- **Duração** (caderno 1 + caderno 2): 150 minutos | **Tolerância**: 30 minutos

- Para responder aos itens de escolha múltipla, não apresentes cálculos nem justificações e escreve, na folha de respostas:
  – o número do item;
  – a letra que identifica a única opção escolhida.

  Na resposta aos itens de resposta aberta, apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias.

  Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresenta sempre o valor exato.

CADERNO 1 – COM RECURSO À CALCULADORA

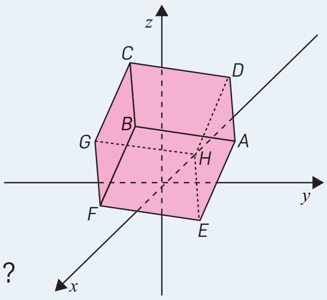
Cotação (em pontos)

8 **1.** Seja f a função definida, em $\mathbb{R}^+$, por $f(x) = \ln(x)$ e seja a um número real positivo. O teorema de Lagrange, aplicado à função f em $]a, a+1[$, permite concluir que:

(A) $\frac{1}{a+1} > \ln\left(1+\frac{1}{a}\right)$ **(B)** $\frac{1}{a} > \ln\left(1+\frac{1}{a}\right)$ **(C)** $\frac{1}{a+1} = \ln\left(1+\frac{1}{a}\right)$ **(D)** $\frac{1}{a} = \ln\left(1+\frac{1}{a}\right)$

2. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[ABCDEFGH]$. Admite que:

- o plano ABF é definido por $3x + y - \frac{3}{2}z - 12 = 0$;
- o ponto D tem coordenadas $(-2, 4, 7)$;
- o vetor $\overrightarrow{CG}$ tem coordenadas $(-2a, -3a, -6a)$, com $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.



8 **2.1.** Qual das seguintes equações cartesianas define o plano DCG?

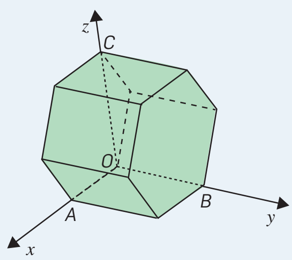
(A) $6x + 2y - 3z + 25 = 0$ **(B)** $6x + 2y - 3z - 25 = 0$

(C) $6x - 2y + 3z + 25 = 0$ **(D)** $6x - 2y + 3z - 25 = 0$

13 **2.2.** Determina o volume do cubo $[ABCDEFGH]$.

12 **2.3.** O ponto P é a interseção do plano ABC com o eixo Oz e o ponto Q é a interseção do plano ABF com o eixo Ox. Determina o valor exato de $\overline{PQ}$.

3. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um prisma hexagonal regular. Sabe-se que os vértices A, B e C pertencem aos semieixos Ox, Oy e Oz, respetivamente.



12 **3.1.** Pretende-se numerar as oito faces do prisma, com os números de um a oito (um número diferente em cada face). De quantas maneiras é possível numerar as oito faces, de modo que a soma dos números das faces opostas seja igual a nove?

8 **3.2.** Escolhem-se, ao acaso, dois vértices de cada uma das bases do prisma. A probabilidade de esses quatro pontos pertencerem a um mesmo plano perpendicular às bases do prisma é igual a:

(A) $\frac{1}{30}$ **(B)** $\frac{1}{15}$ **(C)** $\frac{2}{15}$ **(D)** $\frac{1}{6}$

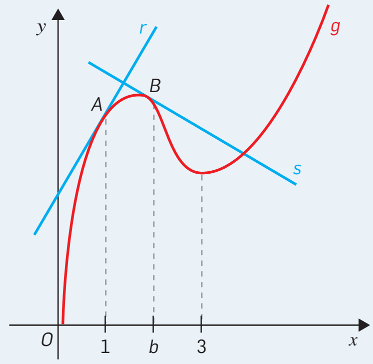
Cotação (em pontos)

4. De uma função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, sabe-se que a sua derivada é dada por:

$$g'(x) = x^2 - 3x + \frac{9}{2} - 5\ln(x)$$

4.1. Na figura ao lado estão representadas: 12

- parte do gráfico da função g;
- a reta r que é tangente ao gráfico da função g no ponto A de abcissa 1;
- a reta s que é tangente ao gráfico da função g no ponto B.



As retas r e s são perpendiculares. Seja b a abcissa do ponto B. Sabe-se que $b \in]1, 3[$. Determina, recorrendo à calculadora gráfica, o valor de b.
Na tua resposta, deves:

- equacionar o problema;
- reproduzir e identificar o(s) gráfico(s) que tiveres necessidade de visualizar na calculadora para resolver graficamente a equação;
- assinalar o ponto relevante para a resolução do problema;
- apresentar o valor de b arredondado às milésimas.

