

---

**12.º Ano de Escolaridade | Turma G-K**

---

**CADERNO 1**

1. .

**1.1. P2001/2002**

$$\begin{aligned}P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.1 &\Leftrightarrow P(\overline{A \cup B}) = 0.1 \Leftrightarrow 1 - P(A \cup B) = 0.1 \Leftrightarrow P(A \cup B) = 0.9 \\P(A \cup B) = 0.9 &\Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.9 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0.6 + 0.5 - 0.9 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0.2 \\P(\overline{A}|\overline{B}) &= \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{0.1}{0.5} = 0.2\end{aligned}$$

$$P(A) \times P(B) = 0.6 \times 0.5 = 0.3$$

$$P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$$

**Resposta:(A)****1.2. PMC2015**

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

Se a reta  $t$  tangente ao gráfico no ponto  $C$  é paralela à reta  $AB$ , então, deverá ter-se

$$f'(c) = \frac{f(2e) - f(e)}{2e - e}$$

Ora,

$$\begin{aligned}f'(c) &= \frac{f(2e) - f(e)}{2e - e} \Leftrightarrow \frac{1}{c} = \frac{\ln(2e) - \ln(e)}{e} \Leftrightarrow \frac{1}{c} = \frac{\ln(2) + \ln(e) - \ln(e)}{e} \Leftrightarrow \frac{1}{c} = \frac{\ln(2)}{e} \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow c = \frac{e}{\ln(2)}\end{aligned}$$

**Resposta:(B)**

$$2. \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3 \times 2^{1-(n+1)}}{3 \times 2^{1-n}} = \frac{2^{-n}}{2^{1-n}} = 2^{-n-(1-n)} = 2^{-1} = \frac{1}{2} \text{ (constante), } \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo,  $(a_n)$  é uma progressão geométrica de razão  $\frac{1}{2}$ **Resposta:(A)**

3. .

Por uma propriedade do triângulo de Pascal, sabemos que  ${}^{2017}C_{500} + {}^{2017}C_{501} = {}^{2018}C_{501}$ Logo,  $x + y = {}^{2018}C_{501}$ **Resposta:(B)**

$$\begin{aligned}
4. \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{16} &= \\
&= \sum_{p=0}^{16} \left[ {}^{16}C_p \times \left(-\frac{1}{x}\right)^{16-p} \times \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^p \right] = \\
&= \sum_{p=0}^{16} \left[ {}^{16}C_p \times (-1)^{16-p} \times (x^{-1})^{16-p} \times \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^p \right] = \\
&= \sum_{p=0}^{16} \left[ {}^{16}C_p \times (-1)^{16-p} \times x^{-16+p} \times x^{-\frac{p}{2}} \right] = \\
&= \sum_{p=0}^{16} \left[ {}^{16}C_p \times (-1)^{16-p} \times x^{-16+\frac{p}{2}} \right]
\end{aligned}$$

Procuramos  $p$  de modo que  $-16 + \frac{p}{2} = -4$   
 $-16 + \frac{p}{2} = -4 \Leftrightarrow -32 + p = -8 \Leftrightarrow p = 24$

Então, não existe o termo, uma vez que  $p$  tinha de ser inferior ou igual a dezasseis e superior ou igual a zero.

5.  $\exists c \in ]-2, 0[: f(x) = -x \iff \exists c \in ]-2, 0[: f(x) + x = 0$

Seja  $g(x) = ke^{-x} - 2 + x$

A função  $g$  é contínua no seu domínio, então também é contínua no intervalo  $[-2, 0]$  por se tratar da soma de duas funções contínuas

Para que o Teorema de Bolzano garanta a existência de, pelo menos, um zero da função  $g$  no intervalo  $] - 2, 0[$ , deverá ter-se  $g(-2) \times g(0) < 0$

$g(-2) = ke^2 - 2 - 2 = ke^2 - 4$

$g(0) = ke^0 - 2 + 0 = k - 2$

Assim, de  $g(-2) \times g(0) < 0$ , resulta  $(k - 2)(ke^2 - 4) < 0$

$k$	$-\infty$	$\frac{4}{e^2}$		$2$	$+\infty$
$k - 2$	-	-	-	$0$	+
$ke^2 - 4$	-	$0$	+	+	+
$(k - 2)(ke^2 - 4)$	+	$0$	-	$0$	+

Assim, resulta  $(k - 2)(ke^2 - 4) < 0$ , ou seja,  $k \in \left] \frac{4}{e^2}, 2 \right[$

Resposta: (D)

6. .

