Escola Secundária de Penafiel

# Exame Modelo IV de Matemática A

**Duração do Exame:** 150 **minutos** + 30 **minutos de tolerância** | **junho de 2018**

**Caderno 1 (75 minutos + 15min ) + Caderno 2 (75 minutos + 15min )**

**12.º Ano de Escolaridade** | Turma - G - K

## Caderno 1

- **Duração:** 75 **minutos** + 15 **minutos de tolerância**
- **É permitido o uso de calculadora gráfica**

Indica de forma legível a versão da prova. A prova é constituída por dois cadernos (Caderno 1 e Caderno 2). Utiliza apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta. Só é permitido o uso de calculadora no Caderno 1. Não é permitido o uso de corretor. Risca o que pretendes que não seja classificado. Para cada resposta identifica o item. Apresenta as tuas respostas de forma legível. Apresenta apenas uma resposta para cada item. A prova apresenta um formulário no Caderno 1. As cotações dos itens de cada Caderno encontram-se no final de cada Caderno.

Na resposta aos itens de seleção (escolha múltipla), seleciona a resposta correta. Escreve na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação apresenta sempre o valor exato.

# Formulário

## Geometria

**Comprimento de um arco de circunferência:**

$\alpha r$ *($\alpha$ - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; $r$ - raio)*

**área de um polígono regular:** *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

**área de um setor circular:**

$\frac{\alpha r^2}{2}$ *($\alpha$- amplitude, em radianos, do ângulo ao centro, $r$ - raio)*

**área lateral de um cone:** $\pi r g$ *($r$ - raio da base, $g$ - geratriz)*

**área de uma superfície esférica:** $4\pi r^2$ *($r$ - raio)*

**Volume da pirâmide:** $\frac{1}{3}\times$ *área da base* $\times$ *Altura*

**Volume do cone:** $\frac{1}{3}\times$ *área da base* $\times$ *Altura*

**Volume da esfera:** $\frac{4}{3}\pi r^3$ *($r$ - raio)*

## Progressões

*Soma dos $n$ primeiros termos de uma progressão $(u_n)$:*

**Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

**Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$, $r \neq 1$

## Trigonometria

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

**Lei dos senos**

$\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c}$

**Lei dos cossenos ou Teorema de Carnot**

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$

## Complexos

$(|z| cis\theta)^n = |z|^n cis(n\theta)$ ou $(|z|e^{i\theta})^n = |z|^n e^{i(n\theta)}$

$\sqrt[n]{|z| cis\theta} = \sqrt[n]{|z|} cis \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$, $k \in \{0;1;2;...;n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$

## Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1(x_1 - \mu)^2 + \cdots + p_n(x_n - \mu)^2}$

Se $X \sim N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0.6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$

## Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'e^u$

$(a^u)' = u'a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\})$

## Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. .

| 1.1 | 1.2 |
|---|---|
| P2001/2002 | PMC2015 |

**1.1.** Seja $(E, P(E), P)$ um espaço de probabilidade
Sejam $A$ e $B$ dois acontecimentos possíveis de $P(E)$
Sabe-se que: $P(A) = 0.6$, $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.1$ e $P(\overline{B}) = 0.5$

A afirmação falsa é:

(A) $A$ e $B$ são acontecimentos independentes
(B) $P(\overline{A}|\overline{B}) = 0.2$
(C) $P(A \cap B) = 0.2$
(D) $P(A \cup B) = 0.9$

**1.2.** Considera a função $f$, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \ln(x)$ e contínua em todo o seu domínio
Na figura 1 está, em referencial o.n. $xOy$, parte do gráfico de $f$, uma reta secante ao gráfico nos pontos $A$ e $B$, de abcissas $e$ e $2e$, respetivamente, e uma reta $t$, tangente ao gráfico de $f$ no ponto de abcissa $c$, com $c \in ]e; 2e[$

Pelo Teorema de Lagrange, existe pelo menos um valor $c$ em $]e; 2e[$, para o qual a reta $t$ tangente ao gráfico nesse ponto é paralela à reta $AB$

Em qual das opções está o valor de $c$?

