Exame Nacional do Ensino Secundário – Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Recursos para Matemática

Site: http://recursos-para-matematica.webnode.pt/

Facebook: https://www.facebook.com/recursos.para.matematica

Prova Modelo n.º 11

Julho de 2018

Proposta de Resolução

CADERNO 1

1.

1.1. Seja X a variável aleatória «número de vezes que sai face com o número 2 em quatro lançamentos do dado».

Assim, X é uma variável aleatória com distribuição binomial de parâmetros $n=4$ (quatro provas repetidas) e seja p, com $0<p<1$, a probabilidade de sucesso, isto é, a probabilidade de sair face com o número 2 em cada um dos lançamentos.

Logo, como $P(X=2)=\frac{8}{27}$, vem que:

$$P(X=2)=\frac{8}{27} \Leftrightarrow {}^4C_2 \times p^2(1-p)^2=\frac{8}{27} \Leftrightarrow 6\left(p(1-p)\right)^2=\frac{8}{27} \Leftrightarrow \left(p(1-p)\right)^2=\frac{8}{6\times 27} \Leftrightarrow \left(p(1-p)\right)^2=\frac{4}{81}$$

Como $p(1-p)>0$, tem-se que $p(1-p)=\sqrt{\frac{4}{81}}=\frac{2}{9}$.

Seja Y a variável aleatória «número de vezes que sai face com o número 2 em dez lançamentos do dado».

Assim, Y é uma variável aleatória com distribuição binomial de parâmetros $n=10$ (dez provas repetidas) e probabilidade de sucesso igual a p, pelo que a probabilidade pedida é dada por:

$$P(Y=5)={}^{10}C_5 \times p^5(1-p)^5={}^{10}C_5 \times \left(p(1-p)\right)^5={}^{10}C_5 \times \left(\frac{2}{9}\right)^5 \approx 0{,}137$$

Resposta: C

1.2. Pela lei dos co-senos tem-se que:

$$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos\alpha \Leftrightarrow (3\cos\alpha)^2=2^2+1^2-2\times 2\times 1\times\cos\alpha \Leftrightarrow 9\cos^2\alpha+4\cos\alpha-5=0$$

Fazendo $y=\cos\alpha$, vem que $9y^2+4y-5=0 \Leftrightarrow y=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\times 9\times(-5)}}{2\times 9} \Leftrightarrow y=-1 \ \vee \ y=\frac{5}{9}$

Mas como $\cos\alpha>0$, pois $\overline{AC}>0$ e $\overline{AC}=\cos\alpha$, vem que $\cos\alpha=\frac{5}{9} \Rightarrow \alpha=\arccos\left(\frac{5}{9}\right)\approx 0{,}982$.

Resposta: B

2.

2.1. Tem-se que $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}$ e $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}$, pelo que:

$$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA}+\underbrace{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}_{=0;\ \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}}+\underbrace{\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BA}}_{=0;\ \overrightarrow{BE}\perp\overrightarrow{BA}}+\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AD}=$$

$$\underset{\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BE}}{=}\underbrace{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{BA}\right\|}_{=\overline{AB}\times\overline{BA}=\overline{AB}^2}\times\cos\left(180^\circ\right)+0+0+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}=\overline{AB}^2\times(-1)+\left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2=\overline{AD}^2-\overline{AB}^2$$

Assim:

- o ponto B pertence ao eixo Oz, pelo que as suas coordenadas são da forma $B\left(0,0,z_B\right)$.

Como o ponto B pertence ao plano ABC, vem que: $2\times 0+2\times 0+z_B=2\Leftrightarrow z_B=2\Rightarrow B\left(0,0,2\right)$, pelo que:

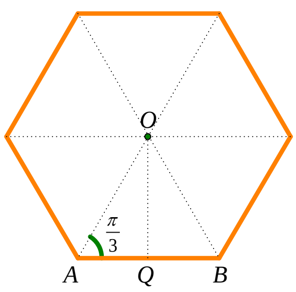
$$\overline{AB}=\sqrt{(-1-0)^2+(2-0)^2+(0-2)^2}=\sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2}=\sqrt{9}=3$$

- para determinar o valor de $\overline{AD}$, vamos escrever o volume do sólido em função de $\overline{AD}$.

Como o prisma e a pirâmide têm a mesma altura, cuja medida do comprimento é igual a $\overline{AD}$ e como a base de ambos é um hexágono regular de lado 3, vem que:

$$V_{sólido}=V_{prisma}+V_{pirâmide}=A_{hexágono}\times\overline{AD}+\frac{A_{hexágono}\times\overline{AD}}{3}=\frac{4A_{hexágono}\times\overline{AD}}{3}$$

Representando o hexágono da base do sólido:



O triângulo $[AOB]$ é equilátero, visto que o hexágono é regular, pelo que a amplitude do ângulo BOA é $\frac{\pi}{3}$.

Assim $\overline{OA}=\overline{AB}=3$, pelo que $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\overline{OQ}}{3}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\overline{OQ}}{3}\Leftrightarrow\overline{OQ}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Logo, a área do hexágono é igual a $6\times A_{[AOB]}=6\times\frac{\overline{AB}\times\overline{OQ}}{2}=3\overline{AB}\times\overline{OQ}=3\times3\times\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{27\sqrt{3}}{2}$ e portanto:

$$\frac{4A_{hexágono}\times\overline{AD}}{3}=108\sqrt{3}\Leftrightarrow\frac{4\times\frac{27\sqrt{3}}{2}\times\overline{AD}}{3}=108\sqrt{3}\Leftrightarrow\frac{2\times27\cancel{\sqrt{3}}\times\overline{AD}}{3}=108\cancel{\sqrt{3}}\Leftrightarrow18\overline{AD}=108\Leftrightarrow\overline{AD}=6$$

$\therefore\ \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=\overline{AD}^2-\overline{AB}^2=6^2-3^2=36-9=27$

2.2. Tem-se que:

- um vector normal do plano $ABC:2x+2y+z=2$ é $\vec{n}_{ABC}(2,2,1)$, sendo que este vector é colinear com $\overrightarrow{AD}$.