6.1. Consideremos a seguinte legenda:

$C$ : a carta é de copas

$\overline{C}$ : a carta não é de copas

Então, como a extração é sucessiva e sem reposição, tem-se os casos:

$\overline{C} C$  ou  $C \overline{C}$  ou  $\overline{C} \overline{C}$

Assim, a probabilidade pedida é dada por:  $\frac{13 \times 39}{52 \times 51} + \frac{39 \times 13}{52 \times 51} + \frac{39 \times 38}{52 \times 51} = \frac{16}{17}$

**Outro Processo:**

$P(\text{obter pelo menos um carta que não é de copas}) = 1 - P(\text{obter duas cartas de copas})$

$= 1 - \frac{13 \times 12}{52 \times 51} = \frac{16}{17}$

6.2. O número de casos possíveis é igual a  ${}^{52}C_{13}$ , dado que cada jogador recebe treze cartas. Quanto ao número de casos favoráveis:

pretende-se que nas treze cartas que se recebe haja exatamente seis cartas de ouros, então o número de maneiras de tal ocorrer é dado por  ${}^{13}C_6 \times {}^{39}C_7$

Então, a probabilidade pedida é igual a  $P = \frac{{}^{13}C_6 \times {}^{39}C_7}{{}^{52}C_{13}} \approx 4.2\%$

7. .

$$\begin{aligned}
 \text{7.1. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 e^{x+2} + 2x - e}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 e^{x+2}}{x} + 2 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e}{x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x e^{x+2}) + 2 - \frac{e}{-\infty} = \lim_{y \rightarrow +\infty} [(-y) e^{-y+2}] + 2 - 0 = - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^2 y}{e^y} + 2 = \\
 &= - \frac{e^2}{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y}} + 2 = - \frac{e^2}{+\infty} + 2 = 0 + 2 = 2 \\
 \text{Logo } m &= 2
 \end{aligned}$$

Fez-se a mudança de variável

$$y = -x \Leftrightarrow x = -y$$

Se  $x \rightarrow -\infty$ , então,  $y \rightarrow +\infty$

Utilizou-se o limite notável  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty, (p \in \mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 e^{x+2} + 2x - e - 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 e^{x+2} - e) = \\
 &= \lim_{y \rightarrow +\infty} [(-y)^2 e^{-y+2}] - e = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^2 y^2}{e^y} - e = \frac{e^2}{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y^2}} - e = \frac{e^2}{+\infty} - e = 0 - e = -e
 \end{aligned}$$

Logo  $b = -e$

Fez-se a mudança de variável

$$y = -x \Leftrightarrow x = -y$$

Se  $x \rightarrow -\infty$ , então,  $y \rightarrow +\infty$

Utilizou-se o limite notável  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty, (p \in \mathbb{R})$

Portanto, a equação reduzida da reta  $r$  é  $y = 2x - e$

7.2. Sabe-se que a função primeira derivada de  $f$ , é definida em  $\mathbb{R}$  por  $f'(x) = (x^2 + 2x)e^{x+2} + 2$

Determinemos a função segunda derivada de  $f$

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= [(x^2 + 2x)e^{x+2} + 2]' = (x^2 + 2x)' \times e^{x+2} + (x^2 + 2x) \times (e^{x+2})' + 0 = \\
 &= (2x + 2) \times e^{x+2} + (x^2 + 2x) \times e^{x+2} = (x^2 + 4x + 2)e^{x+2}, \text{ com } x \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Calculemos os zeros de  $f''$

$$\begin{aligned}
 f''(x) = 0 &\Leftrightarrow (x^2 + 4x + 2)e^{x+2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 2 = 0 \vee e^{x+2} = 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow x &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1} \vee \text{equação impossível} \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow x &= -2 \pm \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

