Exame Nacional do Ensino Secundário – Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Sites: http://www.sinalmaismat.com/ | http://recursos-para-matematica.webnode.pt/

Facebook: https://www.facebook.com/sinalmaismat/ | https://www.facebook.com/recursos.para.matematica

Prova Modelo n.º 10

Junho de 2018

CADERNO 1

Neste grupo a utilização de calculadora gráfica é permitida.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, seleccione a opção correcta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos itens de resposta aberta apresente todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exacto.

1. Sejam $\left(E,\mathcal{P}(E),P\right)$ um espaço de probabilidade e $A,B\in\mathcal{P}(E)$ dois acontecimentos possíveis e incompatíveis.

Sabe-se que:

- $P(A\cup B)=0{,}9$
- $P(\overline{A})=0{,}3$

Qual é o valor de $P\left(A\middle|\overline{B}\right)$?

A $\frac{1}{4}$

B $\frac{3}{8}$

C $\frac{1}{2}$

D $\frac{7}{8}$

2.1.	2.2.
P2001/2002	PMC2015

2.1. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é a seguinte:

x_i	-1	0	1	2
$P(X = x_i)$	a	b	c	d

Sabe-se que:

- $P(X=-1)=P(X=2)$
- $\mu = \dfrac{5}{12}$

Qual é o valor de $P(-1 \leq X \leq 0)$?

A $\dfrac{1}{12}$

B $\dfrac{5}{12}$

C $\dfrac{7}{12}$

D $\dfrac{11}{12}$

2.2. Um ponto P desloca-se sobre uma recta numérica durante um intervalo de tempo I de tal forma que a sua abcissa é dada por:

$$x(t)=\sqrt{3}\,\text{sen}\left(\frac{\pi t}{6}\right)-\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right),\ t \in I$$

Qual é o valor da fase deste oscilador harmónico?

A $\dfrac{\pi}{6}$

B $\dfrac{2\pi}{3}$

C $\dfrac{4\pi}{3}$

D $\dfrac{11\pi}{6}$

3. O número de girafas, G, em centenas, numa reserva natural em África, relaciona-se com o tempo, t, em anos, através da igualdade:

$$t=\ln\left(\frac{G}{A-G}\right)^3 \text{, com } t\in\mathbb{R} \text{ e } 0<G<A$$

onde A é uma constante real positiva e $t=0$ corresponde ao início do ano de 2010.

3.1. Com o passar do tempo o número de girafas na reserva tende para 800.

Mostre que $A=8$.

3.2. Nessa reserva o número de hipopótamos, H, em centenas, relaciona-se com o tempo, t, em anos pela igualdade:

$$t=\ln\left(\frac{H}{6-2H}\right)^{11} \text{, com } t\in\mathbb{R} \text{ e } 0<H<3$$

onde $t=0$ corresponde ao início do ano de 2010.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determine os instantes (ano e o mês) em que o número de girafas na reserva é o triplo do número de hipopótamos.

Na sua resposta deve:

- equacionar o problema
- reproduzir o(s) gráfico(s) que considerar necessário(s) para a resolução do problema bem como a(s) coordenada(s) de algum (ou alguns) ponto(s) relevante(s)
- apresentar os instantes pedidos (ano e mês)

4. Seja (u_n) uma progressão geométrica tal que:

- $u_1 = 2$
- a soma de todos os termos da progressão (u_n) é $\frac{8}{5}$

Considera as seguintes afirmações:

I. (u_n) é monótona

II. $u_5 = \frac{1}{128}$

Em relação às afirmações anteriores, qual das seguintes opções é a correcta?

A Nenhuma é verdadeira

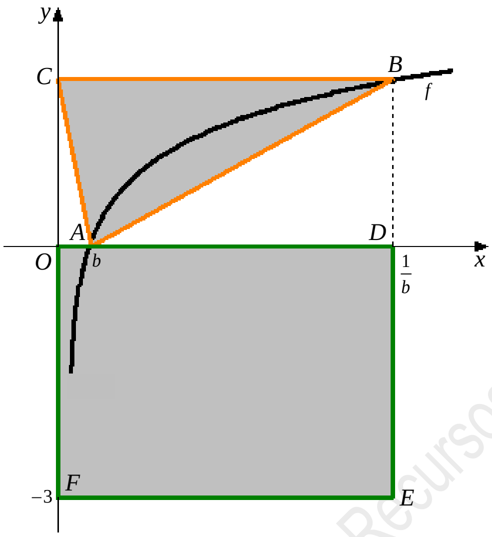
B Apenas **I** é verdadeira

C Apenas **II** é verdadeira

D Ambas são verdadeiras

5. Sejam a e b dois números reais tais que $a > 1$ e $0 < b < 1$.

Na figura estão representados em referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \log_4(ax)$, o triângulo $[ABC]$ e o rectângulo $[ODEF]$.



