ESCOLA SECUNDÁRIA DE PENAFIEL

Exame Modelo VI
Proposta de Resolução

12.º Ano de Escolaridade | Turma G-K

CADERNO 1

1. .

1.1. P2001/2002

Seja $\overrightarrow{\alpha} = (2; -1; 1)$, um vetor normal ao plano α, e seja $\overrightarrow{r} = (-4; 2; -2)$, um vetor diretor da reta r
Ora,
$\overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{r} = (2; -1; 1) \cdot (-4; 2; -2) = -8 - 2 - 2 = -12 \neq 0$
Logo, a reta r não é paralela ao plano α

$\overrightarrow{\alpha} = k\overrightarrow{r}$, para algum $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\overrightarrow{\alpha} = k\overrightarrow{r} \Leftrightarrow (2; -1; 1) = k(-4; 2; -2) \Leftrightarrow \begin{cases} -4k = 2 \\ 2k = -1 \\ -2k = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\dfrac{1}{2} \\ k = -\dfrac{1}{2} \\ k = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Como este sistema é possível determinado, tem-se que os vetores $\overrightarrow{\alpha}$ e $\overrightarrow{r}$, são colineares, então, a reta r é perpendicular ao plano α

Assim, resulta que:
a afirmação (I) é falsa
a afirmação (II) é falsa
a afirmação (III) é falsa
a afirmação (IV) é verdadeira

Resposta:(D)

1.2. PMC2015

$g(0) = -e^0 = -1$

$$(f \circ g)(0) = f[g(0)] = f(-1) = \frac{2\pi}{3} - 3\arccos\left(\frac{-1}{2} + 1\right) = \frac{2\pi}{3} - 3\arccos\left(\frac{1}{2}\right) =$$
$$= \frac{2\pi}{3} - 3 \times \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$$

Resposta:(B)

2. .

2.1. Determinemos o médio M do segmento de reta $[BC]$

$M\left(\frac{4+7}{2};\frac{3-1}{2};\frac{0+0}{2}\right)$ ou seja, $M\left(\frac{11}{2};1;0\right)$

Um vetor normal ao plano β pedido, poderá ser o vetor diretor da reta CE

$\overrightarrow{\beta}=(8;6;-10)$

uma equação do plano β é $8x+6y-10z+d=0, d\in\mathbb{R}$

Como o ponto $M=\left(\frac{11}{2};1;0\right)$ pertence ao plano β, vem,

$$8\times\frac{11}{2}+6\times1-10\times0+d=0\Leftrightarrow 44+6+d=0\Leftrightarrow d=-50$$

Logo, $8x+6y-10z-50=0$, ou ainda $4x+3y-5z-25=0$ é uma equação do plano β pedido

Resposta:(D)

2.2. O ponto E é da forma $(0;0;z)$.

Como o ponto pertence à reta CE, tem-se que:

$(0;0;z)=(4;3;0)+k(8;6;-10)$, para algum k real. então,

$$\begin{cases}0=4+8k\\0=3+6k\\z=-10k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=-\frac{1}{2}\\k=-\frac{1}{2}\\z=-10k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=-\frac{1}{2}\\k=-\frac{1}{2}\\z=-\frac{1}{2}\times(-10)=5\end{cases}$$

e portanto, $E(0;0;5)$

Determinemos o volume do paralelepípedo

Comecemos por determinar a medida do lado da base (que é um quadrado)

$||\overrightarrow{CB}||=\sqrt{(7-4)^2+(-1-3)^2+(0-0)^2}=\sqrt{25}=5$

A área da base do paralelepípedo é $A_{base}=5^2=25$

A altura do paralelepípedo é igual a 5, pois é o valor absoluto da cota do ponto E

O paralelepípedo é um cubo

então, o volume do paralelepípedo é $V_{paralelepipedo}=aresta^3=5^3=125$ unidades cúbicas

Determinemos a medida do lado da base da pirâmide, recorrendo ao Teorema de Pitágoras, aplicado ao triângulo retângulo $[PGQ]$:

$\overline{PQ}^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\overline{PQ}^2=\frac{25}{4}+\frac{25}{4}\Leftrightarrow\overline{PQ}^2=\frac{25}{2}$

e sendo assim, a área da base da pirâmide (que é um quadrado), é

$A_{basedapir\hat{a}mide}=\frac{25}{2}$

Como o volume da pirâmide é um décimo do volume do paralelepípedo, então, tem-se que:

$V_{pir\hat{a}mide}=\frac{1}{10}\times V_{paralelepipedo}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{\frac{25}{2}\times h}{3}=\frac{1}{10}\times125\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{25h}{6}=\frac{125}{10}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 25h = \frac{750}{10} \Leftrightarrow h = 3$

Ou seja, a altura da pirâmide é igual a 3, e portanto, a cota do vértice V é 8

2.3. A condição $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{CP} = 0$ define a superfície esférica de diâmetro $[AC]$
Quanto ao ponto A
$A = O + \overrightarrow{CB}$
Como $\overrightarrow{CB} = B - C = (7, -1; 0) - (4; 3; 0) = (3; -4; 0)$, tem-se que,
$A = O + \overrightarrow{CB} = (0; 0; 0) + (3; -4; 0) = (3; -4; 0)$
Determinemos o centro M da superfície esférica, que será o ponto médio do segmento de reta $[AC]$
$M = \left(\frac{3+4}{2}; \frac{-4+3}{2}; \frac{0+0}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right)$
Determinemos o diâmetro d
$d = \sqrt{(3-4)^2 + (-4-3)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{1+49} = 5\sqrt{2}$
então, o raio r da esfera é igual a $r = \frac{5\sqrt{2}}{2}$
sendo assim, a equação reduzida da superfície esférica é:
$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + (z-0)^2 = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2$
ou seja, $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{25}{2}$

2.4. Os múltiplos de 4 são $4; 8; 12, 16$ e 20
Os múltiplos de 5 são $5; 10; 15$ e 20

Constatamos que há um múltiplo comum, que é o 20

Como as faces vão ser numeradas com números distintos, tem-se que o número 20 não poderá estar ao mesmo tempo numa face da pirâmide e numa face do paralelepípedo
Assim, poderemos resolver este problema por, pelo menos dois processos

1º processo:

Numeramos as faces da pirâmide (ou do paralelepípedo) com os quatro múltiplos de cinco , o que poderá ser feito de ${}^4A_4 = 4!$ maneiras distintas. Para cada uma destas maneiras de numerar as faces da pirâmide (ou do paralelepípedo), podemos numerar as faces do paralelepípedo (ou da pirâmide) com números que são múltiplos de quatro de ${}^4A_4 = 4!$, (note-se que se retirou o número 20 do conjunto dos múltiplos de quatro)
Portanto, podemos numerar as oito faces de ${}^4A_4 \times {}^4A_4 \times 2 = 1152$ maneiras distintas

2º processo:

Numeramos as faces da pirâmide (ou do paralelepípedo) com os quatro múltiplos de cinco , o que poderá ser feito de ${}^4A_4 = 4!$ maneiras distintas. Para cada uma destas maneiras de numerar as faces da pirâmide (ou do paralelepípedo), podemos numerar as faces do paralelepípedo (ou da pirâmide) de ${}^5A_4 = 4!$, (note-se que se inclui o número 20 do conjunto dos múltiplos de quatro)
Portanto, poderíamos numerar as oito faces de ${}^4A_4 \times {}^5A_4 \times 2 = 5760$ maneiras distintas
Como nesta contagem estão todas as numerações das oito faces em que aparece o número 20 repetido, então teremos de retirar todas estas numerações, que são dadas por
$4 \times {}^4A_4 \times {}^3A_3 \times 4 \times 2 = 4608$
Resumindo, poderemos numerar as oito faces de
${}^4A_4 \times {}^5A_4 \times 2 - 4 \times {}^4A_4 \times {}^3A_3 \times 4 \times 2 = 5760 - 4608 = 1152$ maneiras distintas

3. .