Sinal de  $f''$

$$e^{x+2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$x^2 + 4x + 2 < 0 \Leftrightarrow -2 - \sqrt{2} < x < -2 + \sqrt{2}$$

$$x^2 + 4x + 2 > 0 \Leftrightarrow x < -2 - \sqrt{2} \vee x > -2 + \sqrt{2}$$

Quadro de sinal de  $f''$  e do sentido das concavidades do gráfico de  $f$

$x$	$-\infty$	$-2 - \sqrt{2}$		$-2 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$e^{x+2}$	+	+	+	+	+
$x^2 + 4x + 2$	+	0	-	0	+
$f''$	+	0	-	+	+
$f$	∩	$f(-2 - \sqrt{2})$	∩	$f(-2 + \sqrt{2})$	∩

$$f(-2 - \sqrt{2}) = (-2 - \sqrt{2})^2 \times e^{-2 - \sqrt{2} + 2} + 2(-2 - \sqrt{2}) - e = (4 + 2\sqrt{2} + 2)e^{-\sqrt{2}} - 4 - 2\sqrt{2} - e = (6 + 2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}} - 2\sqrt{2} - 4 - e$$

$$f(-2 + \sqrt{2}) = (-2 + \sqrt{2})^2 \times e^{-2 + \sqrt{2} + 2} + 2(-2 + \sqrt{2}) - e = (4 - 2\sqrt{2} + 2)e^{\sqrt{2}} - 4 + 2\sqrt{2} - e = (6 - 2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}} + 2\sqrt{2} - 4 - e$$

O gráfico da função  $f$  tem a concavidade voltada para cima em  $] -\infty; -2 - \sqrt{2}[$  e em  $] -2 + \sqrt{2}; +\infty[$ , e tem a concavidade voltada para baixo em  $] -2 - \sqrt{2}; -2 + \sqrt{2}[$ . Os pontos de inflexão do seu gráfico têm coordenadas  $(-2 - \sqrt{2}; f(-2 - \sqrt{2}))$  e  $(-2 + \sqrt{2}; f(-2 + \sqrt{2}))$

8. Seja  $z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$

A semirreta  $\dot{O}A$  tem equação  $y = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)x$ , com  $x \geq 0$ , ou seja,  $y = \sqrt{3}x$ , com  $x \geq 0$

A semirreta  $\dot{O}B$  tem equação  $y = \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)x$ , com  $x \leq 0$ , ou seja,  $y = -\sqrt{3}x$ , com  $x \leq 0$

A condição  $I_m(z - 3) \leq R_e(\sqrt{3} - 2i) \Leftrightarrow I_m(x + yi - 3) \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow I_m(x - 3 + yi) \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow y \leq \sqrt{3}$

Assim, vem que,

$$y = \sqrt{3}x \wedge y = \sqrt{3} \Leftrightarrow y = \sqrt{3}x \wedge \sqrt{3}x = \sqrt{3} \Leftrightarrow y = \sqrt{3}x \wedge x = 1 \Leftrightarrow y = \sqrt{3} \wedge x = 1$$

Portanto,  $A(1; \sqrt{3})$

A condição  $I_m(z - 3) \leq R_e(\sqrt{3} - 2i) \Leftrightarrow I_m(x + yi - 3) \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow I_m(x - 3 + yi) \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow y \leq \sqrt{3}$

Assim, vem que,

$$y = -\sqrt{3}x \wedge y = \sqrt{3} \Leftrightarrow y = -\sqrt{3}x \wedge -\sqrt{3}x = \sqrt{3} \Leftrightarrow y = -\sqrt{3}x \wedge x = -1 \Leftrightarrow y = \sqrt{3} \wedge x = -1$$

Portanto,  $B(-1; \sqrt{3})$

Portanto, a área do triângulo é igual a

$$A_{[OAB]} = \frac{\overline{AB} \times |\text{ordenada de } A|}{2} = \frac{|1 - (-1)| \times |\sqrt{3}|}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ u.a.}$$

**Resposta:** (C)

## CADERNO 2

9. .