- $\overrightarrow{AB}=B-A=(0,0,2)-(-1,2,0)=(1,-2,2)$

Assim, os vectores $\vec{n}_{ABC}$ e $\overrightarrow{AB}$ são dois vectores não colineares paralelos ao plano *ABD*, pelo que, sendo $\vec{n}_{ABD}(a,b,c)$, um vector normal a *ABD*, vem que:

$$\begin{cases}\vec{n}_{ABD}\cdot\vec{n}_{ABC}=0\\ \vec{n}_{ABD}\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a,b,c)\cdot(2,2,1)=0\\ (a,b,c)\cdot(1,-2,2)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a+2b+c=0\\ a-2b+2c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(2b-2c)+2b+c=0\\ a=2b-2c\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4b-4c+2b+c=0\\ a=2b-2c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6b=3c\\ a=2b-2c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=2b\\ a=2b-2\times2b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=2b\\ a=-2b\end{cases}$$

Portanto, $\vec{n}_{ABD}(-2b,b,2b)$, com $b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, pelo que, fazendo $b=-1$, vem que $\vec{n}_{ABD}(2,-1,-2)$.

Assim, como $B(0,0,2)$, pertence ao plano *ABD*, uma sua equação cartesiana é:

$$2(x-0)-1(y-0)-2(z-2)=0\Leftrightarrow2x-y-2z+4=0\Leftrightarrow2x-y-2z=-4$$

2.3. Designando por 1, 2, 3, 4, 5 e 6 as seis faces da pirâmide, tem-se que as cores pretas e brancas podem ocupar seis posições: 1 e 2; 2 e 3; 3 e 4; 4 e 5; 5 e 6; 6 e 1. Para cada uma destas maneiras, as cores preta e branca permutam de $2!$ nas duas posições escolhidas e as restantes quatro cores permutam de $2!$ nas restantes quatro posições. Logo, as faces da pirâmide podem ser pintadas de $6\times2!\times4!$ maneiras distintas.

Para as faces do prisma começamos por escolher sete das dez dores disponíveis. O número de maneiras de o fazer é ${}^{10}C_7$. Para cada uma destas maneiras as sete cores escolhidas permutam de $2!$ nas sete faces do prisma, pelo que o prisma pode ser pintado de ${}^{10}C_7\times7!={}^{10}A_7$.

Assim, para cada uma das $6\times 2!\times 4!$ maneiras distintas de pintar as faces da pirâmide, existem ${}^{10}A_7$ maneiras distintas de pintar as faces do prisma, pelo que, o número de maneiras de pintar o sólido é:

$$6\times 2!\times 4!\times {}^{10}A_7 = 174182400$$

Resposta: C

3.

3.1. Sejam M e L os acontecimentos:

M : «O funcionário escolhido é do sexo masculino» e L : «O funcionário escolhido é licenciado»

Pelo enunciado, tem-se que:

- $P(M)=40\%=0,4 \Rightarrow P(\bar{M})=0,6$
- $P(L|M)=\frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{P(L\cap M)}{P(M)}=\frac{1}{8} \Leftrightarrow P(L\cap M)=\frac{1}{8}\times P(M) \Leftrightarrow P(L\cap M)=\frac{1}{8}\times 0,4 \Leftrightarrow P(L\cap M)=0,05$
- $P(\bar{M}|L)=\frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{P(\bar{M}\cap L)}{P(L)}=0,75 \Leftrightarrow P(\bar{M}\cap L)=0,75P(L)$

Pretende-se determinar o valor de $P(\bar{L}\cup M)$. Tem-se que:

$$P(\bar{L}\cup M)=P(\bar{L})+P(M)-\underbrace{P(\bar{L}\cap M)}_{=P(M)-P(L\cap M)}=1-P(L)+\cancel{P(M)}-\cancel{P(M)}+P(L\cap M)=1-P(L)+0,05$$

Mas como $P(L)=P(L\cap M)+P(L\cap\bar{M})$, vem que:

$$P(L)=P(L\cap M)+P(L\cap\bar{M}) \Leftrightarrow P(L)=0,05+0,75P(L) \Leftrightarrow P(L)-0,75P(L)=0,05 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,25P(L)=0,05 \Leftrightarrow P(L)=\frac{0,05}{0,25} \Leftrightarrow P(L)=0,2$$

Portanto, $P(\bar{L}\cup M)=1-P(L)+0,05=1-0,2+0,05=0,85=85\%$.

Nota: este item poderia ser resolvido recorrendo a uma tabela ou a um diagrama em árvore.

3.2. $P(Y|X)$ é a probabilidade de pelo menos três dos quatro funcionários escolhidos serem licenciados, sabendo que os quatro funcionários escolhidos são do sexo masculino.

Tem-se que 40% dos 120 funcionários são do sexo masculino, ou seja, o número destes funcionários é:

$$0,4\times 120=48$$

Dos funcionários do sexo masculino, um oitavo são licenciados, pelo que o número de funcionários que são licenciados e do sexo masculino é $\frac{1}{8}\times 48=6$.

Assim, o número de casos possíveis é ${}^{48}C_4$, que é o número de maneiras de escolher quatro funcionários do sexo masculino. Para o número de casos favoráveis temos de considerar dois casos:

- três licenciados e um não licenciado: dos seis funcionários licenciados escolhem-se três e dos restantes 42 não licenciados escolhe-se um. O número de maneiras de o fazer é ${}^{6}C_3\times{}^{42}C_1={}^{6}C_3\times 42$.

- quatro licenciados: dos seis funcionários licenciados escolhem-se quatro. O número de maneiras de o fazer é ${}^{6}C_4$.

Portanto, o número de casos favoráveis é ${}^{6}C_3\times 42+{}^{6}C_4$.

Logo, pela lei de Laplace, vem que $P(Y|X)=\frac{{}^{6}C_3\times 42+{}^{6}C_4}{{}^{48}C_4}\approx 0,0044$.

4. A função f'' é duas vezes derivável no seu domínio, pelo que na abcissa do ponto de inflexão do gráfico de f a segunda derivada é nula. Assim, pretende-se determinar t de modo que $f''(t)=0$.

