EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO – MATEMÁTICA A

PROVA MODELO N.º 5

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Recursos para Matemática

Site: http://recursos-para-matematica.webnode.pt/

Facebook: https://www.facebook.com/recursos.para.matematica

GRUPO I – ITENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. Considere uma caixa com vinte compartimentos numerados de 1 a 20. Pretende-se guardar nessa caixa doze bolas, uma por compartimento: cinco pretas, indistinguíveis; quatro brancas numeradas de 1 a 4; três azuis, numeradas de 1 a 3.

De quantas maneiras distintas se pode fazê-lo?

A $^{20}C_5 \times {}^{15}A_4 \times 3!$

B $^{20}C_{12} \times {}^{12}C_5 \times 7!$

C $^{20}C_5 \times 7!$

D $^{20}C_{12} \times {}^{12}C_5 \times 4! \times 3!$

2. Considere uma certa linha n do triângulo de Pascal tal que $^{n}C_{308} + {}^{n}C_{309} = {}^{n+1}C_{1707}$.

Qual é o valor da soma de todos os elementos da linha seguinte, excluindo o primeiro e o último?

A $2 \times \left(2^{2015} - 1\right)$

B 2^{2016}

C $2 \times \left(2^{2014} - 1\right)$

D 2^{2015}

3. Seja (v_n) a sucessão definida por $v_n = \log_4\left(2^{3n-1}\right)$.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

A (v_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{3}{2}$.

B (v_n) é uma progressão aritmética de razão 2.

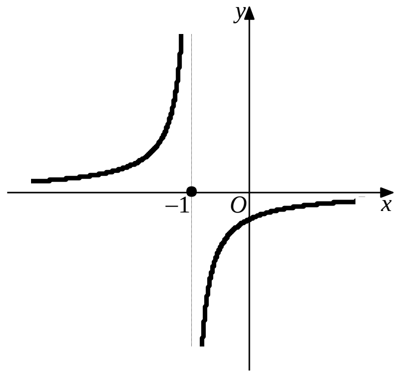
C (v_n) é uma progressão geométrica de razão 2.

D (v_n) é uma progressão aritmética de razão $\frac{3}{2}$.

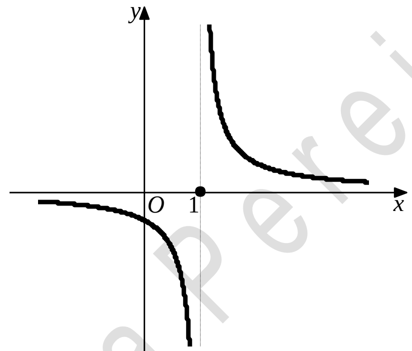
4. Sejam (u_n) a sucessão definida por $u_n = \dfrac{1}{n\,\text{sen}\left(\dfrac{1}{n}\right)}$ e f uma função de domínio $\mathbb{R}$ tal que $\lim f(u_n - 2) = +\infty$.

Em qual das seguintes opções pode estar representado parte do gráfico da função f?

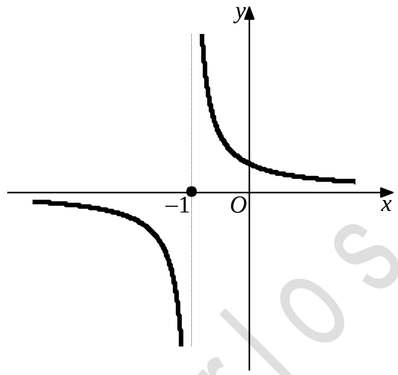
A



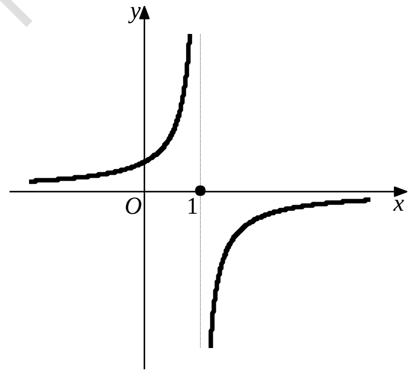
B



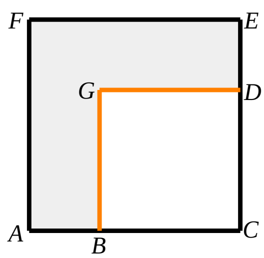
C



D



5. Na figura estão representados os quadrados $[ACEF]$ e $[BCDG]$. Sabe-se que o Ponto D pertence ao lado $[CE]$ de tal modo que $\overline{CD} = 2\overline{DE}$.