### 9.1. P2001/2002

Os valores que a variável aleatória pode tomar são: 2; 4; 6

$$P(X = 4)$$

Se o menor dos números é 4 então podem ocorrer os seguintes casos:

sair uma a bola com o número 4, e duas com o número 6. O número de maneiras de tal ocorrer é igual a  ${}^2C_1 \times {}^3C_2 = 6$

saírem duas bolas com o número 4, e uma com o número 6. O número de maneiras de tal ocorrer é igual a  ${}^2C_2 \times {}^3C_1 = 3$

$$\text{Então, } P(X = 4) = \frac{{}^2C_1 \times {}^3C_2 + {}^2C_2 \times {}^3C_1}{{}^6C_3} = \frac{9}{20}$$

**Resposta:**(D)

### 9.2. PMC2015

Sendo,  $a$  a medida do semieixo maior,  $b$  a medida do semieixo menor, e  $c$  a medida da semidistância focal,

Tem-se que,

$$a^2 = 100 \Leftrightarrow a = \pm 10, \text{ com } a > 0, \text{ logo, } a = 10$$

$$b^2 = 64 \Leftrightarrow b = \pm 8, \text{ com } b > 0, \text{ logo, } b = 8$$

Assim, de  $a^2 = b^2 + c^2$ , resulta,

$$100 = 64 + c^2 \Leftrightarrow c^2 = 100 - 64 \Leftrightarrow c^2 = 36 \Leftrightarrow c = \pm 6, \text{ com } c > 0, \text{ logo, } c = 6$$

Portanto, os focos da elipse são:  $F_1(6; 0)$  e  $F_2(-6; 0)$

**Resposta:**(B)

$$10. f(x) = \log\left(\frac{10^x \times x^2}{10^3}\right) = \log(10^x \times x^2) - \log(10^3) = \log(10^x) + \log(x^2) - 3 = x + \log(x^2) - 3$$

11. .

**11.1.** Se a reta  $r$  é perpendicular ao plano  $\alpha$ , então, um seu vetor diretor poderá ser um vetor normal ao plano

Ora, um vetor normal ao plano  $\alpha$  é  $\vec{\alpha} = (2; -1; 0)$

Assim, um vetor diretor da reta  $r$  é  $\vec{r} = (2; -1; 0)$

Determinemos as coordenadas do ponto médio do segmento de reta  $[CF]$

Ora, sabemos que o volume do cubo  $[ABCDEFGH]$  é igual a 64, assim, a medida da sua aresta é  $\sqrt[3]{64} = 4$

Então,  $C(-2; 2; -4)$  e  $F(2; 2; 0)$

Logo,  $M\left(\frac{-2+2}{2}; \frac{2+2}{2}; \frac{-4+0}{2}\right)$ , ou seja,  $M(0; 2; -2)$

Uma equação vetorial da reta  $r$  é  $(x; y; z) = (0; 2; -2) + k(2; -1; 0), k \in \mathbb{R}$

**11.2.** Ora,  $B(2; 2; -4)$  e  $H(-2; -2; 0)$

Determinemos o vetor  $\overrightarrow{BH}$

$$\overrightarrow{BH} = H - B = (-2; -2; 0) - (2; 2; -4) = (-2 - 2; -2 - 2; 0 + 4) = (-4; -4; 4)$$

este vetor é normal ao plano pretendido

A equação do plano é da forma  $-4x - 4y + 4z + d = 0, d \in \mathbb{R}$

Como o plano contém o ponto  $B$ , vem

$$-4 \times 2 - 4 \times 2 + 4 \times (-4) + d = 0 \Leftrightarrow d = 32$$

Logo, a equação do plano tangente à superfície esférica de diâmetro  $[BH]$ , no ponto  $B$  é  $-4x - 4y + 4z + 32 = 0$ , ou seja,  $-x - y + z + 8 = 0$

**Outro Processo:**

Seja  $P(x; y; z)$  um ponto do plano tangente pretendido

Então,

$$\overrightarrow{BH} = (-4; -4; 4)$$

$$\overrightarrow{BP} = P - B = (x; y; z) - (2; 2; -4) = (x - 2; y - 2; z + 4)$$

Assim, vem,

$$\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BP} = 0 \Leftrightarrow (-4; -4; 4) \cdot (x - 2; y - 2; z + 4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4(x - 2) - 4(y - 2) + 4(z + 4) = 0 \Leftrightarrow -4x + 8 - 4y + 8 + 4z + 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x - y + z + 8 = 0$$

$$\begin{aligned} 12. \quad & 4 \sin(x) \cos(x) - 8 \sin^3(x) \cos(x) = 4 \sin(x) \cos(x) - 8 \sin(x) \cos(x) \sin^2(x) = \\ & = 2 \sin(2x) - 4 \sin(2x) \sin^2(x) = 2 \sin(2x)(1 - 2 \sin^2(x)) = 2 \sin(2x)(\sin^2(x) + \cos^2(x) - 2 \sin^2(x)) = \\ & = 2 \sin(2x)(\cos^2(x) - \sin^2(x)) = 2 \sin(2x) \cos(2x) = \sin(2 \times 2x) = \sin(4x) \end{aligned}$$

