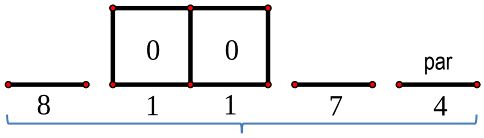
Site: http://recursos-para-matematica.webnode.pt/

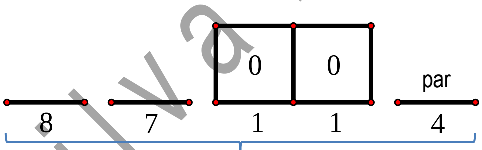
Facebook: https://www.facebook.com/recursos.para.matematica

GRUPO I – ITENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

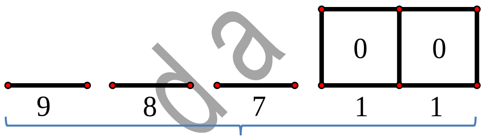
1. Os dois zeros podem ficar: um na casa dos milhares e outro no das centenas; um na casa das centenas e outro no das dezenas; um na casa das dezenas e outro no das unidades (a casa das dezenas de milhar não pode ser ocupada por um zero). Para o número ser par, o último algarismo tem de ser par. Além disso, não pode haver mais algarismos repetidos, isto é, apenas os dois zeros se repetem. Consideremos o seguinte esquema:



$8\times1\times1\times7\times4=8\times7\times4$



$8\times1\times1\times7\times4=8\times7\times4$



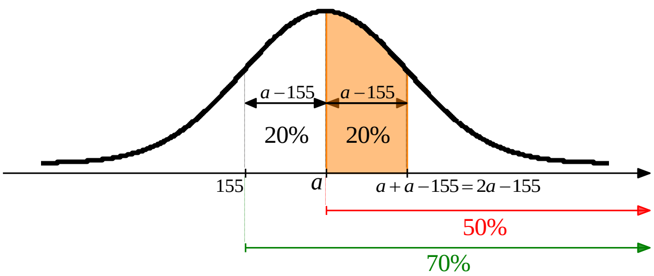
$9\times8\times7\times1\times1=9\times8\times7={}^{9}A_3$

Logo, o número pedido é $8\times7\times4\times2+{}^{9}A_3=952$.

Resposta: A

2. Como $P(X>155)=70\%$, tem-se que o valor médio da variável aleatória X é superior a 155, isto é, $a>155$.

Consideremos a seguinte figura:



Seja Y a variável aleatória Y: «número de rapazes em sete com altura compreendida entre a e $2a-155$ centímetros».

Pretende-se determinar $P(Y=2)$. Tem-se que Y é uma variável aleatória com distribuição binomial de parâmetros $n=7$ e $p=P(a<X<2a-155)=20\%=0,2$, isto é $Y \sim \text{Bin}(7;0,2)$. Assim:

$$P(Y=2)={}^7C_2 \times (0,2)^2 \times (0,8)^5 \approx 0,275$$

Resposta: C

3. Como a, b e c são as medidas dos lados de um triângulo rectângulo e $a<b<c$, então:

$$c^2=a^2+b^2 \Leftrightarrow c^2-a^2=b^2$$

Assim:

$$\log_4(c-a)+\log_4(c+a)=3 \Leftrightarrow \log_4((c-a)(c+a))=3 \Leftrightarrow \log_4(c^2-a^2)=3 \Leftrightarrow \log_4(b^2)=3 \Leftrightarrow$$

$$\underset{b>0}{\Leftrightarrow} 2\log_4 b=3 \Leftrightarrow \log_4 b=\frac{3}{2} \Leftrightarrow b=4^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow b=\sqrt{4^3} \Leftrightarrow b=\sqrt{64} \Leftrightarrow b=8$$

Resposta: C

4. Tem-se que a recta de equação $2y-6x=1 \Leftrightarrow 2y=6x+1 \Leftrightarrow y=3x+\frac{1}{2}$ é assimptota oblíqua do gráfico de g, quando $x \to +\infty$. Portanto:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=3 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty}(g(x)-3x)=\frac{1}{2}$$

Assim:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(3g\left(\frac{1}{x}\right)-x\left(g\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2\right)\underset{i)}{=}\lim_{y\to+\infty}\left(3g(y)-\frac{1}{y}(g(y))^2\right)=\lim_{y\to+\infty}\left(3g(y)-\frac{(g(y))^2}{y}\right)=\lim_{y\to+\infty}\frac{3yg(y)-(g(y))^2}{y}=$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\frac{-g(y)(g(y)-3y)}{y}=-\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{g(y)}{y}(g(y)-3y)\right)=$$

$$=-\lim_{y\to+\infty}\frac{g(y)}{y}\times\lim_{y\to+\infty}(g(y)-3y)=-3\times\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$$

i) Mudança de variável: se $x \to 0^+$ então $\frac{1}{x} \to +\infty$. Seja $y=\frac{1}{x} \Leftrightarrow x=\frac{1}{y}$, $y \to +\infty$.