4.2. Tal como a figura sugere, o gráfico de g tem um ponto de inflexão. Determina a abcissa desse ponto, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos. 12

5. Seja a um número real não nulo. Acerca de uma progressão geométrica (u_n), sabe-se que: 12

- a, $a + 4$ e $a + 16$ são três termos consecutivos de (u_n);
- a soma dos seis primeiros termos é igual a 728.

Determina uma expressão do termo geral de (u_n).

6. Considera, num referencial o.n. Oxy, uma reta r de inclinação α. Sabe-se que $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$. 8
Qual pode ser a equação reduzida da reta r?

(A) $y = -2x$ **(B)** $y = 2x$ **(C)** $y = -3x$ **(D)** $y = 3x$

CADERNO 2 – SEM RECURSO À CALCULADORA

7. Qual é o valor de $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$? 8

(A) $\frac{\pi}{12}$ **(B)** $\frac{5\pi}{12}$ **(C)** $\frac{7\pi}{12}$ **(D)** $\frac{13\pi}{12}$

8. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considera $w = 2 + \frac{(2-i)^2}{1+2i^{13}}$. Sabe-se que w é uma raíz de ordem 3 de um certo número complexo z. Determina a raiz de ordem 3 de z, cujo afixo pertence ao primeiro quadrante. Apresenta o resultado na forma algébrica. 12

9. Seja k um número real. Considera a sucessão convergente (u_n) definida por $u_n = \left(\frac{n+k}{n+2k}\right)^n$. 8
Sabe-se que o limite de (u_n) é solução da equação $\ln(ex) = 2$. Qual é o valor de k?

(A) -1 **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** e

Cotação
(em pontos)

13 **10.** Sejam a e b números reais superiores a 1 tais que $\frac{\ln(b)}{\ln(a)} = 9$. Determina o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $\ln(a^x) \leq \ln\left(b^{\frac{1}{x}}\right)$.

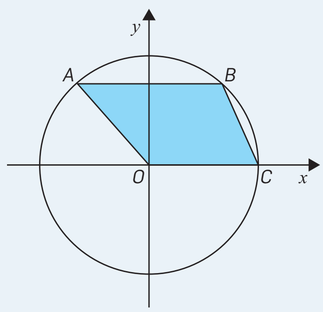
11. Para cada número real k, considera a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(6x)}{x^3 + 3x} - k^2 & \text{se } x < 0 \\ -7 & \text{se } x = 0 \\ \frac{\sqrt{x} + 2x}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

13 **11.1.** Determina os valores reais de k de modo que $\lim_{x \to 0^-} f(x) > f(0)$.

13 **11.2.** Estuda, no intervalo $]0, +\infty[$, o gráfico da função f quanto à existência de assíntotas verticais e horizontais, e, caso existam, escreva as suas equações.

8 **12.** Na figura está representada, num referencial o.n. Oxy, a circunferência de centro na origem e raio 2.



Sabe-se que:

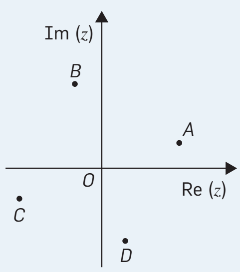
- o ponto A está no segundo quadrante e pertence à circunferência;
- o ponto B pertence à circunferência e é tal que o segmento de reta $[AB]$ é paralelo ao eixo Ox;
- o ponto C tem coordenadas $(2, 0)$;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo COA, com $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

Qual das expressões seguintes dá a área do quadrilátero $[OCBA]$, representado a sombreado, em função de α?

(A) $2 \text{ sen } \alpha - 2 \text{ sen}(2\alpha)$ **(B)** $\frac{\text{sen } \alpha - \text{sen}(2\alpha)}{2}$

(C) $2 \text{ sen } \alpha + 2 \text{ sen}(2\alpha)$ **(D)** $\frac{\text{sen } \alpha + \text{sen}(2\alpha)}{2}$

8 **13.** Seja z o número complexo cujo afixo está representado na figura ao lado pelo ponto A. Qual é o afixo do número complexo $iz + \frac{z}{i}$?



(A) O ponto B. **(B)** O ponto C.

(C) O ponto D. **(D)** O ponto O.

12 **14.** Sejam f e g as funções, de domínio $\mathbb{R}$, definidas, respetivamente, por $f(x) = -3x + \sin(3x)$ e $g(x) = 1 - \cos x$. Seja a um número real e considera as retas r e s tais que:

- a reta r é tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa a;
- a reta s é tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa $a + \frac{\pi}{2}$.

Mostra que existe, pelo menos, um $a \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$ para o qual as retas r e s são paralelas.

