
12.º Ano de Escolaridade | Turma G-K

CADERNO 1

1. .

1.1. P2001/2002

Consideremos:

 D : "prego defeituoso" \bar{D} "prego não defeituoso"Seja X a variável aleatória: "número de pregos defeituosos num caixa"

$$P(D) = 7\% = 0.07$$

$$P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0.07 = 0.93$$

Trata-se de uma distribuição binomial $B(500; 0.07)$ Pretende-se $P(X = 10)$

$$P(X = 10) = {}^{500}C_{10} \times 0.07^{10} \times 0.93^{490} \approx 2.5 \times 10^{-7}$$

Resposta:(D)**1.2. PMC2015**

Recorrendo ao Teorema das Sucessões Enquadradas

$$-1 \leq \sin(n\pi) \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\therefore -2 \leq 2 \sin(n\pi) \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\therefore -\frac{2}{\sqrt{n^2+1}} \leq \frac{2 \sin(n\pi)}{\sqrt{n^2+1}} \leq \frac{2}{\sqrt{n^2+1}}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\therefore \pi - \frac{2}{\sqrt{n^2+1}} \leq \pi + \frac{2 \sin(n\pi)}{\sqrt{n^2+1}} \leq \pi + \frac{2}{\sqrt{n^2+1}}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\therefore \pi - \frac{2}{\sqrt{n^2+1}} \leq a_n \leq \pi + \frac{2}{\sqrt{n^2+1}}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Ora,

$$\lim \left(\pi - \frac{2}{\sqrt{n^2+1}} \right) = \pi - \lim \left(\frac{2}{\sqrt{n^2+1}} \right) = \pi - \frac{2}{\sqrt{+\infty}} = \pi - \frac{2}{+\infty} = \pi - 0 = \pi$$

$$\lim \left(\pi + \frac{2}{\sqrt{n^2+1}} \right) = \pi + \lim \left(\frac{2}{\sqrt{n^2+1}} \right) = \pi + \frac{2}{\sqrt{+\infty}} = \pi + \frac{2}{+\infty} = \pi + 0 = \pi$$

Então, pelo Teorema das Sucessões Enquadradas, tem-se que $\lim(a_n) = \pi$ **Resposta:**(C)

2. Como se pretende a probabilidade de saírem dois e só dois cartões com a cor azul, então podem ocorrer os seguintes casos:

- Cartão azul + cartão azul + cartão vermelho
- Cartão azul + cartão vermelho + cartão azul
- Cartão vermelho + cartão azul + cartão azul

Assim, a probabilidade pedida é igual a

$$P = \frac{6 \times 5 \times 4}{10 \times 9 \times 8} + \frac{6 \times 4 \times 5}{10 \times 9 \times 8} + \frac{4 \times 6 \times 5}{10 \times 9 \times 8} = 3 \times \frac{6 \times 5 \times 4}{10 \times 9 \times 8} = \frac{360}{720} = \frac{1}{2}$$

Resposta:(D)

3. $P(A \cap \bar{B}) = 0.1 \Leftrightarrow P(A) - P(A \cap B) = 0.1 \Leftrightarrow 0.2 - P(A \cap B) = 0.1 \Leftrightarrow -P(A \cap B) = 0.1 - 0.2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0.1$

$$P(A \cup B) = p \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = p \Leftrightarrow 0.2 + P(B) - 0.1 = p \Leftrightarrow P(B) = p - 0.1$$

Assim,

$$\begin{aligned} P(B | \bar{A}) &= \frac{3}{8} \Leftrightarrow \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})} = \frac{3}{8} \Leftrightarrow \frac{P(B) - P(B \cap A)}{0.8} = \frac{3}{8} \Leftrightarrow \frac{p - 0.1 - 0.1}{0.8} = \frac{3}{8} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{p - 0.2}{0.8} &= \frac{3}{8} \Leftrightarrow p - 0.2 = \frac{3}{8} \times 0.8 \Leftrightarrow p - 0.2 = 0.3 \Leftrightarrow p = 0.5 \end{aligned}$$

4. Na caixa estão dezassete bolas, e como se retiram de uma só vez duas bolas, então o número de casos possíveis é igual a ${}^{17}C_2$

Quanto ao número de casos favoráveis: Pretende-se que o produto dos números das duas bolas seja par, então podem ocorrer os seguintes casos:

- duas bolas com número par
O número de maneiras distintas de tal ocorrer é dado por ${}^{11}C_2$
- uma bola com número par + uma bola com número ímpar
O número de maneiras distintas de tal ocorrer é dado por ${}^{11}C_1 \times {}^6C_1$

Segundo a lei de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é dado pelo quociente entre o número de casos favoráveis a esse acontecimento e o número de casos possíveis, quando estes são todos equiprováveis

$$\text{Assim, a probabilidade pedida é dada por } P = \frac{{}^{11}C_2 + {}^{11}C_1 \times {}^6C_1}{{}^{17}C_2}$$

5. $A(2 \cos(\alpha); 2 \sin(\alpha))$, com $\cos(\alpha) > 0$ e $\sin(\alpha) > 0$

Assim,

$$\begin{aligned} \overline{OB} &= 2 \cos(\alpha) \\ \overline{BC} &= 2 \cos(\alpha) \\ \overline{OA} &= \overline{AC} = 2 \end{aligned}$$

Portanto, o perímetro do triângulo $[OAC]$, é dada, em função de α , por $f(\alpha) = \overline{OA} + \overline{AC} + \overline{OC} = 2 + 2 + 4 \cos(\alpha) = 4 + 4 \cos(\alpha)$, com $\alpha \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

Resposta:(A)

6. Determinação do ponto A

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -3^x + 9 = 0 \Leftrightarrow 3^x = 9 \Leftrightarrow 3^x = 3^2 \Leftrightarrow x = 2$$

Logo, $A(2; 0)$

Determinação do ponto B

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow -3^{-x-1} + 9 = 0 \Leftrightarrow 3^{-x-1} = 9 \Leftrightarrow 3^{-x+1} = 3^2 \Leftrightarrow -x - 1 = 2 \Leftrightarrow x = -3$$

Logo, $B(-3; 0)$

Determinação do ponto C

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -3^x + 9 = -3^{-x-1} + 9 \Leftrightarrow 3^x + 9 = 3^{-x-1} \Leftrightarrow x = -x - 1 \Leftrightarrow -2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -3^{-\frac{1}{2}} + 9 = -\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} + 9 = -\frac{1}{\sqrt{3}} + 9 = -\frac{\sqrt{3}}{3} + 9 = \frac{27 - \sqrt{3}}{3}$$

Logo, $C\left(-\frac{1}{2}; \frac{27 - \sqrt{3}}{3}\right)$

Assim,

$$\text{Medida da base do triângulo: } \overline{AB} = |2 - (-3)| = 5$$

$$\text{Medida da altura do triângulo: } |\text{ordenada de } C| = \frac{27 - \sqrt{3}}{3}$$

Portanto a área do triângulo é igual a

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times |\text{ordenada de } C|}{2} = \frac{5 \times \frac{27 - \sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{135 - 5\sqrt{3}}{6} \text{ u.a.}$$

7. .

7.1. A reta r é da forma $y = mx + b$, $m, b \in \mathbb{R}$

Ora,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{\frac{x}{2}} - \frac{x}{2e}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{x} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x}{2e}}{x} = \frac{e^{-\infty}}{-\infty} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2e} = 0 - \frac{1}{2e} = -\frac{1}{2e}$$

$$\text{Logo, } m = -\frac{1}{2e}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) - \left(-\frac{1}{2e}x\right) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^{\frac{x}{2}} - \frac{x}{2e} + \frac{x}{2e} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^{\frac{x}{2}} \right) = e^{-\infty} = 0$$

Logo, $b = 0$

Portanto, a equação reduzida da reta r é $y = -\frac{1}{2e}x$

7.2. .