(A) $\dfrac{2}{\ln(2)}$

(B) $\dfrac{e}{\ln(2)}$

(C) $\dfrac{\ln(2)}{e}$

(D) $\dfrac{\ln(2)}{2}$

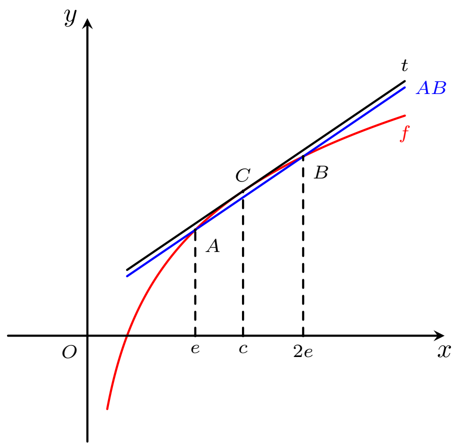


Figura 1

2. Considera a sucessão $(a_n)$ de termo geral $a_n = 3 \times 2^{1-n}$

Comenta a seguinte afirmação:

"A sucessão $(a_n)$ é uma progressão geométrica de razão $\dfrac{1}{2}$"

3. Supondo que ${}^{2017}C_{500} = x$ e ${}^{2017}C_{501} = y$, então, pode-se afirmar que:

(A) ${}^{2018}C_{500} = x + y$
(B) ${}^{2018}C_{501} = x + y$
(C) ${}^{2018}C_{501} = x \times y$
(D) ${}^{2018}C_{500} = x \times y$

4. Considera a expressão $\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{16}$, com $x>0$.

Averigua se existe algum termo do desenvolvimento da forma $ax^{-4}$, com $a \in \mathbb{R}$. Caso exista, determina-o.

5. Considera, para um certo número real $k$, a função $f$, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=ke^{-x}-2$
Para certos valores de $k$, o Teorema de Bolzano garante que a função $f$ interseta a bissetriz dos quadrantes pares num ponto de abcissa pertencente ao intervalo $]-2,0[$
A qual dos intervalos seguintes pode pertencer $k$?

(A) $\left]2;e^2\right[$

(B) $\left]0;\frac{4}{e^2}\right[$

(C) $\left]-2;-\frac{4}{e^2}\right[$

(D) $\left]\frac{4}{e^2},2\right[$

6. Um baralho de cartas completo é constituído por 52 cartas, distribuídas por quatro naipes (espadas, paus, copas e ouros)

**6.1.** De um baralho de cartas completo extraem-se sucessivamente e sem reposição, duas cartas
Qual é a probabilidade de pelo menos uma das cartas extraídas não ser de copas?

**6.2.** Num certo jogo de cartas, utiliza-se um baralho completo e dão-se treze cartas a cada jogador
Imagina que estás a participar nesse jogo
Qual é a probabilidade de, nas treze cartas que vais receber, haver exatamente seis cartas do naipe de ouros?
Apresenta o resultado em percentagem e arredondado às décimas

7. Seja a função $f$, real de variável real, definida em $\mathbb{R}$, por $f(x)=x^2e^{x+2}+2x-e$
No referencial o.n. $xOy$, da figura 2, está representado parte do gráfico da função $f$ e uma reta $r$, que é assíntota ao gráfico de $f$, quando $x \to -\infty$

**7.1.** Escreve a equação reduzida da reta $r$

**7.2.** Sabe-se que a função primeira derivada de $f$, é definida em $\mathbb{R}$, por $f'(x)=(x^2+2x)e^{x+2}+2$
Estuda a função $f$ quanto ao sentido das concavidades e pontos de inflexão do seu gráfico