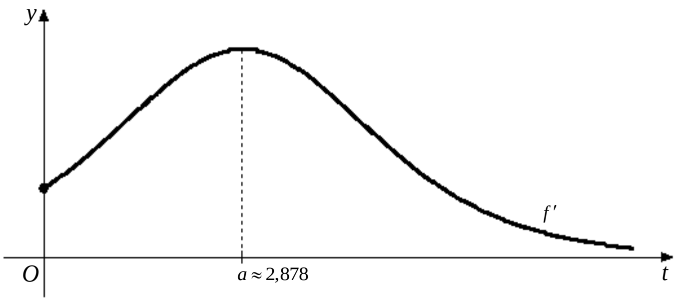
Mas como a função f é duas vezes derivável, no caso de existir um instante em que a primeira derivada atinge um máximo (ou um mínimo), a segunda derivada é nula, pelo que, recorrendo à calculadora gráfica vamos determinar o(s) maximizante(s) (ou minimizante(s)) da primeira derivada de f.

Comecemos então por determinar a expressão de f':

$$f'(t)=\frac{3'\left(1+10e^{-0,8t}\right)-3\left(1+10e^{-0,8t}\right)'}{\left(1+10e^{-0,8t}\right)^2}=\frac{0\times\left(1+10e^{-0,8t}\right)-3\times 10\times(-0,8t)'\,e^{-0,8t}}{\left(1+10e^{-0,8t}\right)^2}=$$

$$=\frac{-30\times(-0,8)e^{-0,8t}}{\left(1+10e^{-0,8t}\right)^2}=\frac{24e^{-0,8t}}{\left(1+10e^{-0,8t}\right)^2}$$

Utilizando as capacidades gráficas da calculadora, define-se $y_1 = f'(t)$ na janela $[0,10]\times[0,1]$:



Portanto, a função f' tem máximo absoluto no ponto de abcissa a, com $a \approx 2{,}878$. Nesse ponto a sua derivada, que corresponde à segunda derivada de f é nula, isto é, $f''(a) = 0$, além de que $f''(a^-) > 0$ e $f''(a^+) < 0$, pelo que o gráfico de f tem um ponto de inflexão em $x = a$, com $a \approx 2{,}878$.

Como $0{,}878 \times 60 \approx 53$, vem que passadas, aproximadamente, duas horas e 53 minutos, a taxa de crescimento do número de bactérias começa a diminuir.

5. Tem-se que $z = 2\left(\underbrace{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha}_{=\cos(2\alpha)} + i\operatorname{sen}(2\alpha)\right) = 2\underbrace{\left(\cos(2\alpha) + i\operatorname{sen}(2\alpha)\right)}_{=e^{i(2\alpha)}} = 2e^{i(2\alpha)}$.

Como z é uma raiz de índice n de -128, vem que $|z|^n = |-128| \Leftrightarrow 2^n = 128 \Leftrightarrow 2^n = 2^7 \Leftrightarrow n = 7$, pelo que z é uma raiz de índice 7 de -128.

Determinando então as raízes sétimas de -128, vem:

$$\sqrt[7]{-128} = \sqrt[7]{128e^{i\pi}} = \sqrt[7]{128}\, e^{i\left(\frac{\pi+2k\pi}{7}\right)} = 2e^{i\left(\frac{\pi+2k\pi}{7}\right)},\ k \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$$

Assim:

- se $k = 0 \rightarrow 2e^{i\frac{\pi}{7}}$; o seu afixo **não** pertence ao $3.^{\text{o}}Q$
- se $k = 1 \rightarrow 2e^{i\frac{3\pi}{7}}$; o seu afixo **não** pertence ao $3.^{\text{o}}Q$
- se $k = 2 \rightarrow 2e^{i\frac{5\pi}{7}}$; o seu afixo **não** pertence ao $3.^{\text{o}}Q$
- se $k = 3 \rightarrow 2e^{i\pi}$; o seu afixo **não** pertence ao $3.^{\text{o}}Q$
- se $k = 4 \rightarrow 2e^{i\frac{9\pi}{7}}$; o seu afixo pertence ao $3.^{\text{o}}Q$
- se $k = 5 \rightarrow 2e^{i\frac{11\pi}{7}}$; o seu afixo **não** pertence ao $3.^{\text{o}}Q$
- se $k = 6 \rightarrow 2e^{i\frac{13\pi}{7}}$; o seu afixo **não** pertence ao $3.^{\text{o}}Q$

Logo, como $2e^{i\frac{9\pi}{7}}$ é a única raiz sétima de -128 que pertence ao $3.^{\text{o}}Q$, vem que:

$$2e^{i(2\alpha)} = 2e^{i\frac{9\pi}{7}} \Leftrightarrow 2\alpha = \frac{9\pi}{7} + 2k\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{9\pi}{14} + k\pi \text{ , } k \in \mathbb{Z}$$

pelo que:

- se $k=-1 \rightarrow \alpha = \frac{9\pi}{14} - \pi = -\frac{5\pi}{14}$; $-\frac{5\pi}{14} \notin \left[0, \frac{3\pi}{2}\right[$
- se $k=0 \rightarrow \alpha = \frac{9\pi}{14}$; $\frac{9\pi}{14} \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right[$
- se $k=1 \rightarrow \alpha = \frac{9\pi}{14} + \pi = \frac{23\pi}{24}$; $\frac{23\pi}{14} \notin \left[0, \frac{3\pi}{2}\right[$

$\therefore \ \alpha = \frac{9\pi}{14}$

Resposta: D

6. Tem-se que:

- (u_n) é uma progressão aritmética, pelo que, sendo r a sua razão, com $r \in \mathbb{R}$, vem que $u_{n+1} - u_n = r$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Assim, $u_8 = u_2 + 6r \underset{u_2 = u_8 + 6}{\Leftrightarrow} \cancel{u_8} = \cancel{u_8} + 6 + 6r \Leftrightarrow 0 = 6 + 6r \Leftrightarrow 6r = -6 \Leftrightarrow r = -1 \Rightarrow u_{n+1} - u_n = -1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