Resposta: B

5. Tem-se que $h(0)=\cos(0)-1+(a+b)\operatorname{sen}(0)=1-1+(a+b)\times 0=0$. Logo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-0}{x-0}\underset{h(0)=0}{=}\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=h'(0)\Rightarrow h'(0)=2a$$

Tem-se, $h'(x)=-a\operatorname{sen}(ax)-0+(a+b)\times a\cos(ax)=-a\operatorname{sen}(ax)+a(a+b)\cos(ax)$. Assim:

$$h'(0)=2a\Leftrightarrow -a\operatorname{sen}(0)+a(a+b)\cos(0)=2a\Leftrightarrow -a\times 0+a(a+b)\times 1=2a\Leftrightarrow \cancel{a}(a+b)=2\cancel{a}\underset{a\neq 0}{\Leftrightarrow} a+b=2$$

Das opções apresentadas, a única em que $a+b=2 \quad\wedge\quad a\neq 0$ é a **D**, sendo essa a resposta correcta.

De uma outra forma:

$$\lim_{x\to 0}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(ax)-1+(a+b)\operatorname{sen}(ax)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(ax)-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{(a+b)\operatorname{sen}(ax)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos(ax)-1)(\cos(ax)+1)}{x(\cos(ax)+1)}+(a+b)\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(ax)}{ax}\times a=$$

$$\underset{i)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}^2(ax)}{x(\cos(ax)+1)}+a(a+b)\times 1=a\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(ax)}{ax}\times\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}(ax)}{\cos(ax)+1}+a(a+b)=$$

$$\underset{i)}{=}a\times 1\times\frac{-\operatorname{sen}(0)}{\cos(0)+1}+a(a+b)=a\times\frac{0}{1+1}+a(a+b)=a\times 0+a(a+b)=a(a+b)$$

i) Se $x\to 0^-$ então $ax\to 0$ (limite notável)

Resposta: D

6. A recta r pode ser definida em $\mathbb{C}$ por uma condição do tipo $|z-z_1|=|z-z_2|$, onde z_1 e z_2 são raízes quartas consecutivas de um certo número complexo z. Portanto, $z_2=i\,z_1$ (ou $z_1=i\,z_2$). Das opções apresentadas, a única que verifica a condição $z_2=i\,z_1$ é a da opção **D**:

$$|z-1-3i|=|z+3-i|\Leftrightarrow|z-(1+3i)|=|z-(-3+i)|$$

Tomando $z_1=1+3i$, tem-se $z_2=i(1+3i)=i+3i^2=-3+i$

Nota: se $z_1=\rho\operatorname{cis}\theta$ e z_2 forem raízes quartas consecutivas de um certo número complexo z, então:

$$z_2=\rho\operatorname{cis}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\rho\operatorname{cis}\theta\times\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}=\rho\operatorname{cis}\theta\times i=i\,z_1$$

Resposta: D

7. Um vector director da recta *r* é $\vec{r}\left(a^2,0,-4\right)$ e um vector normal do plano α é $\vec{n}_\alpha\left(a,0,2\right)$.

Como a recta *r* é perpendicular ao plano α, os vectores $\vec{r}$ e $\vec{n}_\alpha$ são colineares, isto é, $\exists k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}:\ \vec{r}=k\,\vec{n}_\alpha$.

Assim,

$$\vec{r}=k\,\vec{n}_\alpha \Leftrightarrow \left(a^2,0,-4\right)=k\left(a,0,2\right)\Leftrightarrow \begin{cases} a^2=ka \\ 0=0 \\ -4=2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=-2a \\ 0=0 \\ k=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+2a=0 \\ 0=0 \\ k=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\left(a+2\right)=0 \\ 0=0 \\ k=-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \quad \vee \quad a+2=0 \\ 0=0 \\ k=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \quad \vee \quad a=-2 \\ 0=0 \\ k=-2 \end{cases}$$

Como $a\neq 0$, tem-se $a=-2$.

Resposta: A

8. Seja r a razão da progressão aritmética $\left(u_n\right)$. Tem-se:

$$u_{10}=u_4+6r \Leftrightarrow 33=15+6r \Leftrightarrow 18=6r \Leftrightarrow r=\frac{18}{6}\Leftrightarrow r=3$$

Logo, $u_n=u_4+\left(n-4\right)\times r=15+3\left(n-4\right)=15+3n-12=3n+3$.