3.1. Seja x o número de alunos do 9° Ano
então,
$2x$ o número de alunos do 7° Ano
$2x$ o número de alunos do 8° Ano

Como na escola há 600 alunos, vem,

$2x + 2x + x = 600 \Leftrightarrow 5x = 600 \Leftrightarrow x = \frac{600}{5} \Leftrightarrow x = 120$

Então, na escola há: 240 alunos no 7° Ano, 240 alunos no 8° Ano e 120 alunos no 9° Ano

Como se pretende um grupo de doze alunos, sendo cinco do sétimo ano, cinco do oitavo ano e dois do nono, tendo estes dois últimos tarefas diferenciadas, tem-se que o número de grupos que se podem constituir é igual a ${}^{240}C_5 \times {}^{240}C_5 \times {}^{120}A_2$
Resposta:(C)

3.2. Sejam os acontecimentos

M: "o aluno escolhe Música"
E: "o aluno escolhe Expressão Plástica"

Dos dados, tem-se,

$P(E) = \frac{1}{2}P(M)$
$P(\overline{E}) = 2P(\overline{M} \cap \overline{E})$
$P(E \mid M) = 2P(M \cap E)$

Pretende-se o valor de $P(M \cup E)$

Ora,
$P(E \mid M) = 2P(M \cap E) \Leftrightarrow \frac{P(M \cap E)}{P(M)} = 2P(M \cap E) \Leftrightarrow P(M) = \frac{1}{2}$
Logo,
$P(E) = \frac{1}{2}P(M) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
Portanto,

$$P(\overline{E}) = 2P(\overline{M} \cap \overline{E}) \Leftrightarrow 1 - P(E) = 2P(\overline{M \cup E}) \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{4} = 2P(\overline{M \cup E}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{4} = 2P(\overline{M \cup E}) \Leftrightarrow \frac{3}{8} = P(\overline{M \cup E}) \Leftrightarrow \frac{3}{8} = 1 - P(M \cup E) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow P(M \cup E) = 1 - \frac{3}{8} \Leftrightarrow P(M \cup E) = \frac{5}{8}$$

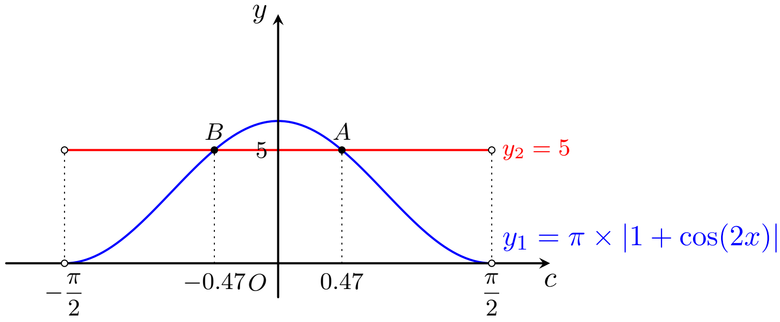
4. A medida da base do triângulo é $\overline{BC} = \left|\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = \left|\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right| = \pi$
A medida da altura do triângulo é $h = |-3 - f(x)| = |-3 + 1 - 2\cos(2x)| = |-2 - 2\cos(2x)| =$
$= |2 + 2\cos(2x)|$
Portanto, vem,
$g(x) = \frac{\overline{BC} \times h}{2} = \frac{\pi \times |2 + 2\cos(2x)|}{2} = \pi \times |1 + \cos(2x)|$, representa a função área do triângulo $[ABC]$

Pretende-se encontrar $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, tal que $g(x) = 5$