Seja a o valor da área do polígono $[ABGDEF]$ e b o valor da área do trapézio $[DEFG]$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{FC} = a$ **B** $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{FC} = b$ **C** $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{FC} < a$ **D** $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{FC} > a$

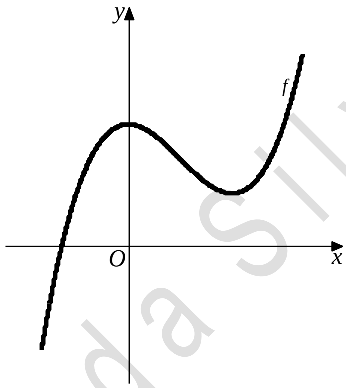
6. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(2ax)}{x^2} & \text{se} \quad x<0 \\ \dfrac{\ln(x+a)-\ln a}{4x} & \text{se} \quad x>0 \end{cases}, \text{ com } a \in \mathbb{R}^+$$

Sabe-se que a função g tem limite no ponto de abcissa 0. Qual é o valor de a?

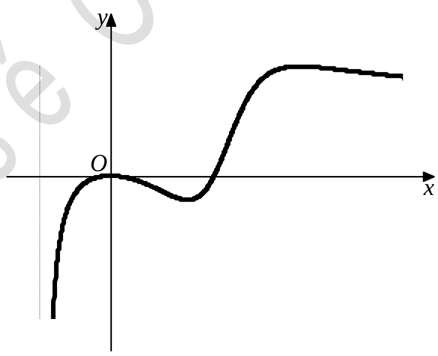
A $\frac{1}{8}$ **B** $\frac{1}{2}$ **C** 2 **D** 8

7. Na figura está representado em referencial o.n. xOy parte do gráfico de uma função f de domínio $\mathbb{R}$.

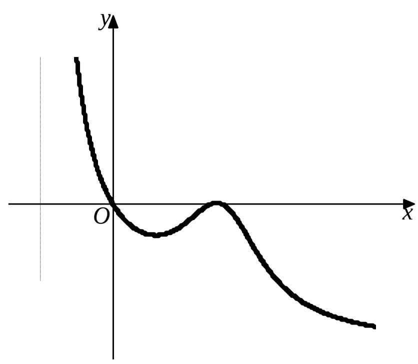


Seja g a função definida por $g(x) = \ln(f(x))$. Em qual das opções seguintes pode estar representado parte do gráfico da função g', função derivada de g.

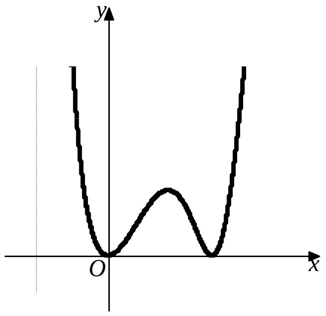
A



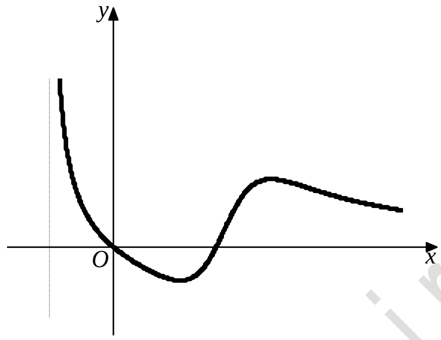
B



C



D



8. Em $\mathbb{C}$, conjunto do números complexos, considere o polinómio $p(z)=az^3+bz^2+cz+d$, com $a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

Em qual das seguintes opções não podem estar duas raízes do polinómio p?