Portanto, $\lim\left(\frac{u_n}{3n-6}\right)^{2n}=\lim\left[\left(\frac{3n+3}{3n-6}\right)^n\right]^2=\left[\lim\left(\frac{\cancel{3n}\left(1+\frac{\cancel{3}}{\cancel{3}n}\right)}{\cancel{3n}\left(1-\frac{6}{3n}\right)}\right)^n\right]^2=\left[\lim\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{2}{n}\right)^n}\right]^2=\left[\frac{\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\lim\left(1-\frac{2}{n}\right)^n}\right]^2=$

$$=\left(\frac{e^1}{e^{-2}}\right)^2=\left(e^{1-(-2)}\right)^2=\left(e^3\right)^2=e^6$$

Resposta: C

1.

- Tem-se que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, para todo o x real. Assim:

$$w = \frac{1 - 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{9}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{9}\right)}{\sqrt{6}+\sqrt{2}i} \underset{i)}{\overset{\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(\pi - x)}{=}} \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{9}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{9}\right) - 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{9}\right) + i\operatorname{sen}\left(\pi - \frac{7\pi}{9}\right)}{2\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}} =$$

$$= \frac{\overbrace{\cos^2\left(\frac{\pi}{9}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{9}\right)}^{\cos\left(2\times\frac{\pi}{9}\right)} + i\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{9}\right)}{2\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}} = \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{9}\right)}{2\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}} = \frac{\operatorname{cis}\frac{2\pi}{9}}{2\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{9} - \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{cis}\frac{\pi}{18}$$

i) Escrevendo $\sqrt{6}+\sqrt{2}i$ na forma trigonométrica, vem: $\left|\sqrt{6}+\sqrt{2}i\right| = \sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Sendo θ um argumento de $\sqrt{6}+\sqrt{2}i$, tem-se $\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{2}{6}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e $\theta \in 1.^{\text{o}}$ quadrante, pelo que $\theta = \frac{\pi}{6}$. Assim $\sqrt{6}+\sqrt{2}i = 2\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}$.

- Seja $z = \rho\operatorname{cis}\theta$ e $z \neq 0$. Portanto, $z^2 = \left(\rho\operatorname{cis}\theta\right)^2 = \rho^2\operatorname{cis}(2\theta)$ e $\overline{z} = \rho\operatorname{cis}(-\theta)$. Assim, para $z \neq 0$, vem-se:

$$z^2 = w\overline{z} \Leftrightarrow \frac{z^2}{\overline{z}} = w \Leftrightarrow \frac{\rho^2\operatorname{cis}(2\theta)}{\rho\operatorname{cis}(-\theta)} = \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{cis}\frac{\pi}{18} \Leftrightarrow \frac{\rho^{\cancel{2}}}{\cancel{\rho}}\operatorname{cis}\left(2\theta - (-\theta)\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{cis}\frac{\pi}{18} \Leftrightarrow \rho\operatorname{cis}(3\theta) = \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{cis}\frac{\pi}{18} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 3\theta = \frac{\pi}{18} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \theta = \frac{\pi}{54} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Logo:

se $k = 0 \rightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{cis}\frac{\pi}{54}$;

se $k = 1 \rightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{54} + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{cis}\frac{37\pi}{54}$;

se $k = 2 \rightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{54} + \frac{4\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{cis}\frac{73\pi}{54}$

$\therefore$ O conjunto solução da condição $z^2 = w\overline{z} \quad \wedge \quad z \neq 0$ é $\left\{\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{cis}\frac{\pi}{54}, \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{cis}\frac{37\pi}{54}, \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{cis}\frac{73\pi}{54}\right\}$.

2. Tem-se que:

$$P(A)+P(A)+P(B|A)=1 \Leftrightarrow 2P(A)+\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=1 \underset{P(A)\neq 0}{\Leftrightarrow} 2(P(A))^2+0,08=P(A) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(P(A))^2-P(A)+0,08=0 \Leftrightarrow P(A)=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\times 2\times 0,08}}{2\times 2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A)=0,1 \quad \vee \quad P(A)=0,4$$

Como $P(A)>0,1$, vem $P(A)=0,4$

Assim, $P(A|\bar{A}\cup\bar{B})=\frac{P(A\cap(\bar{A}\cup\bar{B}))}{P(\bar{A}\cup\bar{B})}=\frac{P\left(\overbrace{(A\cap\bar{A})}^{\varnothing}\cup(A\cap\bar{B})\right)}{P(\overline{A\cap B})}=\frac{P(\varnothing\cup(A\cap\bar{B}))}{1-P(A\cap B)}=\frac{P(A\cap\bar{B})}{1-0,08}=$

$$=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{1-0,08}=\frac{0,4-0,08}{0,92}=\frac{0,32}{0,92}=\frac{8}{23}$$

3. $P(A|B)$ é a probabilidade de pelos menos cinco dos funcionários escolhidos sexo do sexo feminino sabendo que os seis funcionários escolhidos não são licenciados.