O ponto A tem coordenadas $(0; f(0))$, ou seja

$A(0; 1)$

O ponto B tem coordenadas $(0; 2e)$, ou seja

$B(0; 2e)$

Determinemos as coordenadas do ponto C

Inserir as funções $y_1 = e^{\frac{x}{2}} - \frac{x}{2e}$ e $y_2 = 2e$

Ajustar a janela de visualização: $[-1; 6] \times [-1; 8]$

Desenhar os gráficos e o triângulo $[ABC]$

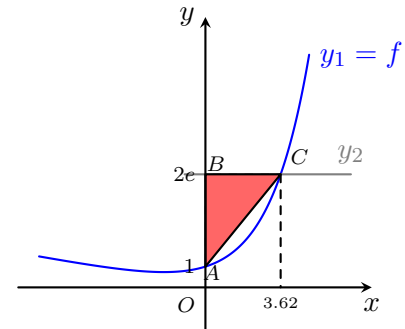


Figura 1

Procurar as coordenadas do ponto de interseção dos dois gráficos que tem abscissa positiva

O ponto C tem coordenadas $(3.62, 2e)$

Calcular a área do triângulo $[ABC]$

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{BC}}{2} \approx \frac{(2e - 1) \times 3.62}{2}$$

Ou seja, $A_{[ABC]} \approx 8.03$ u.a.

7.3. A função primeira derivada é

$$f'(x) = \left(e^{\frac{x}{2}} - \frac{x}{2e} \right)' = \frac{1}{2} \times e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{2e} = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{2e}$$

A função segunda derivada é

$$f''(x) = \left(\frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{2e} \right)' = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times e^{\frac{x}{2}} - 0 = \frac{1}{4} e^{\frac{x}{2}}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} f'(a) - f''(a) + \frac{1}{4e} &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} e^{\frac{a}{2}} - \frac{1}{2e} \right) - \frac{1}{4} e^{\frac{a}{2}} + \frac{1}{4e} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} e^{\frac{a}{2}} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2e} - \frac{1}{4} e^{\frac{a}{2}} + \frac{1}{4e} = \\ &= \frac{1}{4} e^{\frac{a}{2}} - \frac{1}{4e} - \frac{1}{4} e^{\frac{a}{2}} + \frac{1}{4e} = 0 \end{aligned}$$

8. A condição na variável complexa que define o conjunto representado é

$$1 < |z| < 2 \wedge 0 < \text{Arg}(z) < \frac{\pi}{4}$$

Resposta: (A)

CADERNO 2

9. .

9.1. P2001/2002

Seja X a variável aleatória de valor médio 50 e valor de desvio-padrão 4

Ora,

Sabemos que:

$$P(46 < X < 50) = P(50 < X < 54)$$

e

$$P(42 < X < 46) = P(54 < X < 58)$$

Então, tem-se que, $P(X > 55) > P(X < 40)$

Logo, $P(B) > P(A)$

Resposta: (B)

9.2. PMC2015

Seja $x = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$, com $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Assim, pretendemos determinar o valor de $\cos(x)$

De $x = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$, resulta, $\sin(x) = \frac{1}{3}$

De $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, vem,

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{9} + \cos^2(x) = 1 \Leftrightarrow \cos^2(x) = 1 - \frac{1}{9} \Leftrightarrow \cos^2(x) = \frac{8}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(x) = \pm\sqrt{\frac{8}{9}} \Leftrightarrow \cos(x) = \pm\frac{\sqrt{8}}{3} \Leftrightarrow \cos(x) = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3},$$

como $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, tem-se que $\cos(x) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Logo, $\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Resposta: (D)

10. .

10.1. $z_1 = -2 + 2i^{41} = -2 + 2i^{4 \times 10 + 1} = -2 + 2i$

e

$$z_2 = \frac{\sqrt{2}}{e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}} = \frac{\sqrt{2}e^{i(0)}}{e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}} = \sqrt{2}e^{i\left(0+\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \times \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \sqrt{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 1 + i$$

Então,

$$a\overline{z_1} - i(z_2)^2 = \frac{b}{i^3} \Leftrightarrow a \times \overline{-2 + 2i} - i(1+i)^2 = \frac{b}{-i} \Leftrightarrow a \times (-2 - 2i) - i(1+2i+i^2) = \frac{bi}{(-i) \times i} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2a - 2ai - i(1+2i-1) = \frac{bi}{1} \Leftrightarrow -2a - 2ai - 2i^2 = bi \Leftrightarrow -2a - 2ai + 2 = bi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2a + 2 - 2ai = bi \Leftrightarrow -2a + 2 = 0 \wedge -2a = b \Leftrightarrow -2a = -2 \wedge -2a = b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = 1 \wedge -2a = b \Leftrightarrow a = 1 \wedge b = -2$$