**Resposta:** (C)

13. .

$$13.1. \quad w_2 = 2 \left( \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) = 2 \times (0 + i) = 2i$$

$$\begin{aligned} \overline{w_1} + i^{57} \times (1 - 3i) \times w_2 &= \overline{1 + i} + i^{4 \times 14 + 1} \times (1 - 3i) \times 2i = \frac{1 - i + i \times (1 - 3i) \times 2i}{2 + 2i} = \frac{2 - 2i}{2 + 2i} = \\ &= \frac{1 - i + 2i^2 \times (1 - 3i)}{2 - 2i} = \frac{1 - i - 2 \times (1 - 3i)}{2 - 2i} = \frac{1 - i - 2 + 6i}{2 - 2i} = \frac{-1 + 5i}{2 - 2i} = \\ &= \frac{(-1 + 5i)(2 + 2i)}{(2 - 2i)(2 + 2i)} = \frac{-2 - 2i + 10i + 10i^2}{2^2 + 2^2} = \frac{-2 + 8i - 10}{8} = \frac{-12 + 8i}{8} = -\frac{3}{2} + i \end{aligned}$$

**13.2.** Passemos  $w_1 = 1 + i$  à forma trigonométrica

$$w_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Seja  $\alpha = \text{Arg}(w_1)$

Então,

$$\tan(\alpha) = \frac{1}{1}, \text{ com } \alpha \in 1^\circ \text{ Q}$$

$$\therefore \tan(\alpha) = 1, \text{ com } \alpha \in 1^\circ \text{ Q}$$

Logo,  $\alpha = \frac{\pi}{4}$

Portanto,  $w_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

Assim,  $iw_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} \times \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2})} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Seja  $z = |z|e^{i\theta}$ , com  $\theta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |z| \times z^4 - iw_1 = 0 &\Leftrightarrow |z| \times z^4 = iw_1 \Leftrightarrow |z| \times (|z|e^{i\theta})^4 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow |z| \times |z|^4 e^{i(4\theta)} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |z|^5 e^{i(4\theta)} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow |z|^5 = \sqrt{2} \wedge 4\theta = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |z| = \sqrt[5]{\sqrt{2}} \wedge \theta = \frac{3\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow |z| = \sqrt[10]{2} \wedge \theta = \frac{3\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Atribuindo valores a  $k$ , vem,

$$\begin{aligned} k = 0 &\rightarrow z_0 = \sqrt[10]{2}e^{i\frac{3\pi}{16}} \\ k = 1 &\rightarrow z_1 = \sqrt[10]{2}e^{i(\frac{3\pi}{16} + \frac{\pi}{2})} = \sqrt[10]{2}e^{i\frac{11\pi}{16}} \\ k = 2 &\rightarrow z_2 = \sqrt[10]{2}e^{i(\frac{3\pi}{16} + \frac{2\pi}{2})} = \sqrt[10]{2}e^{i\frac{19\pi}{16}} = \sqrt[10]{2}e^{i(-\frac{13\pi}{16})} \\ k = 3 &\rightarrow z_3 = \sqrt[10]{2}e^{i(\frac{3\pi}{16} + \frac{3\pi}{2})} = \sqrt[10]{2}e^{i\frac{27\pi}{16}} = \sqrt[10]{2}e^{i(-\frac{5\pi}{16})} \\ k = 4 &\rightarrow z_4 = \sqrt[10]{2}e^{i(\frac{3\pi}{16} + \frac{4\pi}{2})} = \sqrt[10]{2}e^{i(\frac{3\pi}{16} + 2\pi)} = \sqrt[10]{2}e^{i\frac{3\pi}{16}} = z_0 \end{aligned}$$