8. $P(B \mid \overline{A})$, no contexto da situação descrita, significa a probabilidade de se retirarem da caixa 2 duas bolas brancas, sabendo que as bolas retiradas da caixa 1 não tinham a mesma cor.
Se as bolas retiradas da caixa 1 não tinham a mesma cor, tal significa que se colocou na caixa 2 uma bola branca e uma bola preta, ficando a caixa 2 com nove bolas, das quais x são brancas ($x > 0$) e $9 - x$ são pretas. Assim, a probabilidade pedida é igual a $\frac{x(x-1)}{9 \times 8}$.

$$\frac{x(x-1)}{9 \times 8} = \frac{1}{12} \Leftrightarrow 12(x^2 - x) = 72$$
$$\Leftrightarrow 12x^2 - 12x - 72 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-6)}}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = 3 \ \vee \ x = -2$$

Como $x > 0$, então $x = 3$. Logo, existiam inicialmente duas bolas brancas e cinco bolas pretas.

Caderno 2

9. (C)

10. Como $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{12}$ existe e é negativo, para qualquer número real x, significa que a segunda derivada existe e é sempre negativa, pelo que o gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo em todo o seu domínio. Conclui-se, assim, que a afirmação (I) é verdadeira.
Como $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) = 0$, tal significa que $y = 2x$ é a equação reduzida da assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \longrightarrow +\infty$, logo não admite assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \longrightarrow +\infty$, tornando assim a afirmação (II) falsa.
Relativamente à afirmação (III), podemos afirmar que é falsa. Supondo que a reta de equação $y = 2x$ é perpendicular à reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 0, então o declive da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 0 deveria ser $-\frac{1}{2}$ (visto as retas serem perpendiculares), o que é absurdo, pois sabemos que $f'(x) > 0$, para qualquer número real x.

11. (B)

12. (D)

13.

13.2. A reta da equação $y = 3x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \longrightarrow +\infty$.

13.3. g é estritamente crescente em $\left]-\infty, -e^{\frac{1}{2}}\right[$ e é estritamente decrescente em $\left[-e^{\frac{1}{2}}, 0\right[$; g admite um máximo relativo (absoluto) igual a $\frac{1}{2e}$ para $x = -e^{\frac{1}{2}}$.

14. (C)

15.

15.1. $n = 30$

Prova-modelo 4 – páginas 420 a 423

Caderno 1

1. (B)

2. $\frac{27}{40}$

3.

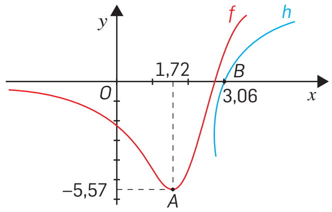
3.1. $\frac{25}{64}$ **3.2.** (C)

4.

4.1. (A) **4.2.** 42 **4.3.** $\frac{15\,876}{107}\pi$

5. $f(x) = (x - e)e^x$

$h(x) = g(f(x)) = \ln((x - e)e^x) - 2$



Área ≈ 8,5 u.a.

6. $u_n = 4n - 3$

7. (B)

Caderno 2

8. (C)

9. $w = e^{i\frac{\pi}{4}}$ e as raízes de ordem 3 de w são: $w_1 = e^{i\frac{\pi}{12}}$; $w_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$; $w_3 = e^{i\frac{17\pi}{12}}$.

10. (A)

11. (C)

12. $]-1, 0] \cup [8, 9[$

13.

13.1. $y = 0$

13.2. O gráfico de g tem a concavidade voltada para cima em $[-1, 1]$ e tem a concavidade voltada para baixo em $[1, +\infty[$; admite um ponto de inflexão de abcissa 1.

14. (D)

Prova-modelo 5 – páginas 424 a 426

Caderno 1

1. (B)

2.

2.1. (A) **2.2.** 343 u.v. **2.3.** $\frac{\sqrt{769}}{3}$

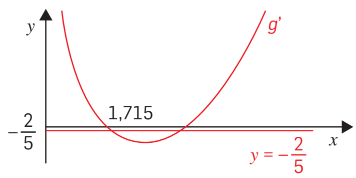
3.

3.1. 384 **3.2.** (B)

4.

4.1. $g'(x) = -\frac{1}{g'(1)}$ $\quad g'(1) = 1 - 3 + \frac{9}{2} - 0 = \frac{5}{2}$

$g'(x) = -\frac{2}{5}$



$b \approx 1{,}715$

4.2. $x = \frac{5}{2}$

5. $u_n = 2 \times 3^{n-1}$

6. (C)

Caderno 2

7. (D)

8. $\sqrt{3} - \frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)i$

9. (D)

10. $]-\infty, -3] \cup]0, 3]$

11.

11.1. $]-3, 3[$

11.2. A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de f e é única; A reta de equação $y = 2$ é assíntota horizontal ao gráfico de f.

12. (A)

13. (D)