Proposta de Resolução

1º. Teste de Avaliação — 30.10.2017
12º.Ano

Grupo I

	1	*2*	*3*	*4*	*5*
Versão 1	*D*	*A*	*D*	*C*	*A*
Versão 2	*C*	*C*	*D*	*D*	*B*

Resolução Versão 1

1. (D)
Para o condutor há duas escolhas $(^2C_1)$. Para cada uma dessas escolhas, os restantes quatro amigos podem sentar-se no interior do carro de 3! maneiras distintas, já que a Beatriz, só tem um lugar para se sentar.

2. (A)
Número de casos possíveis: $^6A'_5$
Dado que se vão escrever números com cinco algarismos e para cada algarismo há seis escolhas possíveis.
Número de casos favoráveis: $^5C_2 \times 5^3$
Comecemos por colocar os dois quatros. Para os dois quatro temos de escolher duas posições de entre as cinco disponíveis, o número de maneiras de fazer essa escolha é igual a $^5C_2$.
Para cada uma dessas escolhas, E para cada um dos restantes três algarismos temos cinco escolhas, dado que não se pode escolher o o número quatro, ou seja, há $^5C_2 \times 5^3$ números de cinco algarismos com exatamente dois quatros.
Assim, a probabilidade pedida é igual a $\dfrac{^5C_2 \times 5^3}{^6A'_5}$.

3. (D)
Seja $\overrightarrow{\beta} = (1;0;-1)$ um vetor normal ao plano β e seja $\overrightarrow{r} = (4a^2;2;2a)$ um vetor diretor da reta r.
A reta é estritamente paralela ao plano se e somente se $\overrightarrow{\beta} \cdot \overrightarrow{r} = 0$
$\overrightarrow{\beta} \cdot \overrightarrow{r} = 0 \Leftrightarrow (1;0;-1) \cdot (4a^2;2;2a) = 0 \Leftrightarrow 4a^2 - 2a = 0 \Leftrightarrow a(4a-2) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a = 0 \vee a = \dfrac{1}{2}$

4. (C)
Se as nove bolas fossem todas distintas, o número de sequências que se podiam construir era igual a 9!.
Atendendo a que na caixa há quatro bolas cinzentas, três bolas pretas e duas bolas brancas, tem-se que o número de sequências é igual a $\dfrac{9!}{3! \times 2! \times 4!}$

5. (A)
Seja n o número da linha
Pela simetria que existe no triângulo de Pascal tem-se que os dois últimos elementos da linha referida são iguais aos dois primeiros, assim tem-se que
$^nC_0 \times^n C_1 \times^n C_{n-1} \times^n C_n = 81 \Leftrightarrow^n C_0 \times^n C_1 \times^n C_1 \times^n C_0 = 81 \Leftrightarrow 1 \times n \times n \times 1 = 81 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n^2 = 81 \Leftrightarrow n = -9 \vee n = 9$
Como, $n \in \mathbb{N}_0$, vem $n = 9$
A linha seguinte tem 11 elementos, pelo que o maior deles é $^{10}C_5 = 252$

Grupo II

1. $(\overline{A} \setminus \overline{B}) \cap (A \cup B) = (\overline{A} \cap \overline{\overline{B}}) \cap (A \cup B) = (\overline{A} \cap B) \cap (A \cup B) = B \cap [\overline{A} \cap (A \cup B)] =$
$= B \cap [(\overline{A} \cap A) \cup (\overline{A} \cap B)] = B \cap [\{\} \cup (\overline{A} \cap B)] = B \cap (\overline{A} \cap B) = (B \cap B) \cap \overline{A} = \overline{A} \cap B$