Inserir as funções:
$y_1 = \pi \times |1 + \cos(2x)|$
$y_2 = 5$

Desenhar os gráficos das duas funções

Procurar a abcissa do ponto de interseção dos dois gráficos



Tem-se, $x_1 \approx -0.47$ e $x_2 \approx 0.47$

5. Se a, b e 36 são três termos consecutivos de uma progressão aritmética e a, b e 48 são três termos consecutivos de uma progressão geométrica, então, tem-se,

$$\begin{cases} b - a = 36 - b \\ \frac{b}{a} = \frac{48}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b - 36 \\ \frac{b}{a} = \frac{48}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b - 36 \\ \frac{b}{2b - 36} = \frac{48}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b - 36 \\ b^2 = 48 \times (2b - 36) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b - 36 \\ b^2 - 96b + 1728 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b - 36 \\ b = \frac{96 \pm \sqrt{96^2 - 4 \times 1 \times 1728}}{2 \times 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b - 36 \\ b = 24 \vee b = 72 \end{cases}$$

Como $b < 36$, vem, $b = 24$

Assim,
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b - 36 \\ b = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \times 24 - 36 \\ b = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 12 \\ b = 24 \end{cases}$$

6. A condição $|z| < 2$, define o círculo aberto centrado na origem do referencial e de raio 2
A condição $\text{Re}(z) \geq 0 \wedge \text{Im}(z) \geq 0$, define o primeiro quadrante
A condição $\text{Re}(z) \leq 0 \wedge \text{Im}(z) \leq 0$, define o terceiro quadrante

A condição dada define o conjunto de pontos da opção (A)

Resposta:(A)

CADERNO 2

7. .

7.1. P2001/2002
Sabe-se que

$P(A) = \frac{2}{5}$
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
$P(A \cup B) = \frac{3}{5}$

Então,

$P(A \cup B) = \frac{3}{5} \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{2}{5} + P(B) - P(A) \times P(B) = \frac{3}{5} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{2}{5} + P(B) - \frac{2}{5} \times P(B) = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \left(1 - \frac{2}{5}\right) \times P(B) = \frac{3}{5} - \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{3}{5} \times P(B) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{5} \times \frac{5}{3} \Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{3}$
Portanto,
$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
Resposta:(B)

7.2. PMC2015

De $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, sabe-se que,

$a^2 = 36 \Leftrightarrow a = \pm 6$, e como $a > 0$, vem, $a = 6 \twoheadrightarrow$ medida do semieixo maior
Portanto $\overline{OA} = 6$
Como $\overline{OA} = 2\overline{OB}$, então, $\overline{OB} = 3$
Logo, $b = 3 \twoheadrightarrow$ medida do semieixo menor

$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow 36 = 9 + c^2 \Leftrightarrow 36 - 9 = c^2 \Leftrightarrow c = \pm\sqrt{27}$,
e como $c > 0$, vem, $c = 3\sqrt{3} \twoheadrightarrow$ medida da semidistância focal

Portanto,
$A(6;0)$, $B(0;3)$, $C(-6;0)$, $D(0;-3)$, $E(3\sqrt{3};0)$ e $F(-3\sqrt{3};0)$

Logo,
$\overline{AE} = 6 - 3\sqrt{3}$

$A_{[ABED]} = 2 \times \frac{\overline{AE} \times \overline{OB}}{2} = (6 - 3\sqrt{3}) \times 3 = (18 - 3\sqrt{3})\ u.a.$
Resposta:(D)

8. .