Sabe-se que:

- os pontos A e B pertencem ao gráfico de f e têm, respectivamente, abcissa b e $\frac{1}{b}$
- os pontos A e D pertencem ao eixo Ox e o ponto D tem a mesma abcissa que o ponto B
- os pontos C e F pertencem ao eixo Oy, o ponto C tem a mesma ordenada que o ponto B e a ordenada do ponto F é -3

Quais são os valores de a e de b de modo que a área do triângulo $[ABC]$ seja igual à área do rectângulo $[ODEF]$?

A $a = 64$ e $b = \frac{1}{16}$

B $a = 64$ e $b = \frac{1}{64}$

C $a = 16$ e $b = \frac{1}{16}$

D $a = 16$ e $b = \frac{1}{4}$

6. Num saco estão dez bolas numeradas de 1 a 10, três brancas, três pretas e quatro azuis.

6.1. As dez bolas são colocadas numa só fila de modo que:

- as bolas brancas fiquem em posições consecutivas
- as bolas pretas fiquem em posições consecutivas
- não haja bolas brancas e bolas pretas em posições consecutivas

Nestas condições, quantas disposições distintas se podem fazer?

6.2. Considere a seguinte experiência aleatória:

Retira-se, ao acaso, uma bola do saco. Volta-se a colocar essa bola no saco e acrescentam-se com n bolas, com $n \in \mathbb{N}$, da cor da bola retirada.

Em seguida retiram-se, simultaneamente e ao acaso, duas bolas do saco.

Sejam X, Y e Z os acontecimentos:

X: «a primeira bola retira é azul»

Y: «na segunda extracção é retirada uma bola branca»

Z: «na segunda extracção é retirada uma bola preta»

Sabendo que $P(Y \cap Z | X) = 0{,}075$, determine o número de bolas que foram introduzidas no saco após a primeira extracção.

Não utilize a fórmula da probabilidade condicionada, começando por interpretar o significado de $P(Y \cap Z | X)$ no contexto do problema.

7. Sejam f e h as funções de domínios $\mathbb{R}$ e $\left[0,+\infty\right[$, respectivamente, definidas por $f\left(x\right)=e^{2x-2}+6$ e

$$h\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3x-4}{\operatorname{sen}\left(1-x\right)} & \text{se} \quad 0\leq x<1\\ -5 & \text{se} \quad x=1\\ \dfrac{f\left(x\right)-7x}{x-1} & \text{se} \quad x>1\end{cases}$$

7.1. Estude a função h quanto à continuidade no ponto de abcissa 1.

7.2. Determine o conjunto solução da inequação $f\left(x\right)<\dfrac{7}{e^{1-x}}$.

FIM DO CADERNO 1

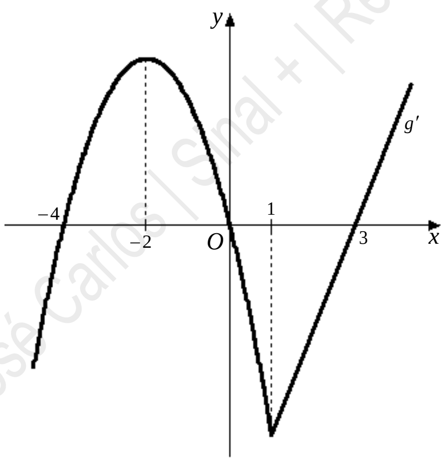
CADERNO 2

Neste grupo a utilização de calculadora gráfica não é permitida.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, seleccione a opção correcta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos itens de resposta aberta apresente todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exacto.

8. Na figura está representado, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função g', de domínio $\mathbb{R}$, função derivada de uma função g também de domínio $\mathbb{R}$.