- $v_n = \frac{16^n}{8^{-2u_n+1}} = \frac{\left(2^4\right)^n}{\left(2^3\right)^{-2u_n+1}} = \frac{2^{4n}}{2^{-6u_n+3}} = 2^{4n+6u_n-3}$. Vejamos que a sucessão (v_n) é uma progressão geométrica:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2^{4(n+1)+6u_{n+1}-3}}{2^{4n+6u_n-3}} = 2^{\cancel{4n}+4+6u_{n+1}-\cancel{3}-\cancel{4n}-6u_n+\cancel{3}} = 2^{6u_{n+1}-6u_n+4} = 2^{6\overbrace{\left(u_{n+1}-u_n\right)}^{=-1}+4} = 2^{6\times(-1)+4} = 2^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Assim, (v_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$ e a soma dos seus seis primeiros termos é dada por:

$$v_1 \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^6}{1-\frac{1}{4}} = v_1 \times \frac{1-\frac{1}{4^6}}{\frac{3}{4}} = v_1 \times \frac{\frac{4^6-1}{4^6}}{\frac{3}{4}} = v_1 \times \frac{4\times\left(4^6-1\right)}{3\times 4^6} = v_1 \times \frac{4095}{3\times 4^5} = \frac{1365 v_1}{1024}$$

Portanto, como a soma dos seis primeiros termos de (v_n) é 10920, vem que:

$$\frac{1365 v_1}{1024} = 10920 \Leftrightarrow v_1 = \frac{10920\times 1024}{1365} \Leftrightarrow v_1 = 8192$$

Assim, como $v_1 = 2^{4\times1+6u_1-3} = 2^{6u_1+1}$, vem que:

$$2^{6u_1+1} = 8192 \underset{8192=2^{13}}{\Leftrightarrow} 2^{6u_1+1} = 2^{13} \Leftrightarrow 6u_1+1=13 \Leftrightarrow 6u_1=12 \Leftrightarrow u_1=2 \underset{u_1=u_3-2r}{\Leftrightarrow} u_3-2r=2 \underset{r=-1}{\Leftrightarrow} u_3-2\times(-1)=2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_3+2=2 \Leftrightarrow u_3=2-2 \Leftrightarrow u_3=0$$

$\therefore\ u_3=0$

7. Tem-se que:

- um vector director da recta r é $\vec{r}(8,4)$, pelo que o seu declive, m_r, é igual a $m_r=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

- as rectas r e s são perpendiculares, pelo que o declive de s, m_s, é dado por $m_s=-\frac{1}{m_r}$, pelo que $m_s=-\frac{1}{\frac{1}{2}}=-2$.

Logo $s: y=-2x+b$

- a circunferência é tangente aos eixos coordenados, pelo que o ponto A, que é o seu centro, pertence à bissectriz dos quadrantes ímpares (recta de equação $y=x$) e portanto, as suas coordenadas são da forma $A(x_A, x_A)$.

Como o ponto A pertence à recta r, substituindo na sua equação, vem:

$$(x_A,y_A)=(0,1)+k(8,4) \Leftrightarrow \begin{cases} x_A=8k \\ x_A=1+4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A=8k \\ 8k=1+4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A=8k \\ 4k=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A=8\times\frac{1}{4} \\ k=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A=2 \\ k=\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow A(2,2)$$

Mas o ponto A também pertence à recta s, pelo que, substituindo na sua equação, vem $2=-2\times2+b \Leftrightarrow b=6$.

$\therefore\ s: y=-2x+6$

Resposta: A

CADERNO 2

8.

8.1. Tem-se que:

$$r:\frac{x-1}{2a}=\frac{z-1}{a}\ \wedge\ y=4 \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x-1}{2a}=k\\ y=4\\ \frac{z-1}{a}=k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-1=2ak\\ y=4+0k\\ z-1=ak\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1+2ak\\ y=4+0k\\ z=1+ak\end{cases},\ k\in\mathbb{R}$$

Portanto, um vector director da recta r é $\vec{r}_1(2a,0,a)$, que é colinear com o vector $\vec{r}_2(2,0,1)$, pois $a\neq 0$, pelo que $\vec{r}_2$ também é um vector director de r. Um ponto da recta r é $P(1,4,1)$.

Por outro lado um vector normal do plano $\alpha:\frac{ax}{2}+y+bz=1$ é $\vec{n}_\alpha\left(\frac{a}{2},1,b\right)$.

Assim, como a recta r está contida no plano α, vem que:

- os vectores $\vec{r}_2$ e $\vec{n}_\alpha$ são perpendiculares, pelo que $\vec{r}_2\cdot\vec{n}_\alpha=0$ e portanto,

$$\vec{r}_2\cdot\vec{n}_\alpha=0\Leftrightarrow(2,0,1)\cdot\left(\frac{a}{2},1,b\right)=0\Leftrightarrow 2\times\frac{a}{2}+0\times1+1\times b=0\Leftrightarrow a+b=0\Leftrightarrow b=-a$$

- o ponto $P(1,4,1)$ pertence ao plano α, pelo que,

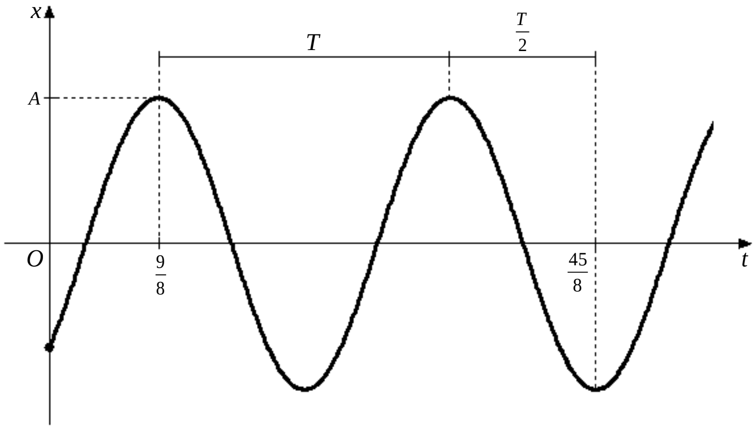
$$\frac{a\times1}{2}+4+b\times1=1\underset{b=-a}{\Leftrightarrow}\frac{a}{2}+4-a=1\underset{\times2}{\Leftrightarrow}a+8-2a=2\Leftrightarrow -a=-6\Leftrightarrow a=6\underset{b=-a}{\Rightarrow}b=-6$$

$\therefore\ a=6$ e $b=-6$

Resposta: B

8.2. Tem-se que $x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$, onde A, ω e φ são, respectivamente, a amplitude, a pulsação e a fase deste oscilador, com $A>0$, $\omega>0$ e $\varphi\in[0,2\pi[$.