2. $\left(\dfrac{2}{y} - \dfrac{y^2}{\sqrt{y}}\right)^{16} =$
$$= \sum_{p=0}^{16} \left[^{16}C_p \times \left(\frac{2}{y}\right)^{16-p} \times \left(-\frac{y^2}{\sqrt{y}}\right)^p \right] =$$
$$= \sum_{p=0}^{16} \left[^{16}C_p \times 2^{16-p} \times (y^{-1})^{16-p} \times (-1)^p \times \left(\frac{y^2}{y^{\frac{1}{2}}}\right)^p \right] =$$
$$= \sum_{p=0}^{16} \left[^{16}C_p \times (-1)^p \times 2^{16-p} \times y^{p-16} \times \left(y^{\frac{3}{2}}\right)^p \right] =$$
$$= \sum_{p=0}^{16} \left[^{16}C_p \times (-1)^p \times 2^{16-p} \times y^{p-16} \times y^{\frac{3p}{2}} \right] =$$
$$= \sum_{p=0}^{16} \left[^{16}C_p \times (-1)^p \times 2^{16-p} \times y^{\frac{5p}{2}-16} \right] =$$
Procuremos p de modo que $\frac{5p}{2} - 16 = -11$
$\frac{5p}{2} - 16 = -11 \Leftrightarrow \frac{5p}{2} = 5 \Leftrightarrow p = 2 \in \mathbb{N}_0$, e $0 \leq 2 \leq 16$

Então, existe termo da forma ay^{-11} no desenvolvimento.

Termo:$^{16}C_2 \times 2^{14} \times y^{-11} = 1966080y^{-11}$
Logo, $a = 1966080$

3. .

3.1. Se os números têm seis algarismos, têm de ser maiores do que 300000 e têm de ser pares, então,
para o primeiro algarismo há cinco escolhas (colocar , 3 , 4 ,5, 6, 7)
para cada uma destas escolhas, há três escolhas para o último algarismo (2, 4, 6)
Assim, escolhidos o primeiro e último algarismos, para cada um dos restantes quatro algarismos há sete escolhas.
Portanto, podem ser escritos $5 \times 3 \times^7 A'_4 = 5 \times 3 \times 7^4 = 36015$ números nas condições desejadas.

3.2. O número de casos possíveis é igual a ${}^{7}A'_6 = 7^6$, já que para cada algarismo há sete escolhas.

Quanto ao número de casos favoráveis:
Pretende-se que o número inicie com algarismo par e termine com algarismo ímpar e tenha todos os algarismos distintos.
Assim, para o primeiro algarismo há três escolhas (2,4 ou 6).
Para cada uma destas escolhas, existem quatro escolhas para o último algarismo (1,3, 5, 7)
Escolhidos o primeiro e último algarismos, existem ${}^{5}A_4$ maneiras distintas de escolher os restantes algarismos.
Portanto, o número de casos favoráveis é igual a $3 \times 4 \times {}^{5}A_4$. A probabilidade pedida é igual a $P = \dfrac{3 \times 4 \times {}^{5}A_4}{{}^{7}A'_6} = \dfrac{1440}{117649} \approx 0.01$

4. Sejam os acontecimentos
A:"aluno é rapaz"
$\overline{A}$:"aluno é rapariga"
B:"aluno tem 16 anos"
$\overline{B}$:"aluno tem 17 anos"

Assim,

$P(\overline{B}) = 0.7$
$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0.7 = 0.3$

$P(\overline{A} \setminus B) = \dfrac{1}{3}$
$P(A \setminus \overline{B}) = \dfrac{6}{7}$

Ora, de $P(\overline{A} \setminus B) = \dfrac{1}{3}$
, vem,

$$P(\overline{A} \setminus B) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{0.3 - P(A \cap B)}{0.3} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0.3 - P(A \cap B) = 0.3 \times \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0.3 - 0.1 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0.2$$

$$P(A \setminus \overline{B}) = \frac{6}{7} \Leftrightarrow \frac{P(\overline{B} \cap A)}{P(\overline{B})} = \frac{6}{7} \Leftrightarrow \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{6}{7} \Leftrightarrow \frac{P(A) - 0.2}{0.7} = \frac{6}{7} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow P(A) - 0.2 = 0.7 \times \frac{6}{7} \Leftrightarrow P(A) = 0.6 + 0.2 \Leftrightarrow P(A) = 0.8$$

Elaborando uma tabela de contingência, vem,

	B	$\overline{B}$	
A	0.2	0.6	0.8
$\overline{A}$	0.1	0.1	0.2
	0.3	0.7	1

Pretende-se, $P(\overline{B} \setminus \overline{A})$

$$P(\overline{B} \setminus \overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{A})} = \frac{0.1}{0.2} = \frac{1}{2}$$

5. .