A 2 e $1+i$

B $\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$ e $\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}$

C i^{4n+5}, $n\in\mathbb{N}$ e $\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

D $2+3i$ e $2-3i$

GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto do números complexos, considere $z_1=\dfrac{1+\left(i\operatorname{cis}\frac{\pi}{9}\right)^{27}}{\sqrt{3}i-1}\times\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right)+i\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)$.

Determine o menor $n\in\mathbb{N}$, de modo que a imagem geométrica de $(z_1)^n$ pertença à região do plano de Argand definida pela condição $|\arg(z)|=\frac{\pi}{12}$.

2. Num saco estão alguns dados cúbicos numerados de 1 a 6 e indistinguíveis ao tacto.

Sabe-se que:

- o número de dados viciados é o dobro do número de dados equilibrados;
- lançando qualquer um dos dados viciados, a probabilidade de sair face numerada com um número par é 15%.

2.1. Escolhe-se, ao acaso, um dos dados do saco. Depois de lançado, verifica-se que saiu um número ímpar. Qual é a probabilidade de ser um dado equilibrado?

2.2. Lançando qualquer um dos dados viciados, sabe-se ainda que:

- qualquer uma das faces numeradas com um número par tem igual probabilidade de sair;

- a probabilidade de sair uma face numerada com um número primo, sabendo que está numerada com um número ímpar é $\frac{1}{5}$;

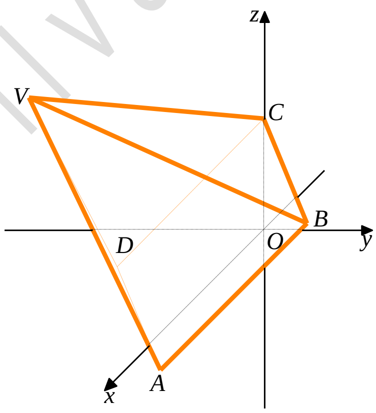
- saindo uma face numerada com um número primo, a probabilidade de estar numerada com um múltiplo de 3 é $0{,}55$.

Lança-se um dado viciado. Considere a variável aleatória X: «número da face voltada para cima».

Defina por meio de uma tabela a distribuição de probabilidades da variável aleatória X. Apresente as probabilidades na forma de dízima.

3. Na figura está representada, em referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide $[ABCDV]$ cuja base é o quadrilátero $[ABCD]$.

Sabe-se que:



- o ponto V tem a cota igual a 5 e abcissa positiva;
- o ponto A tem pertence ao plano xOz;
- a abcissa do ponto A é o dobro da abcissa do ponto V;
- O ponto C pertence ao eixo Oz;
- uma equação do plano ACV é $5x+8y+10z=30$;
- $\overrightarrow{AV}\cdot\overrightarrow{CA}=-56$

3.1. Mostre que $A(8,0,-1)$ e que $V(4,-5,5)$.

Sugestão: designe por a, com $a>0$, a abcissa do ponto V.

3.2. Admita que $D(0,-4,-1)$. Mostre que uma condição que define o plano ABC é $x-2y+2z=6$ e determine a altura da pirâmide.

4. Considere a função g, de domínio $[0,+\infty[$, definida por:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-x^2}{e^{-2x+2}-1} & \text{se} \quad 0\le x<1\\[2ex] \dfrac{x^2\ln x-2}{x} & \text{se} \quad x\ge 1\end{cases}$$

4.1. Verifique se a função g é contínua em $x=1$ e conclua sobre a existência de assimptotas verticais do seu gráfico.

4.2. Para $x \in [1,+\infty[$, estude o gráfico da função g quando ao sentido das concavidades e mostre que tem um único ponto de inflexão de coordenadas $\left(2, \ln\left(\frac{4}{e}\right)\right)$.

4.3. Seja r uma recta de inclinação α, com $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que $7\operatorname{sen}(\alpha+\pi) = -2\operatorname{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$.