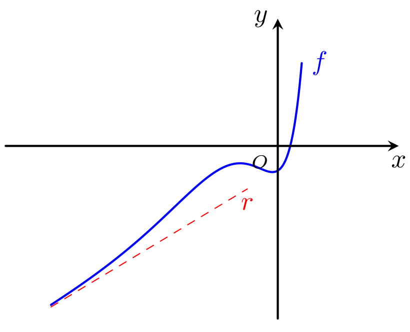


Figura 2

8. Seja $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos
A condição $\frac{\pi}{3} \leq Arg(z) \leq \frac{2\pi}{3} \wedge I_m(z-3) \leq R_e(\sqrt{3}-2i)$, define, no plano complexo, um triângulo $[OAB]$, como o representado na figura 3

Em qual das opções está o valor da área do triângulo $[OAB]$

(A) $\sqrt{2}$

(B) $2\sqrt{3}$

(C) $\sqrt{3}$

(D) $4\sqrt{3}$

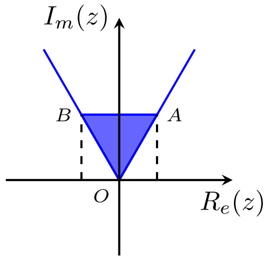


Figura 3

**FIM DO CADERNO 1**

## COTAÇÕES

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | | |
| | ........................................ | 5 pontos |
| **2.** | | |
| | ........................................ | 10 pontos |
| **3.** | | |
| | ........................................ | 5 pontos |
| **4.** | | |
| | ........................................ | 10 pontos |
| **5.** | | |
| | ........................................ | 5 pontos |
| **6.** | | |
| **6.1** | ........................................ | 15 pontos |
| **6.2** | ........................................ | 15 pontos |
| **7.** | | |
| **7.1** | ........................................ | 15 pontos |
| **7.2** | ........................................ | 15 pontos |
| **8.** | | |
| | ........................................ | 5 pontos |
| | **TOTAL ....................** | **100 pontos** |

**PÁGINA EM BRANCO**

**Caderno 2**

- **Duração:** 75 **minutos** + 15 **minutos de tolerância**
- **Neste Caderno não é permitida a utilização de calculadora**

9. .

| 9.1 | 9.2 |
|---|---|
| P2001/2002 | PMC2015 |

**9.1.** Numa caixa estão seis bolas numeradas, três com o número 6, duas com o número 4 e uma com o número 2. Considera a experiência aleatória que consiste em retirar, ao acaso, e de uma só vez, três bolas da caixa.
Seja $X$ a variável aleatória: «menor dos números retirados».

Em qual das opções está o valor de $P(X = 4)$?

(A) $\frac{5}{20}$

(B) $\frac{6}{20}$

(C) $\frac{7}{20}$

(D) $\frac{9}{20}$

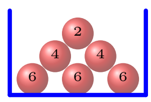

Figura 4

**9.2.** Considera a elipse, definida pela equação $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$, e representada no referencial o.n. $xOy$, da figura 5

Em qual das opções estão as coordenadas dos focos da elipse?

(A) $F_1(7; 0)$ e $F_2(-7; 0)$

(B) $F_1(6; 0)$ e $F_2(-6; 0)$

(C) $F_1(4; 0)$ e $F_2(-4; 0)$

(D) $F_1(9; 0)$ e $F_2(-9; 0)$

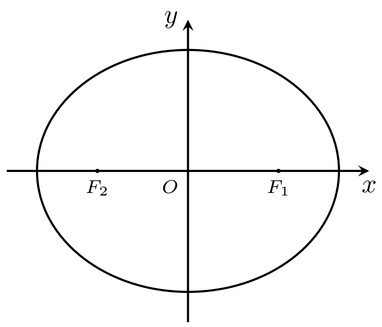

Figura 5

10. Seja $f$, a função de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $f(x) = \log\left(\frac{10^x \times x^2}{10^3}\right)$
Mostra que $f(x) = x + \log(x^2) - 3, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

11. No referencial ortonormado $Oxyz$, da figura 6 está representado um cubo $[ABCDEFGH]$ de volume 64 $u.v.$

Sabe-se que:

- a origem $O$ do referencial situa-se no centro da face $[EFGH]$
- a face $[EFGH]$ está contida no plano $xOy$
- as faces $[ABFE]$ e $[CDHG]$ são paralelas ao plano $yOz$

Considera, ainda, o plano $\alpha$ de equação $2x - y + 3 = 0$

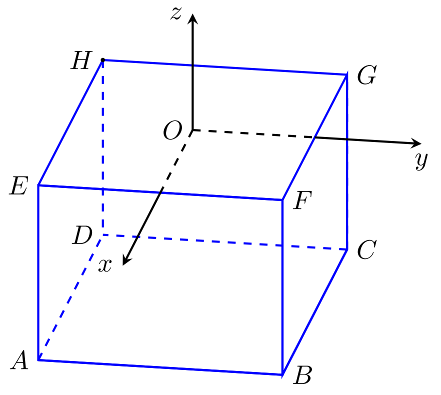


Figura 6

**11.1.** Escreve uma equação vetorial da reta $r$, perpendicular ao plano $\alpha$, e que contém o ponto médio do segmento de reta $[CF]$

**11.2.** Escreve a equação do plano tangente à superfície esférica de diâmetro $[BH]$, no ponto $B$

12. Numa das opções está uma expressão equivalente a $4\sin(x)\cos(x) - 8\sin^3(x)\cos(x)$

Em qual delas?

(A) $\sin(2x)$
(B) $\cos(2x)$
(C) $\sin(4x)$
(D) $\cos(4x)$

13. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considera os números complexos, $w_1 = 1 + i$ e $w_2 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$

**13.1.** Escreve $\dfrac{\overline{w_1} + i^{57} \times (1-3i) \times w_2}{2+2i}$ na forma $a + bi, a, b \in \mathbb{R}$

**13.2.** Resolve, em $\mathbb{C}$, a equação $|z| \times z^4 - iw_1 = 0$

**13.3.** Em qual das opções está o menor valor de $n \in \mathbb{N}$, para o qual $\left(\dfrac{w_1}{w_2}\right)^n$ é um imaginário puro com parte imaginária negativa?

(A) 2
(B) 4
(C) 10
(D) 18

14. Seja $g$, uma função contínua, de domínio $\mathbb{R}^+$

Sabe-se que:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x) - \frac{e}{2}x + e\right) = 0$

Mostra que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x) - \ln(x)}{x - e^{-x}} = \dfrac{e}{2}$

15. Considera a função $h$, de domínio $[-\pi; 2\pi]$, definida por

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{e} + \dfrac{e^{x-\pi} - 1}{2x - 2\pi} & se \quad -\pi < x < \pi \\ \log\left(10^{\frac{1}{e}+\frac{1}{2}}\right) & se \quad x = \pi \\ -\dfrac{\pi - x}{e\sin(x-\pi)} + \dfrac{1}{2} & se \quad \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

Averigua se a função $h$ é contínua no ponto $x = \pi$

**FIM DO CADERNO 2**

## COTAÇÕES

| | | | |
|---|---|---|---|
| **9.** | | | |
| | | .................................................................................... | 5 pontos |
| **10.** | | | |
| | | .................................................................................... | 5 pontos |
| **11.** | | | |
| | **11.1** | .................................................................................... | 15 pontos |
| | **11.2** | .................................................................................... | 15 pontos |
| **12.** | | | |
| | | .................................................................................... | 5 pontos |
| **13.** | | | |
| | **13.1** | .................................................................................... | 15 pontos |
| | **13.2** | .................................................................................... | 15 pontos |
| | **13.3** | .................................................................................... | 10 pontos |
| **14.** | | | |
| | | .................................................................................... | 5 pontos |
| **15.** | | | |
| | | .................................................................................... | 10 pontos |

**TOTAL** ..................... **100 pontos**

**PÁGINA EM BRANCO**

**PÁGINA EM BRANCO**