8.1. $(\overline{1+i}) \times z - \frac{\overline{z_1}}{z_1} = 0 \Leftrightarrow (1-i) \times z = \frac{\overline{z_1}}{z_1} \Leftrightarrow (1-i) \times z = \frac{\overline{3+\sqrt{3}i}}{3+\sqrt{3}i} \Leftrightarrow (1-i) \times z = \frac{3-\sqrt{3}i}{3+\sqrt{3}i} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (1-i) \times z = \frac{3-\sqrt{3}i}{3+\sqrt{3}i} \Leftrightarrow (1-i) \times z = \frac{(3-\sqrt{3}i)^2}{(3+\sqrt{3}i)(3-\sqrt{3}i)} \Leftrightarrow (1-i) \times z = \frac{9 - 6\sqrt{3}i - 3}{9+3} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (1-i) \times z = \frac{6 - 6\sqrt{3}i}{12} \Leftrightarrow (1-i) \times z = \frac{1-\sqrt{3}i}{2} \Leftrightarrow z = \frac{1-\sqrt{3}i}{(1-i) \times 2} \Leftrightarrow z = \frac{1-\sqrt{3}i}{2-2i} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow z = \frac{(1-\sqrt{3}i)(2+2i)}{(2-2i)(2+2i)} \Leftrightarrow z = \frac{2 + 2i - 2\sqrt{3}i + 2\sqrt{3}}{4+4} \Leftrightarrow z = \frac{2+2\sqrt{3}}{8} + \frac{2-2\sqrt{3}}{8}i \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow z = \frac{1+\sqrt{3}}{4} + \frac{1-\sqrt{3}}{4}i$
O conjunto solução da equação é $C.S. = \left\{\frac{1+\sqrt{3}}{4} + \frac{1-\sqrt{3}}{4}i\right\}$

8.2. Comecemos por escrever z_1 na forma trigonométrica

$|z_1| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
Seja $Arg(z_1) = \theta$
$\tan(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, e afixo de z_1 pertence ao primeiro quadrante

logo, $\theta = \frac{\pi}{6}$

Portanto, $z_1 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$

$z_2 = \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$
Assim,

$$\left(\frac{z_1 \times z_2}{\overline{z_2}}\right)^n = \left(\frac{2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} \times \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}}{\overline{\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}}}\right)^n = \left(\frac{2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} \times \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{3}e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}}\right)^n = \left(\frac{2\sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)}}{e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}}\right)^n =$$
$$= \left(2\sqrt{3}e^{i\left(\frac{2\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)}\right)^n = \left(2\sqrt{3}e^{i\left(\frac{3\pi}{6}\right)}\right)^n = \left(2\sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right)^n = \left(2\sqrt{3}\right)^n \times e^{i\left(\frac{n\pi}{2}\right)}$$

Para que $\left(\frac{z_1 \times z_2}{\overline{z_2}}\right)^n$ seja um número real positivo, deverá ter-se,

$\frac{n\pi}{2} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}^+$

Ou seja,

$n = 4k, k \in \mathbb{Z}^+$

Como se pretende o menor valor de n, então, k terá de ser igual a 1, e portanto, $n = 4$

9. .

9.1. P2001/2002

Os valores que a variável X pode tomar são: 0, 1 e 2

$P(X = 0) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$
$P(X = 1) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = 2 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4}$
$P(X = 2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{4}\right)^2$

Portanto a distribuição de probabilidade da variável X é,

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\left(\frac{3}{4}\right)^2$	$2 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^2$

Resposta:(B)

9.2. PMC2015
Como $D'x = [-2; 2]$, então $A = 2$

Assim,

$x(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right)$, com $t \in I$

Logo,

$t = 0 \twoheadrightarrow x(0) = 2 \times \cos\left(\frac{\pi}{3} \times 0 + \frac{\pi}{4}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$
Resposta:(C)

10. $t=0 \twoheadrightarrow$ início de 1999
$t=1 \twoheadrightarrow$ início de 2000
$t=2 \twoheadrightarrow$ início de 2001
$\vdots$
$t=10 \twoheadrightarrow$ início de 2009
$t=11 \twoheadrightarrow$ início de 2010 ou fim de 2009
Sabe-se que no início de 1999 havia 40000 gnus no parque, então $G(0)=40000$
no final de 2009 esse número sofreu um aumento de 20000, então, $G(11)=60000$
e que com o passar do tempo o número de gnus tende para 120000, então $\lim G(t)=120000$
Assim,