Para $x \in [1,+\infty[$, considere o ponto P, pertencente ao gráfico de g, tal que a recta tangente ao gráfico de g no ponto P é perpendicular à recta r.

Recorrendo à calculadora gráfica, determine as coordenadas de P.

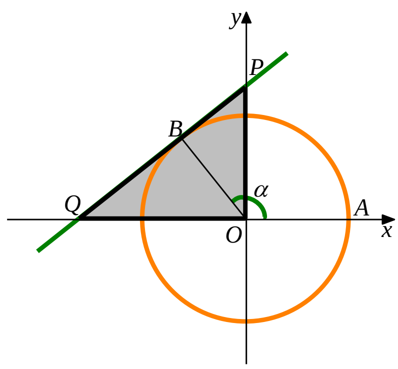
Na sua resposta deve:

- escrever a condição que permite resolver o problema;
- reproduzir o(s) gráfico(s) (devidamente identificado(s)) que achar necessário(s) para a resolução do problema;
- indicar as coordenadas do ponto P, arredondadas às décimas.

5. Na figura está representado, em referencial o.n. xOy, o círculo trigonométrico e o triângulo $[OPQ]$.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence à circunferência e ao semi-eixo positivo Ox;
- o ponto P pertence ao eixo Oy;
- o ponto Q pertence ao eixo Ox;
- a recta QP é tangente ao círculo no ponto B.



Seja α a amplitude do ângulo AOB, $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

5.1. Mostre que a área do triângulo $[OPQ]$ é dada em função α de por $g(\alpha) = -\frac{1}{\operatorname{sen}(2\alpha)}$.

5.2. Determine o valor de α para o qual a área o triângulo $[OPQ]$ é mínima.

Interprete geometricamente o resultado obtido e determine o valor mínimo da área do triângulo $[OPQ]$.

6. Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ tal que a sua derivada, f', também é contínua em $\mathbb{R}$.

Sabe-se que:

- $f''(x) > 0\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$;
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(3+x) - f(3)}{x^2 - 3x} = 0$;
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) + x \right) = 2$.

Sejam g, a função de domínio $[-3,4]$, definida por $g(x) = f'(x) - f'(2)$ e h, a função de domínio $\mathbb{R}^-$, definida por $h(x) = f(x) + \dfrac{x^3+1}{e^{-x}} - x$.

Considere as seguintes afirmações:

A A função f não tem extremos relativos.

B A função g tem pelo menos um zero.

C O gráfico da função h tem uma assimptota de equação $y = -2x + 2$, quando $x \to -\infty$.

Elabore uma composição na qual indique, justificando, se cada uma das afirmações é verdadeira ou falsa. Na sua resposta apresente três razões diferentes, uma para cada afirmação.

F I M

Solucionário

Grupo I – Itens de escolha múltipla

1. B **2.** A **3.** D **4.** C **5.** C **6.** B **7.** D **8.** B

Grupo II – Itens de resposta aberta

1. $n=35$

2.1. $\frac{5}{22}$

2.2.

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	0,68	0,05	0,121	0,05	0,049	0,05

3.2. 6

4.1. A função g não é contínua em $x=1$; Como $\lim_{x\to 1^-} g(x) = -\frac{3}{4}$ e $\lim_{x\to 1^+} g(x) = -2$ e como g é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, o gráfico de g não tem assimptotas verticais.

4.2. Para $x \in [1,+\infty[$, o gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $[1,2]$ e tem a concavidade voltada para cima em $[2,+\infty[$.

4.3. $P(a,g(a))$, com $a\approx 12$ e $g(a)=\frac{a^2\ln a-2}{a}\approx 29,7$

5.2. A área do triângulo $[OPQ]$ é mínima se $\alpha=\frac{3\pi}{4}$. Se $\alpha=\frac{3\pi}{4}$ então $\overline{OP}=\overline{OQ}$ pelo que o triângulo $[OPQ]$ é rectângulo e isósceles e a sua área é 1.

6.

A Falsa

B Verdadeira

C Verdadeira