Sabe-se que um terço dos funcionários são licenciados e portanto dois terços não são licenciados. Assim, o número de funcionários que não são licenciados é $\frac{2}{3}\times 120=80$. Destes, 20% são do sexo masculino, ou seja, $0,2\times 80=16$ são do sexo masculino e os restantes, 64, são do sexo feminino.

O número de casos possíveis é ${}^{80}A_6$, é o número de maneiras distintas de escolher, ordenadamente, seis funcionários entre os oitenta que não são licenciados. Para o número de casos favoráveis temos de contar todas maneiras distintas de escolher seis funcionários que não sejam licenciados e em que pelo menos cinco sejam do sexo masculino. Para tal consideram-se dois caos: escolher cinco funcionários não licenciados do sexo feminino e um do sexo masculino. O número de maneiras distintas de ou fazer é ${}^{64}C_5\times{}^{16}C_1=16\times{}^{64}C_5$; escolher seis funcionários não licenciados do sexo feminino. O número de maneiras distintas de o fazer é ${}^{64}C_6$. Resta-nos permutar os seis funcionários escolhidos pelas seis tarefas diferenciadas que têm de desempenhar. O número de maneiras de o fazer é $6!$. Logo, o número de casos favoráveis é $(16\times{}^{64}C_5+{}^{64}C_6)\times 6!$.

Pela regra de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é o quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, quando estes são equiprováveis. Então, a probabilidade pedida é $\frac{(16\times{}^{64}C_5+{}^{64}C_6)\times 6!}{{}^{80}A_6}$.

4.

4.1. Para determinar em que dia a percentagem de espectadores que frequentaram o CINEMAX e que foram ver o filme é máxima recorre-se ao estudo do sinal da derivada da função M:

- $M'(t)=\left(4t^2+48t+144\right)' e^{-0,2t-1,2}+\left(4t^2+48t+144\right)\left(e^{-0,2t-1,2}\right)'=$

$$=\left(8t+48\right)e^{-0,2t-1,2}+\left(4t^2+48t+144\right)\times\left(-0,2\right)e^{-0,2t-1,2}=$$

$$=\left(8t+48\right)e^{-0,2t-1,2}+\left(-0,8t^2-9,6t-28,8\right)e^{-0,2t-1,2}=$$

$$=\left(-0,8t^2-9,6t+8t-28,8+48\right)e^{-0,2t-1,2}=\left(-0,8t^2-1,6t+19,2\right)e^{-0,2t-1,2}$$

- $M'(t)=0 \Leftrightarrow \left(-0,8t^2-1,6t+19,2\right)e^{-0,2t-1,2}=0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-0,2t-1,2}=0}_{\text{Equação impossível em } \mathbb{R}} \vee -0,8t^2-1,6t+19,2=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow t=\frac{1,6\pm\sqrt{\left(-1,6\right)^2-4\times\left(-0,8\right)\times 19,2}}{2\times\left(-0,8\right)} \Leftrightarrow t=-6 \vee t=4$$

Como $t\in\left[0,20\right]$, vem $t=4$

Fazendo um quadro de variação do sinal da função M', vem:

t	0		4		20
i) $M'(t)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$M(t)$	mín.	$\nearrow$	máx.	$\searrow$	mín.

i) Observe que o sinal de M' depende apenas do sinal de $-0,8t^2-9,6t+19,2$ pois $e^{-0,2t-1,2}>0$, $\forall t\in\mathbb{R}$.

A percentagem de espectadores que frequentaram o CINEMAX e que foram ver o filme é máxima no dia 8 de Junho de 2015 ($t=4$ corresponde ao dia 8 de Junho de 2015). O valor dessa percentagem é:

$$M(4)=\left(4\times 4^2+48\times 4+144\right)e^{-0,2\times 4-1,2}=400e^{-2}\approx 54,1\%$$

4.2. Tem-se que $4t^2+48t+144=0 \underset{F.R.}{\Leftrightarrow} t=-6$ (raiz dupla). Logo, $4t^2+48t+144=4(t+6)^2$.

Assim, para $t\in[0,20]$ tem-se:

$$M(t)\geq P(t)\Leftrightarrow \left(4t^2+48t+144\right)e^{-0,2t-1,2}\geq 5(t+6)^2\,e^{-0,347t-0,68814}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\cancel{(t+6)^2}\,e^{-0,2t-1,2}\geq 5\cancel{(t+6)^2}\,e^{-0,347t-0,68814} \underset{\forall t\in[0,20],\,(t+6)^2>0}{\Leftrightarrow} 4e^{-0,2t-1,2}\geq 5e^{-0,347t-0,68814}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{-0,2t-1,2}}{e^{-0,347t-0,68814}}\geq\frac{5}{4}\Leftrightarrow e^{-0,2t-1,2+0,347t+0,68814}\geq\frac{5}{4}\Leftrightarrow e^{0,147t-0,51186}\geq\frac{5}{4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,147t-0,51186\geq\ln\left(\frac{5}{4}\right)\Leftrightarrow t\geq\underbrace{\frac{\ln\left(\frac{5}{4}\right)+0,51186}{0,147}}_{\approx 5,0000241586\approx 5}$$