Seja T o período deste oscilador e considere-se a seguinte figura:



Assim tem-se que $T+\frac{T}{2}=\frac{45}{8}-\frac{9}{8}\Leftrightarrow\frac{3T}{2}=\frac{36}{8}\Leftrightarrow\frac{3T}{2}=\frac{9}{2}\Leftrightarrow 3T=9\Leftrightarrow T=3$. Assim, como $T=\frac{2\pi}{\omega}$, vem que:

$$T=3\Leftrightarrow\frac{2\pi}{\omega}=3\Leftrightarrow 2\pi=3\omega\Leftrightarrow\omega=\frac{2\pi}{3}$$

Portanto, $x(t)=A\cos\left(\frac{2\pi}{3}t+\varphi\right)$, pelo que, como $x\left(\frac{9}{8}\right)=A$, vem que:

$$x\left(\frac{9}{8}\right)=A\Leftrightarrow\cancel{A}\cos\left(\frac{2\pi}{3}\times\frac{9}{8}+\varphi\right)=\cancel{A}\Leftrightarrow\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\varphi\right)=1\Leftrightarrow\frac{3\pi}{4}+\varphi=0+2k\pi\Leftrightarrow\varphi=-\frac{3\pi}{4}+2k\pi\text{ , } k\in\mathbb{Z}$$

Assim:

- se $k=0\rightarrow\varphi=-\frac{3\pi}{4}$; $-\frac{3\pi}{4}\notin[0,2\pi[$
- se $k=1\rightarrow\varphi=-\frac{3\pi}{4}+2\pi=\frac{5\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{4}\in[0,2\pi[$
- se $k=2\rightarrow\varphi=-\frac{3\pi}{4}+4\pi=\frac{13\pi}{4}$; $\frac{13\pi}{4}\notin[0,2\pi[$

$\therefore\ \omega=\frac{2\pi}{3}$ e $\varphi=\frac{5\pi}{4}$

Resposta: C

9. Tem-se que:

- $i^{35} = i^{32+3} = i^{4\times 8} \times i^3 = \left(i^4\right)^8 \times i^2 \times i = 1^8 \times (-1) \times i = -i$

- $z_1 = \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha = e^{i\alpha}$, pelo que $\overline{z}_1 = e^{i(-\alpha)}$ e portanto $\left(\overline{z}_1\right)^5 = \left(e^{i(-\alpha)}\right)^5 = e^{i(-5\alpha)}$. Assim:

$$z_2 = \frac{i^{35}-2}{(2i-1)\left(\overline{z}_1\right)^5} = \frac{-i-2}{(2i-1)e^{i(-5\alpha)}} = \frac{-2-i}{-1+2i} \times \frac{-1-2i}{-1-2i} \times \frac{1}{e^{i(-5\alpha)}} = \frac{2+4i+i+2i^2}{(-1)^2-(2i)^2} \times \frac{1}{e^{i(-5\alpha)}} =$$

$$= \frac{\cancel{2}+5i-\cancel{2}}{1-4i^2} \times \frac{1}{e^{i(-5\alpha)}} = \frac{5i}{1+5} \times \frac{1}{e^{i(-5\alpha)}} = i \times \frac{1}{e^{i(-5\alpha)}} = \frac{i}{e^{i(-5\alpha)}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i(-5\alpha)}} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+5\alpha\right)}$$

- sendo θ um argumento de $\sqrt{6}-3\sqrt{2}\,i$, tem-se que:

$$\text{tg}\,\theta = \frac{-3\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = -\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2\times 3}} = -\frac{3\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}\times\sqrt{3}} = -\frac{3}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\frac{\cancel{3}\sqrt{3}}{\cancel{3}} = -\sqrt{3}, \text{ com } \theta \in 4.^{\text{o}}\,Q, \text{ pelo que } \theta = -\frac{\pi}{3}$$

Logo, $\text{Arg}(z) = \text{Arg}\left(\sqrt{6}-3\sqrt{2}\,i\right) \Leftrightarrow \text{Arg}(z) = -\dfrac{\pi}{3}$.

Assim, o afixo de z_2 pertence à região do plano complexo definida pela condição dada se e somente se o seu argumento for da forma $-\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Portanto:

$$\frac{\pi}{2} + 5\alpha = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow 5\alpha = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow 5\alpha = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Leftrightarrow \alpha = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{5}, \ k \in \mathbb{Z}$$

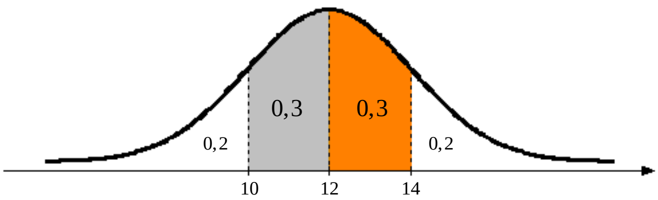
Assim:

- se $k = 0 \to \alpha = -\dfrac{\pi}{6}$; $-\dfrac{\pi}{6} \notin [0, \pi[$
- se $k = 1 \to \alpha = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{7\pi}{30}$; $\dfrac{7\pi}{30} \in [0, \pi[$
- se $k = 2 \to \alpha = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{4\pi}{5} = \dfrac{19\pi}{30}$; $\dfrac{19\pi}{30} \in [0, \pi[$
- se $k = 3 \to \alpha = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{6\pi}{5} = \dfrac{31\pi}{30}$; $\dfrac{31\pi}{30} \notin [0, \pi[$

$\therefore \ \alpha = \dfrac{7\pi}{30} \ \vee \ \alpha = \dfrac{19\pi}{30}$

10.