$$\begin{cases} G(0)=40000 \\ G(11)=60000 \\ \lim G(t)=120000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{1+b\times e^{-k\times 0}}=40000 \\ \dfrac{a}{1+b\times e^{-k\times 11}}=60000 \\ \lim \dfrac{a}{1+b\times e^{-kt}}=120000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{1+b\times e^{0}}=40000 \\ \dfrac{a}{1+b\times e^{-11k}}=60000 \\ \dfrac{a}{1+b\times e^{-\infty}}=120000 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{a}{1+b\times 1}=40000 \\ \dfrac{a}{1+b\times e^{-11k}}=60000 \\ \dfrac{a}{1+b\times 0}=120000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{1+b}=40000 \\ \dfrac{a}{1+b\times e^{-11k}}=60000 \\ \dfrac{a}{1}=120000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{1+b}=40000 \\ \dfrac{a}{1+b\times e^{-11k}}=60000 \\ a=120000 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{120000}{1+b}=40000 \\ \dfrac{120000}{1+b\times e^{-11k}}=60000 \\ a=120000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+b=\dfrac{120000}{40000} \\ \dfrac{120000}{1+b\times e^{-11k}}=60000 \\ a=120000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3-1 \\ \dfrac{120000}{1+b\times e^{-11k}}=60000 \\ a=120000 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ \dfrac{120000}{1+b\times e^{-11k}}=60000 \\ a=120000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ \dfrac{120000}{1+2\times e^{-11k}}=60000 \\ a=120000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ \dfrac{120000}{1+2\times e^{-11k}}=60000 \\ a=120000 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ 1+2\times e^{-11k}=\dfrac{120000}{60000} \\ a=120000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ 1+2\times e^{-11k}=2 \\ a=120000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ 2\times e^{-11k}=1 \\ a=120000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ e^{-11k}=\dfrac{1}{2} \\ a=120000 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ -11k=\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) \\ a=120000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ -11k=-\ln(2) \\ a=120000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ k=\dfrac{\ln(2)}{11} \\ a=120000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ k\approx 0.06 \\ a=120000 \end{cases}$$

11. Sabe-se que a reta de equação $y=ex+1$ é assíntota ao gráfico, logo, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=e$
Então,

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(f(x)-2)^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(f(x))^2-4f(x)+4}{x^2}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(f(x))^2}{x^2}-\lim_{x\to+\infty}\frac{4f(x)}{x^2}+\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x^2}=\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\right)^2-4\times\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\times\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\frac{4}{+\infty}=$$
$$=e^2-4e\times 0+0=e^2$$

Logo, a reta de equação $y=e^2$ é assíntota horizontal ao gráfico da função g
Resposta: (B)

12. .

12.1. $$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} h(x)=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}\frac{ax}{\sin(2x)}=\frac{-\frac{\pi}{2}\times a}{0^-}=+\infty$$

Logo, a reta de equação $x=-\dfrac{\pi}{2}$, é assíntota vertical ao gráfico da função h

Resposta: (B)

12.2. $0 \in D_h$ e é ponto aderente de D_h

A função h é contínua em $x = 0$, se existir $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$, ou seja, se $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = h(0)$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = h(0)$

Ora,
$$\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{ax}{\sin(2x)} =^{\left(\frac{0}{0}\right)} \frac{a}{2} \times \lim_{2x\to 0^-} \frac{2x}{\sin(2x)} = \frac{a}{2} \times \frac{1}{\lim\limits_{2x\to 0^-} \dfrac{\sin(2x)}{2x}} = \frac{a}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{a}{2}$$

Utilizou-se o limite notável $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-e^{-2x}}{bx} =^{\left(\frac{0}{0}\right)} \frac{1}{b} \times \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-2x}-1}{-x} = \frac{1}{b} \times \lim_{-2x\to 0^+} \frac{e^{-2x}-1}{-2x} = \frac{2}{b} \times \frac{1}{1} = \frac{2}{b}$$

Utilizou-se o limite notável $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$

$h(0) = 1$

Para a função ser contínua em zero, deverá ter-se,
$\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = h(0)$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = h(0)$
Ou seja,

$$\begin{cases} \dfrac{a}{2} = 1 \\ \\ \dfrac{2}{b} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ \\ b = 2 \end{cases}$$