Logo, a percentagem de espectadores que frequentaram o CINEMAX e que foram ver o filme não foi inferior à percentagem de espectadores que frequentaram o CINEPLUS entre os dias 9 de Junho de 2015 ($t=5$) e 24 de Junho de 2015 ($t=20$), inclusive, ou seja, durante dezasseis dias.

5.

5.1.

▪ Assimptotas verticais:

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(6x)-\ln 4}{e^{3x-1}-e}=\frac{\ln\left(0^+\right)-\ln 4}{e^{3\times 0-1}-e}=\frac{-\infty-\ln 4}{e^{-1}-e}=\frac{-\infty}{\underbrace{e^{-1}-e}_{<0}}=+\infty$$

Logo, a recta de equação $x=0$ é assimptota vertical do gráfico de g.

$$\lim_{x\to\left(\frac{2}{3}\right)} g(x)=\lim_{x\to\left(\frac{2}{3}\right)^-}\frac{\ln(6x)-\ln 4}{e^{3x-1}-e}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to\left(\frac{2}{3}\right)^-}\frac{\ln\left(\frac{6x}{4}\right)}{e\left(e^{3x-2}-1\right)}=\frac{1}{e}\times\lim_{x\to\left(\frac{2}{3}\right)^-}\frac{\ln\left(\frac{3}{2}x\right)}{e^{3\left(x-\frac{2}{3}\right)}-1}\underset{i)}{=}\frac{1}{e}\times\lim_{y\to 0^-}\frac{\ln\left(\frac{3}{2}\left(y+\frac{2}{3}\right)\right)}{e^{3y}-1}=$$

$$=\frac{1}{e}\times\lim_{y\to 0^-}\frac{\ln\left(\frac{3}{2}y+1\right)}{e^{3y}-1}=\frac{1}{e}\times\lim_{y\to 0^-}\frac{\frac{\ln\left(\frac{3}{2}y+1\right)}{\frac{3}{2}y}\times\frac{3}{2}}{\frac{e^{3y}-1}{3y}\times 3}=\frac{1}{e}\times\frac{\frac{3}{2}\lim_{y\to 0^-}\frac{\ln\left(\frac{3}{2}y+1\right)}{\frac{3}{2}y}}{3\lim_{y\to 0^-}\frac{e^{3y}-1}{3y}}\underset{ii)}{=}\frac{1}{e}\times\frac{\frac{3}{2}\times 1}{3\times 1}=\frac{1}{e}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{2e}$$

i) Mudança de variável: se $x \to \left(\frac{2}{3}\right)^-$ então $x - \frac{2}{3} \to 0^-$. Seja $y = x - \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = y + \frac{2}{3}$, $y \to 0^-$.

ii) Se $y \to 0^-$ então $\frac{3}{2}y \to 0^-$ e $3y \to 0^-$ (limites notáveis)

$$\lim_{x\to\left(\frac{2}{3}\right)^+} g(x) = \lim_{x\to\left(\frac{2}{3}\right)^+} \frac{\ln\left(x^3\right)-1}{x^2} = \frac{\ln\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{3\ln\left(\frac{2}{3}\right)-1}{\frac{4}{9}} = \frac{27\ln\left(\frac{2}{3}\right)-9}{4}$$

Como $\lim_{x\to\left(\frac{2}{3}\right)^-} f(x)$ e $\lim_{x\to\left(\frac{2}{3}\right)^+} f(x)$ são finitos, a recta de equação $x = \frac{2}{3}$ não é assimptota vertical do gráfico de g.

Como g é contínua em $\mathbb{R}^+ \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$, o gráfico de g não tem outras assimptotas verticais.

- **Assimptotas horizontais:**

Tem-se que $D_g = \mathbb{R}^+$, portanto, se o gráfico de g tiver uma assimptota vertical será quando $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(x^3\right)-1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3\ln x - 1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3\ln x}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} \times \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x} - \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2} =$$

$$= 0 \times \frac{3}{+\infty} - \frac{1}{+\infty} = 0\times 0 - 0 = 0$$

Logo, a recta de equação $y = 0$ é assimptota horizontal do gráfico de g, quando $x \to +\infty$.

5.2. Para estudar o sentido das concavidades do gráfico de f em $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right[$, recorre-se ao estudo da sua segunda derivada. Para $x \in \left[\frac{2}{3}, +\infty\right[$, tem-se $f'(x) = g(x) = \frac{\ln\left(x^3\right)-1}{x^2} \underset{x\geq\frac{2}{3}\Rightarrow x>0}{=} \frac{3\ln x - 1}{x^2}$.