   5.1. $A(2;0;0)$ e $F(0;6;2)$
   Um vetor diretor da reta é $\overrightarrow{AF} = F - A = (0-2;6-0;2-0) = (-2;6;2)$
   Uma equação vetorial da reta é $(x;y;z) = (2;0;0) + k(-2;6;2), k \in \mathbb{R}$

   5.2. $A(2;0;0)$ e $V(1;3;1)$
   Ponto médio de $[AV] \twoheadrightarrow M\left(\frac{2+1}{2};\frac{0+3}{2};\frac{0+1}{2}\right)$, ou seja, $M\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$

   Um vetor normal ao plano mediador poderá ser $\overrightarrow{AV}$
   $\overrightarrow{AV} = V - A = (1-2;3-0;1-0) = (-1;3;1)$
   a equação do plano mediador é da forma $-x+3y+z+d=0$
   Determinemos d tendo em conta que o ponto M pertence a este plano
   $-\frac{3}{2} + 3 \times \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + d = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} + \frac{9}{2} + \frac{1}{2} + d = 0 \Leftrightarrow d = -\frac{7}{2}$
   logo, a equação do plano mediador é $-x+3y+z-\frac{7}{2}=0$, ou $-2x+6y+2z-7=0$
   Nota: Uma resolução alternativa passaria por usar o produto escalar.

   5.3. .

      5.3.1. Numa das pirâmides temos cinco faces a colorir com seis das onze cores, pelo que essa coloração pode ser feita de ${}^6A'_5$ maneiras distintas. Para cada uma destas colorações, podemos colorir as cinco faces da outra pirâmide de ${}^5A'_5$ maneiras distintas. Assim, podemos colorir o sólido de ${}^6A'_5 \times {}^5A'_5 \times 2 = 6^5 \times 5^5 \times 2 =$
      $= 48600000$ maneiras distintas.

      5.3.2. Numa das pirâmides temos cinco faces a colorir com cinco das onze cores, pelo que essa coloração pode ser feita de ${}^5A_5$ maneiras distintas. Para cada uma destas colorações, podemos colorir as cinco faces da outra pirâmide de ${}^6A_5$ maneiras distintas. Assim, podemos colorir o sólido de ${}^5A_5 \times {}^6A_5 \times 2 = 172800$ maneiras distintas.

6. Temos um tabuleiro dividido em dezasseis quadrados. Pretendemos colocar dez bolas no tabuleiro, de modo que em cada quadrado esteja só uma bola.
   Assim, comecemos por escolher os dez quadrados onde se irão colocar as dez bolas. Essa escolha pode ser feita de ${}^{16}C_{10}$ maneiras distintas. Para cada uma destas escolhas, pretendemos agora colocar quatro bolas brancas (que não se distinguem), pelo que o número de maneiras distintas de o fazer é dado por ${}^{10}C_4$.
   Colocadas as quatro bolas em quatro dos dez quadrados previamente escolhidos, sobram seis quadrados para colocar as três bolas pretas (que também não se distinguem), o número de maneiras de o fazer é igual a ${}^6C_3$.
   Por fim, restam-nos três quadrados para colocar as três bolas cinzentas, que estão numeradas, e que portanto, se distinguem. O número de maneiras distintas de o fazer é dado por ${}^3A_3$.
   Concluímos, assim, que podemos colocar as dez bolas no tabuleiro de
   ${}^{16}C_{10} \times {}^{10}C_4 \times {}^6C_3 \times {}^3A_3$ maneiras distintas.