Escola Secundária de Penafiel

Exame Modelo VI de Matemática A

Duração do Exame: 150 **minutos** + 30 **minutos de tolerância** | **junho de 2018**

Caderno 1 (75 minutos + 15min) + Caderno 2 (75 minutos + 15min)

12.º Ano de Escolaridade | Turma - G - K

Caderno 1

- **Duração:** 75 **minutos** + 15 **minutos de tolerância**
- **É permitido o uso de calculadora gráfica**

Indica de forma legível a versão da prova. A prova é constituída por dois cadernos (Caderno 1 e Caderno 2). Utiliza apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta. Só é permitido o uso de calculadora no Caderno 1. Não é permitido o uso de corretor. Risca o que pretendes que não seja classificado. Para cada resposta identifica o item. Apresenta as tuas respostas de forma legível. Apresenta apenas uma resposta para cada item. A prova apresenta um formulário no Caderno 1. As cotações dos itens de cada Caderno encontram-se no final de cada Caderno.

Na resposta aos itens de seleção (escolha múltipla), seleciona a resposta correta. Escreve na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação apresenta sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr *(α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)*

área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ *(α- amplitude, em radianos, do ângulo ao centro, r - raio)*

área lateral de um cone: $\pi r g$ *(r - raio da base, g - geratriz)*

área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ *(r - raio)*

Volume da pirâmide: $\frac{1}{3}\times$ *área da base* $\times$ *Altura*

Volume do cone: $\frac{1}{3}\times$ *área da base* $\times$ *Altura*

Volume da esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ *(r - raio)*

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2}\times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$, $r \neq 1$

Trigonometria

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Lei dos senos

$\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c}$

Lei dos cossenos ou Teorema de Carnot

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$

Complexos

$(|z| cis\theta)^n = |z|^n cis(n\theta)$ ou $(|z|e^{i\theta})^n = |z|^n e^{i(n\theta)}$

$\sqrt[n]{|z| cis\theta} = \sqrt[n]{|z|} cis\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$ ou

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$, $k \in \{0;1;2;...;n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$

Probabilidades

$\mu = p_1x_1 + \cdots + p_nx_n$

$\sigma = \sqrt{p_1(x_1-\mu)^2 + \cdots + p_n(x_n-\mu)^2}$

Se $X \sim N(\mu,\sigma)$, então:

$P(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma) \approx 0.6827$

$P(\mu-2\sigma < X < \mu+2\sigma) \approx 0.9545$

$P(\mu-3\sigma < X < \mu+3\sigma) \approx 0.9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u'\cos u$

$(\cos u)' = -u'\sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'e^u$

$(a^u)' = u'a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. .

Os dois itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa
O **item 1.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10°, 11° e 12° anos, homologados em 2001 e 2002 **(2001/2002)**
O **item 1.2.** integra-se no Programas e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 **(PMC2015)**
Responde apenas a um dos dois itens
Na tua folha de respostas, identifica claramente o item selecionado

P2001/2002

1.1. Seja α, um plano, de equação $2x - y + z - 6 = 0$, e r, uma reta, de equações cartesianas $\frac{1-x}{4} = \frac{y+1}{2} = \frac{3-z}{2}$

Considera as afirmações seguintes

(I) A reta r é paralela ao plano α

(II) A interseção da reta r com o plano α é uma reta

(III) A reta é oblíqua ao plano

(IV) A reta r é perpendicular ao plano α

Pode-se afirmar que:

(A) (I) é verdadeira
(B) (II) e (III) são ambas verdadeiras
(C) (III) é verdadeira
(D) (IV) é verdadeira

PMC2015

1.2. Sejam f e g, duas funções reais de variável real, definidas nos respetivos domínios, por $f(x) = \frac{2\pi}{3} - 3\arccos\left(\frac{x}{2} + 1\right)$ e $g(x) = -e^x$, respetivamente

Qual é o valor de $(f \circ g)(0)$?