10.1. Consideremos a seguinte figura:



Tem-se que:

- $P(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma) \approx 0,6827$ pelo que, como $P(10 < X < 14) = 0,3 \times 2 = 0,6$, vem que:

$$\mu+\sigma > 14 \underset{\mu=12}{\Leftrightarrow} 12+\sigma > 14 \Leftrightarrow \sigma > 2$$

Logo, a afirmação da opção **A** é verdadeira.

- $P(X \le 10) = P(X \ge 12) - \underbrace{P(10 \le X \le 12)}_{=0,3} = 0,5 - 0,3 = 0,2 = 20\%$

Logo, a afirmação da opção **B** é verdadeira.

- $P(X \le 14 | X \ge 10) = \dfrac{P(X \le 14 \ \wedge \ X \ge 10)}{P(X \ge 10)} = \dfrac{P(10 \le X \le 14)}{P(10 \le X \le 12) + P(X \ge 12)} = \dfrac{2 \times 0,3}{0,3+0,5} = \dfrac{0,6}{0,8} = \dfrac{3}{4} = 75\%$

Logo, a afirmação da opção **C** é falsa.

- $P(X \le 10 | X \le 14) = \dfrac{P(X \le 10 \ \wedge \ X \le 14)}{P(X \le 14)} = \dfrac{P(X \le 10)}{P(X \le 12) + P(12 \le X \le 14)} = \dfrac{0,2}{0,3+0,5} = \dfrac{0,2}{0,8} = \dfrac{1}{4} = 25\%$

Logo, a afirmação da opção **D** é verdadeira.

Resposta: C

10.2. Tem-se que:

- $\overline{AB} = 2c$ (distância focal), pelo que $A_{[ABC]} = 6 \Leftrightarrow \frac{\overline{AB} \times y_C}{2} = 6 \Leftrightarrow \frac{2c \times \cancel{2}}{\cancel{2}} = 6 \Leftrightarrow 2c = 6 \Leftrightarrow c = 3$

- $\overline{AC} + \overline{BC} = 2a$ (eixo maior), pelo que:

$$P_{[ABC]} = 14 \Leftrightarrow \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} = 14 \Leftrightarrow 2c + 2a = 14 \underset{2c=6}{\Leftrightarrow} 6 + 2a = 14 \Leftrightarrow 2a = 8 \Leftrightarrow a = 4 \Rightarrow a^2 = 16$$

- $a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow 16 = b^2 + 3^2 \Leftrightarrow 16 - 9 = b^2 \Leftrightarrow b^2 = 7$

A equação reduzida da elipse é da forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, sendo a o semi-eixo maior e b o semi-eixo menor. Assim, como $a^2 = 16$ e $b^2 = 7$, a equação reduzida da elipse da figura é $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$.

Resposta: D

11.

11.1. Tem-se que $A_{[OABC]} = 2 \times A_{[OBC]} = \cancel{2} \times \frac{\overline{OB} \times \overline{CD}}{\cancel{2}} \underset{\overline{OB} = \overline{OD} + \overline{BD}}{=} \left(\overline{OD} + \overline{BD}\right) \times \overline{CD}$.

Mas como o arco BC está centrado no ponto D vem que $\overline{CD} = \overline{BD}$, pelo que:

$$A_{[OABC]} = \left(\overline{OD} + \overline{BD}\right) \times \overline{CD} = \left(\overline{OD} + \overline{CD}\right) \times \overline{CD}$$

Por outro lado tem-se que $C(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$, com $\cos\alpha > 0$ e $\operatorname{sen}\alpha < 0$, pelo que $\overline{OD} = -\operatorname{sen}\alpha$ e $\overline{CD} = \cos\alpha$.

Assim,

$$A_{[OABC]} = \left(\overline{OD} + \overline{CD}\right) \times \overline{CD} = (-\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha) \times \cos\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha =$$

$$= \cos^2\alpha - \frac{\overbrace{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}^{=\operatorname{sen}(2\alpha)}}{2} = \cos^2\alpha - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}$$

$$\therefore \; g(\alpha) = \cos^2\alpha - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}$$

11.2. Tem-se que:

- $g'(\alpha) = 2\cos\alpha(\cos\alpha)' - \dfrac{(2\alpha)'\cos(2\alpha)}{2} = 2\cos\alpha(-\operatorname{sen}\alpha) - \dfrac{\cancel{2}\cos(2\alpha)}{\cancel{2}} =$

$$= -\underbrace{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}_{=\operatorname{sen}(2\alpha)} - \cos(2\alpha) = -\operatorname{sen}(2\alpha) - \cos(2\alpha)$$

- $g'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -\operatorname{sen}(2\alpha) - \cos(2\alpha) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2\alpha) = -\cos(2\alpha) \Leftrightarrow 2\alpha = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow \alpha = -\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$

Outra resolução: tem-se que:

$$g'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -\operatorname{sen}(2\alpha) - \cos(2\alpha) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2\alpha) = -\cos(2\alpha) \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{\cos(2\alpha)} = -1 \Leftrightarrow \operatorname{tg}(2\alpha) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha = -\frac{\pi}{4} + k\pi \ \wedge\ 2\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \alpha = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \ \wedge\ \alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

Assim, como $\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$, vem que $\alpha = -\dfrac{\pi}{8}$.

Recorrendo a uma tabela de variação do sinal de g', vem:

α	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{8}$		0
$g'(\alpha)^*$		$+$	0	$-$	0
g		$\nearrow$	máx.	$\searrow$	mín.

