt[4]{2}\operatorname{cis}\frac{5\pi}{3}$; $A_{polígono}=2\sqrt{2}$.

3.1. $G(2,0,2)$ **3.2.** $x+y-z=2$ **3.3.** $Q(2,2,4)$ ou $Q\left(\frac{16}{5},2,\frac{12}{5}\right)$

3.4. $\frac{16}{35}$