(A) 0
(B) $-\frac{\pi}{3}$
(C) $\frac{\pi}{6}$
(D) $\frac{5\pi}{3}$

Nota: O símbolo ($\circ$) representa a composição de funções

2. Na figura 1, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um paralelepípedo e uma pirâmide quadrangular regular assente na face $[DEFG]$ do paralelepípedo

Sabe-se que:

- os vértices da base da pirâmide são os pontos médios dos lados da face $[DEFG]$ do paralelepípedo
- o ponto E pertence ao semieixo positivo Oz
- a face $[OABC]$ é um quadrado e está contida no plano xOy
- o ponto C tem coordenadas $(4; 3; 0)$
- o ponto B tem coordenadas $(7; -1; 0)$
- o volume da pirâmide é a décima parte do volume do paralelepípedo
- uma equação vetorial da reta CE é $(x; y; z) = (4; 3; 0) + k(8; 6; -10), k \in \mathbb{R}$

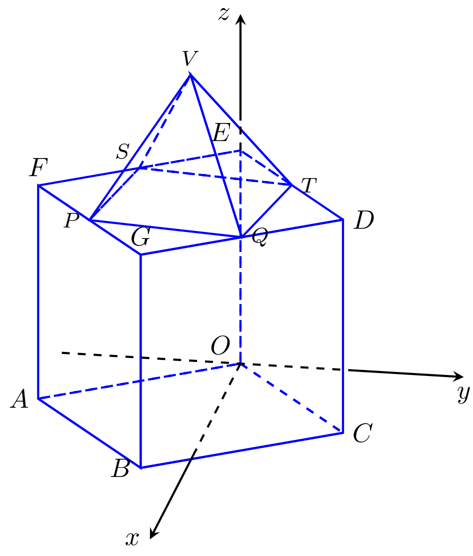


Figura 1

2.1. Uma equação do plano perpendicular à reta CE e que contém o ponto médio de $[BC]$ é:

(A) $8x + 6y - 10z + 25 = 0$
(B) $4x + 3y - 5z + 25 = 0$
(C) $8x + 6y - 10z - 25 = 0$
(D) $4x + 3y - 5z - 25 = 0$

2.2. Determina a cota do vértice V da pirâmide

2.3. Seja P um ponto do espaço
Escreve uma equação cartesiana para o conjunto de pontos do espaço definido pela condição $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{CP} = 0$

2.4. Vão ser numeradas as faces laterais da pirâmide e as faces do paralelepípedo não paralelas ao plano xOy
Em cada face só se coloca um número natural igual a um número do conjunto
$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20\}$
De quantas maneiras se podem numerar as referidas faces, de modo que na pirâmide só se coloquem números que sejam múltiplos de quatro e no paralelepípedo só se coloquem números múltiplos de cinco, ou ao contrário, e não haja faces numeradas com o mesmo número

3. Numa escola do ensino básico de Arribas de Cima, os alunos, no ato da matrícula, têm de escolher duas atividades extracurriculares, de entre três à escolha (Música, Expressão Plástica e Teatro)

3.1. Admite que na escola há 600 alunos, distribuídos pelos sétimo, oitavo e nono anos e que número de alunos que frequenta o sétimo ano é igual ao número de alunos que frequenta o oitavo ano e igual ao dobro do número de alunos que frequenta o nono ano
Vai ser selecionado um grupo de doze alunos dessa escola para representar a escola num encontro de jovens
Sabendo que os líderes do grupo são alunos do nono ano e que têm tarefas distintas nessa liderança, de quantas maneiras distintas pode ser feita a escolha desse grupo, se o grupo for constituído por cinco alunos do sétimo ano, cinco alunos do oitavo e os restantes do nono ano?
Numa das opções, está a expressão que dá esse número de grupos
Em qual delas?

(A) $^{240}C_5 \times ^{240}C_5 \times ^{120}C_2$
(B) $^{240}A_5 \times ^{240}A_5 \times ^{120}A_2$
(C) $^{240}C_5 \times ^{240}C_5 \times ^{120}A_2$
(D) $^{240}A_5 \times ^{240}A_5 \times ^{120}C_2$

3.2. Relativamente a essa escola sabe-se que:

- entre os alunos que escolheram Música, a probabilidade de um aluno ter escolhido Expressão Plástica é o dobro da probabilidade de ter escolhido as duas
- o número de alunos que escolheram Expressão Plástica é metade do número de alunos que escolheram Música
- o número de alunos que não escolheram Expressão Plástica é igual ao dobro do número de alunos que não escolheram nenhuma das atividades, Música e Expressão Plástica

Escolhe-se, ao acaso, um aluno dessa escola

Determina a probabilidade desse aluno ter escolhido pelo menos uma das atividades de Música ou de Expressão Plástica