Logo, a função g é decrescente em $\left[-\dfrac{\pi}{8}, 0\right]$ e é crescente em $\left]-\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{8}\right]$. Tem um máximo absoluto em $\alpha = -\dfrac{\pi}{8}$ e um mínimo relativo $\alpha = 0$. Portanto, o valor máximo da área do quadrilátero $[OABC]$ é:

$$g\left(-\frac{\pi}{8}\right) = \cos^2\left(-\frac{\pi}{8}\right) - \frac{\operatorname{sen}\left(2\times\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right)}{2} \underset{i)}{=} \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} - \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

i) Como $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$, para $\alpha = -\dfrac{\pi}{8}$, vem que:

$$\cos\left(2\times\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right) = 2\cos^2\left(-\frac{\pi}{8}\right) - 1 \Leftrightarrow \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 1 = 2\cos^2\left(-\frac{\pi}{8}\right) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 2\cos^2\left(-\frac{\pi}{8}\right) \Leftrightarrow \cos^2\left(-\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}$$

*** Nota:**

▪ tem-se que $-\frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{8}\right[$ e

$$-\text{sen}\left(2\times\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)-\cos\left(2\times\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=-\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-(-1)-0=1\Rightarrow-\text{sen}\left(2\times\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)-\cos\left(2\times\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)>0\ ;$$

▪ tem-se que $0 \in \left]-\frac{\pi}{8}, 0\right]$ e $-\text{sen}(2\times 0)-\cos(2\times 0)=-\text{sen}(0)-\cos(0)=0-1=-1\Rightarrow-\text{sen}(2\times 0)-\cos(2\times 0)<0$.

12.

12.1. Tem-se que:

$$\lim x_n=\lim\left(n^3-e^n\right)^2\overset{(\infty-\infty)}{=}\left(\lim\left(n^3-e^n\right)\right)^2=\left(\lim\left(n^3\left(1-\frac{e^n}{n^3}\right)\right)\right)^2=\left(\lim n^3\times\lim\left(1-\frac{e^n}{n^3}\right)\right)^2=$$

$$=\left((+\infty)^3\times\left(1-\underbrace{\lim\frac{e^n}{n^3}}_{\text{Limite notável}}\right)\right)^2=\left(+\infty\times\left(1-(+\infty)\right)\right)^2=\left(+\infty\times(-\infty)\right)^2=(-\infty)^2=+\infty$$

Portanto, $\lim h(x_n)=\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\ln^2 x}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2=\left(\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}_{\text{Limite notável}}\right)^2=0^2=0$.

Resposta: B

12.2. Tem-se que:

▪ para $x<1$, h é contínua por ser o quociente, a composição e a soma entre funções contínuas no seu domínio (funções polinomiais e exponenciais).

▪ para $x>1$, h é contínua por ser o produto, a composição e quociente entre funções contínuas no seu domínio (funções polinomiais e logarítmicas).

▪ para $x=1$, h é contínua se e somente se $\lim\limits_{x\to1^-}h(x)=\lim\limits_{x\to1^+}h(x)=h(1)$.

Assim:

▪ $\lim\limits_{x\to1^+}h(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{g(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x\ln^2 x}{x^3}=\frac{1\times\ln^2(1)}{1}=\frac{1\times 0}{1}=0$ e $h(1)=\frac{g(1)}{1^3}=\frac{1\times\ln^2(1)}{1}=\frac{1\times 0}{1}=0$

- $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{x^2+2x-3}{e^{2x-1}-e}+k\right) = k+\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+2x-3}{e^{2x-1}-e} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{ii)}{=}} k+\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x-1)(x+3)}{e\left(e^{2x-1-1}-1\right)} =$

$$= k+\lim_{x\to 1^-}\frac{x+3}{e}\times\lim_{x\to 1^-}\frac{2(x-1)}{e^{2x-2}-1}\times\frac{1}{2} = k+\frac{1+3}{e}\times\frac{1}{\underbrace{\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{e^{2x-2}-1}{2x-2}}_{\substack{x\to 1^-\Rightarrow 2x-2\to 0^- \\ \text{Limite notável}}}}\times\frac{1}{2} = k+\frac{4}{e}\times\frac{1}{1}\times\frac{1}{2} = k+\frac{4}{2e} = k+\frac{2}{e}$$

Portanto, a função h é contínua em $x=1$ se e somente se $k+\frac{2}{e}=0 \Leftrightarrow k=-\frac{2}{e}$.

$\therefore$ A função h é contínua se e somente se $k=-\frac{2}{e}$.

ii) Como $x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times 1\times(-3)}}{2\times 1} \Leftrightarrow x=-3 \ \vee \ x=1$, vem que $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$

12.3. Tem-se que:

- $g'(x)=x'\ln^2 x + x\left(\ln^2 x\right)' = 1\times\ln^2 x + x\times 2\ln x\times(\ln x)' = \ln^2 x + \cancel{x}\times 2\ln x\times\frac{1}{\cancel{x}} = \ln^2 x + 2\ln x$

- $g''(x) = 2\ln x\times(\ln x)' + 2\times\frac{1}{x} = 2\ln x\times\frac{1}{x}+\frac{2}{x} = \frac{2\ln x}{x}+\frac{2}{x} = \frac{2\ln x+2}{x}$

- $g''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2\ln x+2}{x}=0 \Leftrightarrow 2\ln x+2=0 \ \wedge \ x\neq 0 \Leftrightarrow \ln x=-1 \ \wedge \ x\neq 0 \Leftrightarrow x=e^{-1} \ \wedge \ x\neq 0$

Recorrendo a uma tabela de variação do sinal de g'', vem:

x	0		$e^{-1}=\frac{1}{e}$	$+\infty$
$2\ln x+2$	n.d.	$-$	0	$+$
x	0	$+$	$+$	$+$
$g''(x)$	n.d.	$-$	0	$+$
Gráfico de g	n.d.	$\cap$	n.d.	$\cup$

O gráfico da função g tem a concavidade voltada para baixo em $\left]0,\frac{1}{e}\right]$, tem a concavidade voltada para cima em $\left[\frac{1}{e},+\infty\right[$ e tem ponto de inflexão em $x=\frac{1}{e}$.

Itens extra:

a) Seja t a recta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa e. Assim, o declive, m_t, da recta t e dado por $g'(e)$.

Portanto, $m_t = g'(e) = \ln^2(e) + 2\ln(e) = 1^2 + 2\times 1 = 3$, pelo que a equação reduzida da recta t é do tipo $y = 3x + b$.