- $f''(x) = \dfrac{3\times\frac{1}{\cancel{x}}\times x^{\cancel{2}} - 2x(3\ln x - 1)}{\left(x^2\right)^2} = \dfrac{3x - 6x\ln x + 2x}{x^4} = \dfrac{5x - 6x\ln x}{x^4} = \dfrac{x(5 - 6\ln x)}{x^4} = \dfrac{5 - 6\ln x}{x^3}$

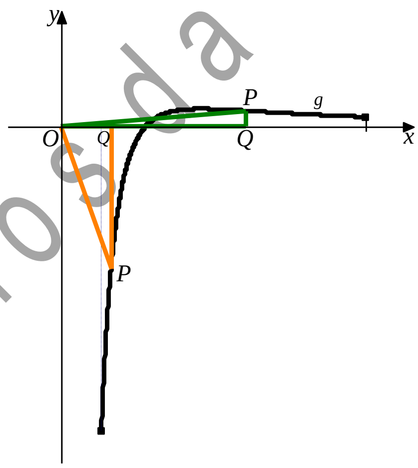
- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{5 - 6\ln x}{x^3} = 0 \Leftrightarrow 5 - 6\ln x = 0 \;\wedge\; \underbrace{x^3 \neq 0}_{\text{Condição universal em } \left[\frac{2}{3},+\infty\right[} \Leftrightarrow \ln x = \dfrac{5}{6} \Leftrightarrow x = e^{\frac{5}{6}} \Leftrightarrow x = \sqrt[6]{e^5}$

Fazendo um quadro de variação do sinal da função f'', vem:

x	$\frac{2}{3}$		$\sqrt[6]{e^5}$	$+\infty$
$5-6\ln x$	$+$	$+$	0	$-$
x^3	$+$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$		$\cup$	p.i.	$\cap$

O gráfico da função f tem a concavidade votada para baixo em $\left[\sqrt[6]{e^5},+\infty\right[$, tem a concavidade votada para cima em $\left[\frac{2}{3},\sqrt[6]{e^5}\right]$ e tem ponto de inflexão em $x=\sqrt[6]{e^5}$.

5.3. Comecemos por considerar a seguinte figura, onde se faz a representação gráfica da função g no intervalo $\left[\frac{2}{3},5\right]$ e se representam dois triângulos nas condições do enunciado:

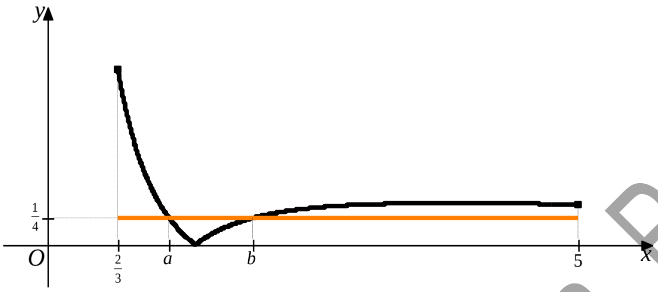


As coordenadas do ponto P são do tipo $(x,g(x))$ e as do ponto Q são do tipo $(x,0)$. A medida do comprimento da base do triângulo $[OPQ]$ é dada por $\overline{OQ}=|x|\underset{x>0}{=}x$ e a medida do comprimento da sua altura é dada por $\overline{PQ}=|g(x)|$. Assim:

$$A_{[OPQ]}=\frac{\overline{OQ}\times\overline{PQ}}{2}=\frac{x\times|g(x)|}{2}=\frac{x\times\left|\frac{\ln(x^3)-1}{x^2}\right|}{2}=\frac{x}{2}\times\left|\frac{3\ln x-1}{x^2}\right|$$

Logo, as soluções da equação $A_{[OPQ]}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{x}{2}\times\left|\frac{3\ln x-1}{x^2}\right|=\frac{1}{4}$ no intervalo $\left[\frac{2}{3},5\right]$ são as abcissas dos pontos P.

Utilizando o editor de funções da calculadora, define-se $y_1=\frac{x}{2}\times\left|\frac{3\ln x-1}{x^2}\right|$ e $y_2=\frac{1}{4}$ na janela de visualização $\left[\frac{2}{3},5\right]\times[0,2]$.



Então, $A_{[OPQ]}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow x=a \quad \vee \quad x=b$, com $a \approx 1{,}152$ e $b \approx 1{,}923$.

Portanto, as coordenadas dos pontos P são $(a,g(a))$, com $g(a)=\frac{\ln(a^3)-1}{a^2} \approx -0{,}434$ ou $(b,g(b))$, com $g(b)=\frac{\ln(b^3)-1}{b^2} \approx 0{,}26$.