Apresenta o resultado na forma de fração irredutível

4. Na figura 2 está representado, num referencial o.n. xOy, o gráfico da função f, definida em $[-\pi;\pi]$, por $f(x) = -1 + 2\cos(2x)$ e um triângulo $[ABC]$

- os pontos B e C têm abcissas $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, respetivamente
- o valor mínimo da função f é -3
- B é ponto do gráfico onde a função f atinge o seu valor mínimo
- C é ponto do gráfico onde a função f atinge o seu valor mínimo

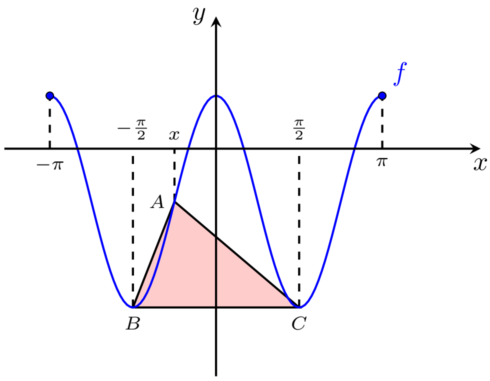


Figura 2

Admite que o ponto A se movimenta na curva, gráfico da função f, entre os pontos B e C, nunca coincidindo com o ponto B nem com o ponto C, ou seja, a sua abcissa x, pertence ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

Recorrendo às potencialidades da calculadora gráfica, determina a abcissa do ponto A de modo que o triângulo $[ABC]$ tenha área igual a 5 $u.a.$

Na tua resposta deves:

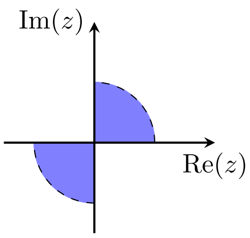
- escrever a expressão que dá, em função da abcissa x do ponto A, a área do triângulo $[ABC]$
- equacionar o problema
- reproduzir, num referencial o.n., o(s)gráfico(s)da(s)função(ões) visualizado(s) na calculadora que te permite(m) resolver a equação
- apresenta o(s) valor(es) pedido(s) arredondado às centésimas

(Exercício adaptado de um exercício do meu livro de exercícios do 12º ano)

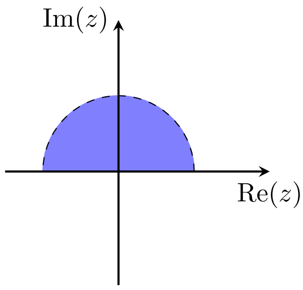
5. Considera dois números naturais a e b, com $b > a$
Para certos valores de a e de b, tem-se que a, b e 36 são três termos consecutivos de uma progressão aritmética e que a, b e 48 são três termos consecutivos de uma progressão geométrica
Determina a e b

6. Considera, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição
$|z| < 2 \wedge [(\text{Re}(z) \geq 0 \wedge \text{Im}(z) \geq 0) \vee (\text{Re}(z) \leq 0 \wedge \text{Im}(z) \leq 0)]$
Em qual das opções, poderá estar, representado, no plano de Argand - Gauss, o conjunto de pontos definido por esta condição?

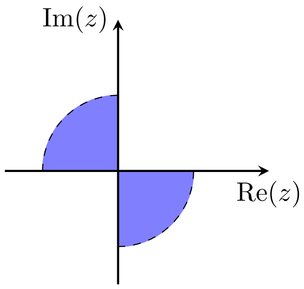
(A)



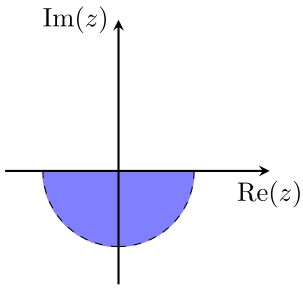
(B)



(C)



(D)



FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES

1.			
		....	8 pontos
2.			
	2.1	....	8 pontos
	2.2	....	12 pontos
	2.3	....	12 pontos
	2.4	....	12 pontos
3.			
	3.1	....	8 pontos
	3.2	....	13 pontos
4.			
		....	12 pontos
5.			
		....	12 pontos
6.			
		....	8 pontos

TOTAL .... 105 pontos

Caderno 2

- **Duração:** 75 **minutos** + 15 **minutos de tolerância**
- **Neste Caderno não é permitida a utilização de calculadora**

7. .