Como as coordenadas do ponto de tangência são $(e, g(e))$ e $g(e) = e\ln^2(e) = e\times 1^2 = e$, substituindo na equação reduzida da recta t, vem:

$$e = 3e + b \Leftrightarrow b = -2e$$

$\therefore\ t: y = 3x - 2e$

b) Tem-se que $g'(x) = \ln^2 x + 2\ln x$, pelo que:

$$g'(x) - \ln^2 x - \ln(8-2x) \geq \ln(x-1) \Leftrightarrow \cancel{\ln^2 x} + 2\ln x - \cancel{\ln^2 x} - \ln(8-2x) \geq \ln(x-1) \Leftrightarrow 2\ln x \geq \ln(8-2x) + \ln(x-1)$$

- $D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \ \wedge\ 8 - 2x > 0 \ \wedge\ x - 1 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \ \wedge\ x > 4 \ \wedge\ x > 1\} = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 4\} =]1, 4[$

- Neste domínio, tem-se:

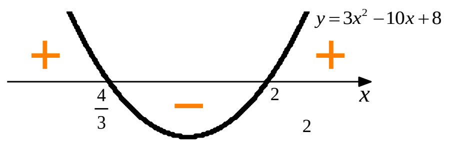
$$2\ln x \geq \ln(8-2x) + \ln(x-1) \Leftrightarrow \ln(x^2) \geq \ln((8-2x)(x-1)) \Leftrightarrow \ln(x^2) \geq \ln(8x - 8 - 2x^2 + 2x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 \geq -2x^2 + 10x - 8 \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 8 \geq 0$$

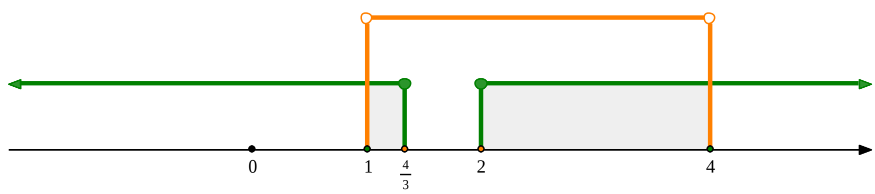
Cálculo auxiliar:

$$3x^2 - 10x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4\times 3\times 8}}{2\times 3} \Leftrightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 96}}{6} \Leftrightarrow x = \frac{10-2}{6} \ \vee\ x = \frac{10+2}{6} \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \ \vee\ x = 2$$

Assim, como a função $y = 3x^2 - 10x + 8$ é quadrática e o seu gráfico (que é uma parábola) tem a concavidade voltada para cima, o conjunto solução da inequação $3x^2 - 10x + 8 \geq 0$ é $\left]-\infty, \frac{4}{3}\right] \cup [2, +\infty[$:



Como o domínio de validade da inequação é $]1, 4[$, fazendo a intersecção vem:



$\therefore$ O conjunto solução da inequação é $\left(\left]-\infty, \frac{4}{3}\right] \cup [2, +\infty[\right) \cap]1, 4[= \left]1, \frac{4}{3}\right] \cup [2, 4[$.

13. Tem-se que $2y+x=4 \Leftrightarrow 2y=-x+4 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+2$.

Assim, como a recta de equação $y=-\frac{1}{2}x+2$ é assimptota oblíqua do gráfico de h, quando $x\to+\infty$, vem que:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}=-\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty}\left(h(x)+\frac{1}{2}x\right)=2$$

Portanto,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_2(h(x))^2-2\log_2 x}{2h(x)+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_2(h(x))^2-\log_2(x^2)}{2\left(h(x)+\frac{1}{2}x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_2\left(\frac{(h(x))^2}{x^2}\right)}{2\left(h(x)+\frac{1}{2}x\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\log_2\left(\left(\frac{h(x)}{x}\right)^2\right)}{2\lim\limits_{x\to+\infty}\left(h(x)+\frac{1}{2}x\right)}=$$

$$=\frac{\log_2\left(\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}\right)^2\right)}{2\times 2}=\frac{\log_2\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{4}=\frac{\log_2\left(\frac{1}{2}\right)^2}{4}=\frac{\log_2(2^{-2})}{4}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$$

Resposta: A

14. Tem-se que o gráfico da função f intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa -1 e o eixo Oy num ponto de ordenada positiva.

Logo, como f é estritamente monótona, vem que:

- f é estritamente crescente.
- $f(-1)=0$, sendo -1 o único zero de f, e $f(0)>0$.

Assim, vem que $\frac{g(x)}{f(1)}=1 \underset{f(1)\neq 0}{\Leftrightarrow} g(x)=f(1)$, ou seja a equação dada é equivalente à equação $g(x)=f(1)$.

Portanto:

- a função g é contínua em $\mathbb{R}$ pois é o produto e a composição entre funções contínuas em $\mathbb{R}$ (funções exponenciais, polinomiais e a função f, que é contínua em $\mathbb{R}$).

Logo, g é contínua em $[0,1]\subseteq\mathbb{R}$.

- $g(0)=e^{0^2-0}\times f(0)\times(0+a)=e^0\times f(0)\times a=1\times f(0)\times a=a\,f(0)$

Como $0<a<1$, vem que $a<1 \underset{f(0)>0}{\Leftrightarrow} a\,f(0)<f(0)$.

Por outro lado, a função $a\,f(0)$ é estritamente crescente, pelo que como $0<1$, vem que $f(0)<f(1)$, pelo que:

$$\underbrace{a\,f(0)}_{=g(0)}<f(0)<f(1)\Rightarrow g(0)<f(1)$$

- $g(1)=e^{1^2-1}\times f(1)\times(1+a)=e^0\times f(1)\times(1+a)=1\times f(1)\times(1+a)=(1+a)\,f(0)$

Como $a>0$, vem que $a>0\Leftrightarrow 1+a>1$. Mas $f(1)>f(0)>0\Rightarrow f(1)>0$, pelo que:

$$1+a>1\Leftrightarrow \underbrace{(1+a)\,f(1)}_{=g(1)}>f(1)\Rightarrow g(1)>f(1)$$

Portanto, como $g(0)<f(1)<g(1)$ e como g é contínua em $[0,1]$, pelo corolário do teorema de Bolzano-Cauchy existe pelo menos um $c\in\,]0,1[$ tal que $g(c)=f(1)$, pelo que a equação dada tem pelo menos uma solução no intervalo $[0,1]$.

FIM