6.

6.1. Seja k a abcissa do ponto A. Como A pertence ao eixo Ox, vem $A(k,0,0)$. Como $\overline{OB}=2\overline{OA}$ e $\overline{OC}=3\overline{OA}$ e como B pertence ao eixo Oy e C pertence ao eixo Oz, vem $B(0,-2k,0)$ e $C(0,0,3k)$

Seja $\vec{n}(a,b,c)$ um vector normal do plano ABC. Este vector é perpendicular aos vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, dois vectores não colineares do plano ABC.

Tem-se, $\overrightarrow{AB}=B-A=(0,-2k,0)-(k,0,0)=(-k,-2k,0)$ e $\overrightarrow{AC}=C-A=(0,0,3k)-(k,0,0)=(-k,0,3k)$.

Logo,

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a,b,c)\cdot(-k,-2k,0)=0\\ (a,b,c)\cdot(-k,0,3k)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-ka-2kb=0\\ -ka+3kc=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2\cancel{k}b=\cancel{k}a\\ 3\cancel{k}c=\cancel{k}a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=-\frac{a}{2}\\ c=\frac{a}{3}\end{cases}$$

Concluímos então que as coordenadas do vector $\vec{n}$ são da forma $\left(a,-\frac{a}{2},\frac{a}{3}\right)$, com $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Tomando, por exemplo, $a=6$, um vector normal de ABC é $\vec{n}(6,-3,2)$. Logo, como $D\in ABC$, uma equação do plano ABC pode ser, $6(x-0)-3(y-1)+2(z+2)=0\Leftrightarrow 6x-3y+3+2z+4=0\Leftrightarrow 6x-3y+2z=-7$.

6.2. Tem-se que $\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha\Rightarrow\operatorname{tg}^2(\pi-\alpha)=(-\operatorname{tg}\alpha)^2=\operatorname{tg}^2\alpha$ e $\operatorname{sen}(-2\alpha)=-\operatorname{sen}(2\alpha)$. Assim:

$$\operatorname{tg}^2(\pi-\alpha)+10\operatorname{sen}(-2\alpha)=\operatorname{tg}^2\alpha-10\operatorname{sen}(2\alpha)=\operatorname{tg}^2\alpha-10\times 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

Tem-se:

- $\cos\alpha=\cos\left(B\hat{A}C\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}=\dfrac{(-k,-2k,0)\cdot(-k,0,3k)}{\sqrt{(-k)^2+(-2k)^2+0^2}\times\sqrt{(-k)^2+0^2+(3k)^2}}=$

$$=\frac{k^2+0+0}{\sqrt{k^2+4k^2}\times\sqrt{k^2+9k^2}}=\frac{k^2}{\sqrt{5k^2}\times\sqrt{10k^2}}\underset{k>0}{=}\frac{k^2}{\sqrt{5}k\times\sqrt{10}k}=\frac{\cancel{k^2}}{\sqrt{50}\cancel{k^2}}=\frac{1}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{10}$$

- $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2}-1\Leftrightarrow\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\frac{2}{100}}-1\Leftrightarrow\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{100}{2}-1\Leftrightarrow\operatorname{tg}^2\alpha=49$

- $\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Leftrightarrow\operatorname{sen}^2\alpha+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{10}\right)^2=1\Leftrightarrow\operatorname{sen}^2\alpha+\dfrac{2}{100}=1\Leftrightarrow\operatorname{sen}^2\alpha=1-\dfrac{2}{100}\Leftrightarrow\operatorname{sen}^2\alpha=\dfrac{98}{100}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\operatorname{sen}\alpha=\pm\sqrt{\frac{98}{100}}$$

Como $\alpha\in 1.^{\circ}$ quadrante (α é agudo), vem $\operatorname{sen}\alpha=\sqrt{\dfrac{98}{100}}\Leftrightarrow\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$.

Portanto, $\operatorname{tg}^2(\pi-\alpha)+10\operatorname{sen}(-2\alpha)=\operatorname{tg}^2\alpha-10\times2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha=49-20\times\dfrac{7\sqrt{2}}{10}\times\dfrac{\sqrt{2}}{10}=49-20\times\dfrac{7\times2}{100}=$

$$=49-20\times\frac{7\times2}{100}=49-\frac{14}{5}=\frac{231}{5}$$

7.

7.1.

▪ Tem-se que, $0<a<\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}<-a<0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}<\pi-a<\pi$ e $0<a<\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{3\pi}{2}<\pi+a<\pi$.

Logo, $[\pi-a,\pi+a]\subset\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$.