Sabe-se que:

- para $x \leq 1$ o gráfico de g' é uma parábola e para $x > 1$ o gráfico de g' é uma recta
- a função g' tem um máximo relativo em $x = -2$ e um mínimo relativo em $x = 1$ e os seus zeros são -4, 0 e 3

Em qual das opções está uma expressão que designa um número real positivo?

A $\left(g(1) - g(2)\right) \times g''(0)$

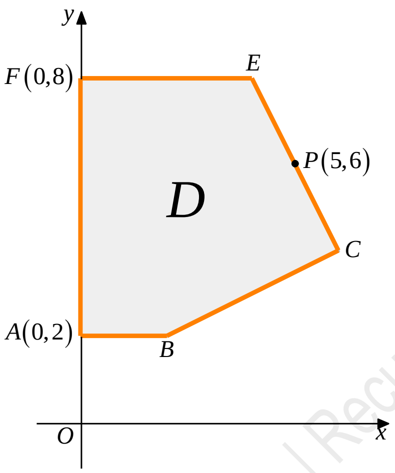
B $\left(g'(-4) - g''(0)\right) \times g''(-2)$

C $\left(g(-3) - g(-2)\right) \times g''(-1)$

D $\left(g''(-4) - g'(0)\right) \times g''(1)$

9.1.	9.2.
P2001/2002	PMC2015

9.1. Na figura está representado a sombreado a região D, região admissível de um problema de Programação Linear do qual se pretende maximizar função objectivo $z = 5kx + ky$, com $k > 0$



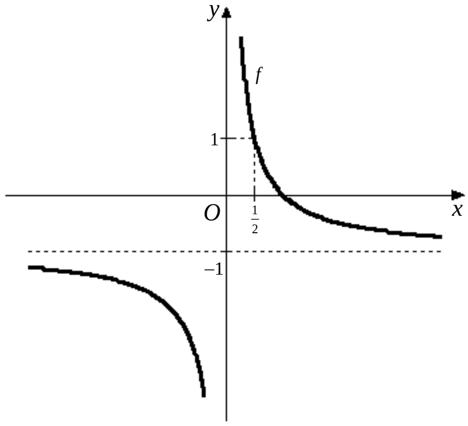
Sabe-se que:

- a recta BC é definida por $y = \frac{x}{2} + 1$
- o lado $[BC]$ é perpendicular ao lado $[CE]$ e os lados $[AB]$ e $[EF]$ são paralelos ao eixo Ox
- o ponto P pertence ao lado $[CE]$ e tem coordenadas $(5,6)$
- os pontos A e F pertencem ao eixo Oy e as suas coordenadas são, respectivamente, $(0,2)$ e $(0,8)$

Qual é a solução óptima deste problema de Programação Linear?

A $(2,2)$ **B** $(6,4)$ **C** $(5,6)$ **D** $(4,8)$

9.2. Na figura está representado parte do gráfico da função f , racional de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.



Tal como a figura sugere:

- as rectas de equação $x=0$ e $y=-1$ são as duas únicas assimptotas do gráfico de f
- o ponto de coordenadas $\left(\frac{1}{2},1\right)$ pertence ao gráfico de f

Considere a função g, real de variável real, definida por $g(x)=2\arccos\left(f(x-1)\right)-\pi$.

Qual são, respectivamente, o domínio e o contradomínio da função g?

A $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$ e $[-\pi,\pi[$

B $\left[\frac{3}{2},+\infty\right[$ e $[-\pi,\pi[$

C $\left[\frac{3}{2},+\infty\right[$ e $[-\pi,\pi]$

D $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$ e $[-\pi,\pi]$

10. Num referencial o.n. $Oxyz$, considere:

- o plano α , definido por $x+2y-z=2$
- o plano β , perpendicular a α , definido por $4a^2x+2ax=ay-a^4z$, com $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$
- a superfície esférica centrada no ponto $A(2,2,-2)$ e que é tangente ao plano α num ponto B

10.1. Determine todos os valores de a.

10.2. A superfície esférica está inscrita num cubo em que uma das suas faces está contida no plano α .

Qual é o volume do cubo?

11. Considere a função g , de domínio $\mathbb{R}^+$, tal que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-2x+4\right)=0$.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xe^{g(x)}}{g(x)e^{2x}}$?