13. Calculemos a função primeira derivada de f

$$f'(x) = \left(e^{\frac{1}{x}} - ex\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' e^{\frac{1}{x}} - e = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} - e$$

Calculemos a função segunda derivada de f

$$f''(x) = \left(-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} - e\right)' = -\left[\left(\frac{1}{x^2}\right)' e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}\left(e^{\frac{1}{x}}\right)'\right] - 0 = -\left[-\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} \times \left(-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right)\right] =$$
$$= \frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^4}e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}} \times \frac{2x+1}{x^4}$$

Zeros de f''

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}} \times \frac{2x+1}{x^4} = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}} = 0 \vee \times \frac{2x+1}{x^4} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \text{equação impossível} \vee (2x+1 = 0 \wedge x^4 \neq 0) \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Quadro de sinal de f'' e das concavidades do gráfico de f

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		0	$+\infty$
$e^{\frac{1}{x}}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$2x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^4	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$n.d.$	$+$
$f(x)$	$\frown$	$\frac{2+e^3}{2e^2}$	$\smile$	$n.d.$	$\smile$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=e^{\frac{1}{-\frac{1}{2}}}+\frac{1}{2}e=e^{-2}+\frac{e}{2}=\frac{1}{e^2}+\frac{e}{2}=\frac{2+e^3}{2e^2}$$

O gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo em $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[$, tem a concavidade voltada para cima em $\left]-\frac{1}{2};0\right[$ e em $]0;+\infty[$, e tem um ponto de inflexão, de coordenadas $\left(-\frac{1}{2};\frac{2+e^3}{2e^2}\right)$

14. Ora,
$f(e)=\ln(e)=1$
$f(2e)=\ln(2e)$

Declive da reta AB

$$m_{AB}=\frac{f(2e)-f(e)}{2e-e}=\frac{\ln(2e)-1}{e}=\frac{\ln(2)+\ln(e)-1}{e}=\frac{\ln(2)+1-1}{e}=\frac{\ln(2)}{e}$$

A reta AB é da forma

$$y=\frac{\ln(2)}{e}x+b, \text{ com } b\in\mathbb{R}$$

Como a reta passa no ponto $A(e;1)$, vem,

$$1=\frac{\ln(2)}{e}\times e+b\Leftrightarrow 1=\ln(2)+b\Leftrightarrow b=1-\ln(2)$$

Logo,

$$y=\frac{\ln(2)}{e}x+1-\ln(2)$$

Determinemos a abcissa do ponto de interseção desta reta com o eixo Ox

$$0=\frac{\ln(2)}{e}x+1-\ln(2)\Leftrightarrow\frac{\ln(2)}{e}x=\ln(2)-1\Leftrightarrow x=(\ln(2)-1)\times\frac{e}{\ln(2)}\Leftrightarrow x=\frac{e(\ln(2)-1)}{\ln(2)}$$

Então, o ponto C tem abcissa $\frac{e(\ln(2)-1)}{\ln(2)}$
Quanto à área do triângulo $[BCD]$

$$\overline{BD}=\ln(2e)=\ln(2)+\ln(e)=\ln(2)+1$$

$$\overline{CD}=\left|2e-\frac{e(\ln(2)-1)}{\ln(2)}\right|=\left|\frac{2e\ln(2)-e(\ln(2)-1)}{\ln(2)}\right|=\left|\frac{2e\ln(2)-e\ln(2)+e}{\ln(2)}\right|=\left|\frac{e\ln(2)+e}{\ln(2)}\right|=$$
$$=\left|\frac{e(\ln(2)+1)}{\ln(2)}\right|=\frac{e(\ln(2)+1)}{\ln(2)}$$

Assim,

$$A_{[BCD]}=\frac{\overline{BD}\times\overline{CD}}{2}=\frac{(\ln(2)+1)\times\frac{e(\ln(2)+1)}{\ln(2)}}{2}=\frac{e(1+\ln(2))^2}{2\ln(2)}\ u.a.$$