A partir de  $k = 4$ , as soluções começam a repetir as soluções  $z_0, z_1, z_2$  e  $z_3$

O conjunto solução da equação é,

$$C.S. = \left\{ \sqrt[10]{2}e^{i\frac{3\pi}{16}}; \sqrt[10]{2}e^{i\frac{11\pi}{16}}; \sqrt[10]{2}e^{i(-\frac{13\pi}{16})}; \sqrt[10]{2}e^{i(-\frac{5\pi}{16})} \right\}$$

**13.3.** Sabemos que  $w_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$  e  $w_2 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{2}}}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2})}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \times e^{i(-\frac{n\pi}{4})}$$

Para que  $\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^n$  seja um imaginário puro com parte imaginária negativa, deverá ter-se,

$$\begin{aligned} -\frac{n\pi}{4} &= -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \therefore \frac{n\pi}{4} &= \frac{\pi}{4} - 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \therefore n &= 2 - 8k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Atribuindo valores a  $k$ , vem,

$$\begin{aligned} k = 0 &\rightarrow n = 2 \in \mathbb{N} \\ k = 1 &\rightarrow n = -6 \notin \mathbb{N} \\ k = -1 &\rightarrow n = 10 \in \mathbb{N} \\ k = -2 &\rightarrow n = 18 \in \mathbb{N} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Logo, O menor valor de  $n \in \mathbb{N}$ , para o qual  $\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^n$  é um imaginário puro com parte imaginária negativa, é 2

**Resposta:** (A)

14. De  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( g(x) - \frac{e}{2}x + e \right) = 0$ , resulta,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ g(x) - \left( \frac{e}{2}x - e \right) \right] = 0$

Portanto, a reta de equação  $y = \frac{e}{2}x - e$  é assíntota ao gráfico de  $g$ , quando  $x \rightarrow +\infty$

Logo,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \frac{e}{2}$

Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x) - \ln(x)}{x - e^{-x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{g(x)}{x} - \frac{\ln(x)}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{e^{-x}}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}}{1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{xe^x}} = \frac{\frac{e}{2} - 0}{1 - \frac{1}{+\infty}} = \\ &= \frac{\frac{e}{2}}{1 - 0} = \frac{e}{2} \end{aligned}$$

15.  $\pi \in D_h$  e é ponto aderente de  $D_h$

A função  $h$  é contínua em  $x = \pi$ , se existir  $\lim_{x \rightarrow \pi} h(x)$ , ou seja, se  $\lim_{x \rightarrow \pi^-} h(x) = h(\pi)$  e  $\lim_{x \rightarrow \pi^+} h(x) = h(\pi)$

Ora,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi^-} h(x) &= \lim_{x \rightarrow \pi^-} \left( \frac{1}{e} + \frac{e^{x-\pi} - 1}{2x - 2\pi} \right) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \left( \frac{1}{e} + \frac{e^{x-\pi} - 1}{2(x - \pi)} \right) = \frac{1}{e} + \frac{1}{2} \times \lim_{x - \pi \rightarrow 0^-} \frac{e^{x-\pi} - 1}{x - \pi} = \\ &= \frac{1}{e} + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{e} + \frac{1}{2} = \frac{2 + e}{2e} \end{aligned}$$

Utilizou-se o limite notável  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi^+} h(x) &= \lim_{x \rightarrow \pi^+} \left( -\frac{\pi - x}{e \sin(x - \pi)} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{e} \times \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{x - \pi}{\sin(x - \pi)} + \frac{1}{2} = \\ &= \frac{1}{e} \times \frac{1}{\lim_{x - \pi \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x - \pi)}{x - \pi}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{e} \times \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{e} + \frac{1}{2} = \frac{2 + e}{2e} \end{aligned}$$

Utilizou-se o limite notável  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

$$h(\pi) = \log \left( 10^{\frac{1}{e} + \frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{e} + \frac{1}{2} = \frac{2 + e}{2e}$$

Como,  $\lim_{x \rightarrow \pi^-} h(x) = h(\pi)$  e  $\lim_{x \rightarrow \pi^+} h(x) = h(\pi)$ , então, existe  $\lim_{x \rightarrow \pi} h(x)$

Logo, a função  $h$  é contínua em  $x = \pi$