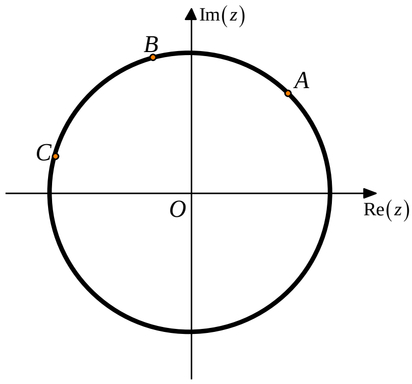
A $\dfrac{1}{2e^4}$ **B** $\dfrac{2}{e^4}$ **C** $\dfrac{e^4}{2}$ **D** $2e^4$

12. Em $\mathbb{C}$, conjuntos dos números complexos, considere $w=-\sqrt{2}+\sqrt{6}i$ e a equação $z+2\overline{z}-2\operatorname{Re}(z)=w$.

Em qual das seguintes opções está representado um argumento da solução da equação dada?

A $\dfrac{\pi}{3}$ **B** $\dfrac{2\pi}{3}$ **C** $\dfrac{4\pi}{3}$ **D** $\dfrac{5\pi}{3}$

13. Na figura está representado no plano complexo uma circunferência centrada na origem que contém os pontos A, B e C.



Sabe-se que A, B e C são os afixos de três raízes sextas consecutivas do número complexo $8i^{27}$, sendo que A é o afixo de z_1 e C é o afixo de z_2.

Seja $z_3 = \cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha$, com $\alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$.

Determine α de modo que $\dfrac{z_1 \times z_2}{(z_3)^3} = -2$.

14. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, tal que a sua derivada, também de domínio $\mathbb{R}$, é dada por:

$$f'(x) = \ln\left(e^{x-1} + e^{1-x}\right)$$

Sabe-se que $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x^2 - 3x + 2} = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{f(1)}{4}\right)$

14.1. Escreva a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

14.2. Estude a função f quanto ao sentido das concavidades e à existência de pontos de inflexão do seu gráfico.

Na sua resposta deve:

- indicar os intervalos onde o gráfico da função g tem a concavidade voltada para cima
- indicar os intervalos onde o gráfico da função g tem a concavidade voltada para baixo
- indicar as abcissas dos pontos de inflexão

15. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x)=\cos(2x)-\operatorname{sen} x$.

Sejam a e b dois números reais tais que $a<b<0$.

Mostre que a equação $b^2 g(x)=a^2 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ tem pelo menos uma solução em $]0,\pi[$.

FIM DO CADERNO 2

FIM DA PROVA MODELO 10

Cotações

Caderno 1

1.		5 pontos
2.		5 pontos
3.		
	3.1.	10 pontos
	3.2.	15 pontos
4.		5 pontos
5.		5 pontos
6.		
	6.1.	15 pontos
	6.2.	15 pontos
7.		
	7.1.	15 pontos
	7.2.	10 pontos
	Total Caderno 1	100 pontos

Caderno 2

8.		5 pontos
9.		5 pontos
10.		
	10.1.	10 pontos
	10.2.	15 pontos
11.		5 pontos
12.		5 pontos
13.		15 pontos
14.		
	14.1.	15 pontos
	14.2.	15 pontos
15.		10 pontos
	Total Caderno 2	100 pontos

Total Caderno 1 + Caderno 2 200 pontos

Solucionário

Caderno 1

1. D

2.1. C

2.2. C

3.2. Setembro de 2012

3.2. Julho de 2015 e Julho de 2024.

4. C

5. B

6.1. 17280

6.2. $n=6$

7.1. h é contínua em $x=1$

7.2. $\left]1, \ln(6e)\right[$

Caderno 2

8. C

9.1. B

9.2. B

10.1. $a=-2 \vee a=2$

10.2. $V_{cubo}=48\sqrt{6}$

11. A

12. C

13. $\alpha=\frac{25\pi}{18}$

14.1. $y=x\ln 2+\ln\left(\frac{e}{2}\right)$

14.2. O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $\left]-\infty,1\right]$, tem a concavidade voltada para cima em $\left[1,+\infty\right[$ e tem ponto de inflexão em $x=1$.