Os dois itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa
O **item 7.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10°, 11° e 12° anos, homologados em 2001 e 2002 **(2001/2002)**
O **item 7.2.** integra-se no Programas e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 **(PMC2015)**
Responde apenas a um dos dois itens
Na tua folha de respostas, identifica claramente o item selecionado

P2001/2002

7.1. Seja E, conjunto finito e não vazio, o espaço amostral de uma experiência aleatória, seja $P(E)$ o espaço dos acontecimentos, sendo equiprováveis os acontecimentos elementares, P uma probabilidade em $P(E)$ e sejam A e B dois acontecimentos independentes associados a essa experiência aleatória
Sabe-se que a probabilidade de A ou B ocorrerem é igual a $\frac{3}{5}$ e a probabilidade de ocorrer A é igual a $\frac{2}{5}$

Numa das opções está o valor da probabilidade de não ocorrência de B

Em qual delas?

(A) $\frac{1}{4}$
(B) $\frac{2}{3}$
(C) $\frac{1}{5}$
(D) $\frac{1}{3}$

PMC2015

7.2. Considera a elipse, definida pela equação $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, com $b > 0$, e o quadrilátero $[ABED]$, representados no referencial o.n. xOy, da figura 3
Sabe-se que:

- os pontos A, B, C e D são vértices da elipse
- os pontos E e F são os focos da elipse
- $\overline{OA} = 2 \times \overline{OB}$

Em qual das opções está o valor da área (em u.a.) do quadrilátero $[ABED]$?

(A) $6 - 3\sqrt{3}$
(B) $18 - \sqrt{3}$
(C) $18 + 9\sqrt{3}$
(D) $18 - 9\sqrt{3}$

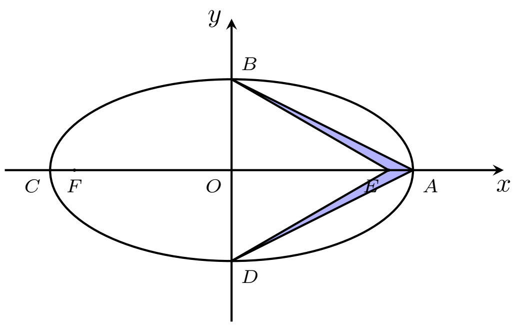


Figura 3

8. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considera $z_1 = 3+\sqrt{3}i$ e $z_2 = \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$, sendo i a unidade imaginária

8.1. Resolve, em $\mathbb{C}$, a equação $(\overline{1+i}) \times z - \frac{\overline{z_1}}{z_1} = 0$

8.2. Determina o menor número natural n, para o qual $\left(\frac{z_1 \times z_2}{\overline{z_2}}\right)^n$ é um número real positivo

9. .

Os dois itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa
O **item 9.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10°, 11° e 12° anos, homologados em 2001 e 2002 **(2001/2002)**
O **item 9.2.** integra-se no Programas e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 **(PMC2015)**
Responde apenas a um dos dois itens
Na tua folha de respostas, identifica claramente o item selecionado

P2001/2002

9.1. Lança-se duas vezes um dado tetraédrico equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 4
Se X o número de vezes que sai a face 4 nos dois lançamentos
Qual é a distribuição de probabilidade?

(A)

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\left(\frac{1}{4}\right)^2$	$2\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^2$

(B)

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\left(\frac{3}{4}\right)^2$	$2\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^2$

(C)

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$

(D)

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

PMC2015

9.2. Um ponto P desloca-se numa reta numérica durante um intervalo de tempo I, de tal forma que a respetiva abcissa é dada, para um certo valor $A\in\mathbb{R}$, por $x(t) = A\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right)$, com $t \in I$ e $A > 0$
Na figura 4, está representado, em referencial o.n. xOy, o gráfico do oscilador harmónico

Sabe-se que:

- B é ponto do gráfico onde a a função x atinge o valor máximo e a sua ordenada é 2
- C é ponto do gráfico onde a a função x atinge o valor mínimo e a sua ordenada é -2

Em qual das opções está, no instante $t=0$, a abcissa do ponto P?