▪ A função h é contínua em $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ pois é o quociente entre duas funções contínuas no seu domínio: uma é a composição entre uma função polinomial e uma função trigonométrica, ambas contínuas no seu domínio; a outra é o produto entre uma função constante e o quadrado de uma função trigonométrica, ambas contínuas no seu domínio. Portanto, a função h é continua em $[\pi-a,\pi+a]\subset\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$.

▪ $h(\pi-a)=\frac{\operatorname{sen}(3(\pi-a))}{2\cos^2(\pi-a)} \underset{\cos(\pi-a)=-\cos a}{=} \frac{\operatorname{sen}(3\pi-3a)}{2(-\cos a)^2}=\frac{\operatorname{sen}(\pi-3a)}{2\cos^2 a} \underset{\operatorname{sen}(\pi-3a)=\operatorname{sen}(3a)}{=} \frac{\operatorname{sen}(3a)}{2\cos^2 a}$

▪ $h(\pi+a)=\frac{\operatorname{sen}(3(\pi+a))}{2\cos^2(\pi+a)} \underset{\cos(\pi+a)=-\cos a}{=} \frac{\operatorname{sen}(3\pi+3a)}{2(-\cos a)^2}=\frac{\operatorname{sen}(\pi+3a)}{2\cos^2 a} \underset{\operatorname{sen}(\pi+3a)=-\operatorname{sen}(3a)}{=} \frac{-\operatorname{sen}(3a)}{2\cos^2 a}$

Logo, $h(\pi-a)=-h(\pi+a)$ e portanto $h(\pi-a)$ e $h(\pi+a)$ têm sinais contrários ou $h(\pi-a)=h(\pi+a)=0$. Se $h(\pi-a)=h(\pi+a)=0$ então a função h tem pelo menos dois zeros em $[\pi-a,\pi+a]$: $\pi-a$ e $\pi+a$. Se $h(\pi-a)$ e $h(\pi+a)$ têm sinais contrários então, pelo corolário do teorema de Bolzano, a função h tem pelo um zero no intervalo $]\pi-a,\pi+a[\subset[\pi-a,\pi+a]$.

$\therefore$ A função h tem pelo menos um zero em $[\pi-a,\pi+a]$.

▪ Tem-se $h(x)=0 \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}(3x)}{2\cos^2 x}=0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(3x)=0 \quad \wedge \quad \underbrace{2\cos^2 x\neq 0}_{\text{Condição universal em } \left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[} \quad \Leftrightarrow 3x=0+k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{3}\,,\ k\in\mathbb{Z}$

Assim, os zeros da função h são $\frac{2\pi}{3}$ $(k=2)$, π $(k=3)$ e $\frac{4\pi}{3}$ $(k=4)$ e portanto, para que a função h tenha exactamente um zero no intervalo $]\pi-a,\pi+a[$ o valor máximo que a pode tomar é $a=\frac{\pi}{3}$ $\left(\pi-a=\frac{2\pi}{3}\Leftrightarrow a=\frac{\pi}{3}\right)$.

7.2.

- $h(\pi)=\frac{\text{sen}(3\pi)}{2\cos^2(\pi)}=\frac{0}{2\times(-1)^2}=0$

- $h'(\pi)=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{h(x)-h(\pi)}{x-\pi}=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\frac{\text{sen}(3x)}{2\cos^2 x}-0}{x-\pi}=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1}{2\cos^2 x}\times\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\text{sen}(3x)}{x-\pi}\underset{i)}{=}\frac{1}{2\times(-1)^2}\times\lim\limits_{y\to 0}\frac{\text{sen}(3(y+\pi))}{y}=$

$$=\frac{1}{2}\times\lim_{y\to 0}\frac{\text{sen}(3y+3\pi)}{y}=\frac{1}{2}\times\lim_{y\to 0}\frac{\overbrace{\text{sen}(3y+\pi)}^{-\text{sen}(3y)}}{y}=-\frac{1}{2}\times\lim_{y\to 0}\frac{\text{sen}(3y)}{3y}\times 3\underset{ii)}{=}-\frac{1}{2}\times 1\times 3=-\frac{3}{2}$$

i) Mudança de variável: se $x\to\pi$ então $x-\pi\to 0$. Seja $y=x-\pi\Leftrightarrow x=y+\pi$, $y\to 0$.

ii) Se $y\to 0$ então $3y\to 0$ (limite notável)

- Seja r a recta tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa π. Então, $m_r=h'(\pi)=-\frac{3}{2}$ e portanto a equação reduzida da recta r é do tipo $y=-\frac{3}{2}x+b$. Como o ponto de coordenadas $(\pi,0)$ pertence à recta r (é o ponto de tangência), substituindo-o na equação reduzida de r vem: $0=-\frac{3}{2}\times\pi+b\Leftrightarrow b=\frac{3\pi}{2}$.

Logo, $r: y=-\frac{3x}{2}+\frac{3\pi}{2}$