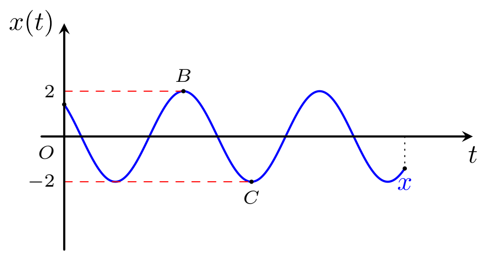


Figura 4

(A) $2\sqrt{2}$

(B) $\sqrt{3}$

(C) $\sqrt{2}$

(D) $2\sqrt{3}$

10. Uma equipa de Biólogos de uma universidade da África do Sul fez um estudo sobre a evolução de uma população de gnus num parque nacional de África do Sul
No final do estudo, chegaram à conclusão que o número de gnus existente no parque é dado, aproximadamente, por $G(t) = \dfrac{a}{1 + b \times e^{-kt}}$, com $t \geq 0$

Sabe-se que a, b e k são números reais positivos
A variável t designa o tempo, em anos, e $t = 0$ corresponde ao início do ano de 1999

Sabendo que no início de 1999 havia 40000 gnus no parque, que no final de 2009 esse número sofreu um aumento de 20000, e que com o passar do tempo o número de gnus tende para 120000, determina os valores de a, b e k

(Exercício adaptado de um exercício do meu livro de exercícios do 12º ano)

11. Seja f, uma função real de variável real, de domínio $\mathbb{R}^+$
Sabe-se que a reta de equação $y = ex + 1$ é assintota oblíqua ao gráfico de f
Considera, agora, a função g, real de variável real, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = \dfrac{(f(x) - 2)^2}{x^2}$
Qual é a equação da assíntota horizontal ao gráfico da função g?

   (A) $y = e^2 - 4e$
   (B) $y = e^2$
   (C) $y = e$
   (D) $y = -4e$

12. Sejam, a e b, dois números reais não nulos
Considera a função h, real de variável real, de domínio $\left]-\dfrac{\pi}{2}; +\infty\right[$, definida por

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{ax}{\sin(2x)} & se \quad -\dfrac{\pi}{2} < x < 0 \\ 1 & se \quad x = 0 \\ \dfrac{1 - e^{-2x}}{bx} & se \quad x > 0 \end{cases}$$

12.1. Em qual das opções está a equação de uma das assíntotas ao gráfico da função h?
   (A) $x = -\dfrac{\pi}{4}$
   (B) $x = -\dfrac{\pi}{2}$
   (C) $x = -\dfrac{\pi}{3}$
   (D) $x = \pi$

12.2. Determina os valores de a e b, de modo que a função h seja contínua no ponto 0
Justifica a tua resposta

13. Considera a função f, real de variável real, definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, por $f(x) = e^{\frac{1}{x}} - ex$

Estuda a função f quanto ao sentido das concavidades e pontos de inflexão do seu gráfico

14. Considera a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \ln(x)$ e contínua e diferenciável em todo o seu domínio
Na figura 5 está, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico de f, uma reta secante ao gráfico nos pontos A e B, e um triângulo $[BCD]$

Sabe-se que:

- a abcissa do ponto A é e e a abcissa do ponto B é $2e$
- o ponto C é o ponto de interseção da reta AB com o eixo das abcissas
- o ponto D é a projeção ortogonal do ponto B sobre o eixo Ox

Mostra que a área do triângulo $[BCD]$ é igual a $\dfrac{e(1+\ln(2))^2}{2\ln(2)}$ $u.a.$

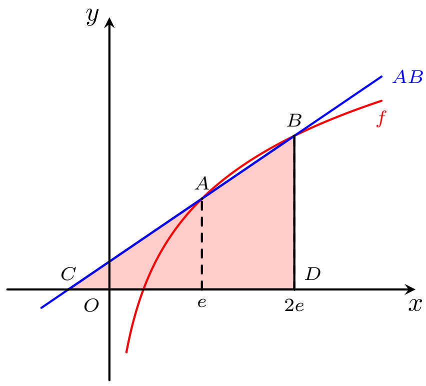


Figura 5

FIM DO CADERNO 2

COTAÇÕES

7.			
		....	8 pontos
8.			
	8.1	....	10 pontos
	8.2	....	10 pontos
9.			
		....	8 pontos
10.			
		....	12 pontos
11.			
		....	8 pontos
12.			
	12.1	....	8 pontos
	12.2	....	11 pontos
13.			
		....	10 pontos
14.			
		....	10 pontos

TOTAL .... 95 pontos