10.2. $z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

Então,

$$(z_2)^n = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n = (\sqrt{2})^n e^{i\frac{n\pi}{4}}$$

Para que $(z_2)^n$ seja um número real positivo, deverá ter-se, $\frac{n\pi}{4} = 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{n\pi}{4} = 2k\pi \Leftrightarrow n\pi = 8k\pi \Leftrightarrow n = 8k, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Como $n \in \mathbb{N}$, então, k tem de pertencer a \mathbb{Z}^+

Assim,

para $k = 1$, vem $n = 8$

para $k = 2$, vem $n = 16$

para $k = 3$, vem $n = 24$

⋮

Portanto, o menor valor de $n \in \mathbb{N}$, para o qual $(z_2)^n$ é um número real positivo é 8

11. .

11.1. Pretende-se resolver a equação $f(t) = 40$

$$f(t) = 40 \Leftrightarrow 15 + 65e^{-0.02t} = 40 \Leftrightarrow 65e^{-0.02t} = 40 - 15 \Leftrightarrow 65e^{-0.02t} = 25 \Leftrightarrow e^{-0.02t} = \frac{25}{65} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-0.02t} = \frac{5}{13} \Leftrightarrow -0.02t = \ln\left(\frac{5}{13}\right) \Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{5}{13}\right)}{-0.02} \Leftrightarrow t \approx 47.8$$

O Rodrigo vai ter de esperar, aproximadamente, 47.8 minutos, para ir para a cama

11.2. Determinemos $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (15 + 65e^{-0.02t}) = 15 + 65e^{-\infty} = 15 + \frac{65}{e^{+\infty}} = 15 + \frac{65}{+\infty} = 15 + 0 = 15$$

A temperatura ambiente do quarto é de $15^\circ C$

12. Um vetor normal do plano α de equação $2k^2x + 2y - 2z - 1 = 0$ é $\vec{\alpha} = (2k^2; 2; -2)$ e um vetor normal do plano β de equação $2x + 4z - 3 = 0$ é $\vec{\beta} = (2; 0; 4)$

Os planos α e β são perpendiculares, se, e só se, $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$

Assim,

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow (2k^2; 2; -2) \cdot (2; 0; 4) = 0 \Leftrightarrow 2k^2 \times 2 + 2 \times 0 - 2 \times 4 = 0 \Leftrightarrow 4k^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4k^2 = 8 \Leftrightarrow k^2 = 2 \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{2} \Leftrightarrow k = -\sqrt{2} \vee k = \sqrt{2}$$

Resposta: (A)

$$13. (\sqrt{x} + \sqrt{y})^{10} = \sum_{k=0}^{10} [{}^{10}C_k (\sqrt{x})^{10-k} (\sqrt{y})^k] = \sum_{k=0}^{10} \left[{}^{10}C_k \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{10-k} \left(y^{\frac{1}{2}}\right)^k \right] = \sum_{k=0}^{10} \left[{}^{10}C_k x^{5-\frac{k}{2}} y^{\frac{k}{2}} \right]$$

Como há um termo da forma ax^3y^2 , então, deverá ter-se $5 - \frac{k}{2} = 3 \wedge \frac{k}{2} = 2$

$$5 - \frac{k}{2} = 3 \wedge \frac{k}{2} = 2 \Leftrightarrow 10 - k = 6 \wedge k = 4 \Leftrightarrow 6 = 6 \wedge k = 4$$

Logo, $k = 4 \in \mathbb{N}$

Portanto, o coeficiente deste termo é $a = {}^{10}C_4$

Resposta: (B)

14. .

14.1. O domínio da função f é $D_f =]-1; +\infty[$

Determinemos a função derivada de f

$$f'(x) = (\ln(x+1) + x)' = \frac{(x+1)'}{x+1} + 1 = \frac{1}{x+1} + 1 = \frac{x+2}{x+1}, \text{ com } x \in]-1; +\infty[$$

Zeros de f'

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x+2 = 0 \wedge x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x = -2 \wedge x \neq -1$$

como $x \in]-1; +\infty[$, tem-se que f' não tem zeros

Sinal de f'

$$f'(x) = \frac{x+2}{x+1} > 0, \forall x \in]-1; +\infty[$$

logo, a função f é estritamente crescente em todo o seu domínio

14.2. $m_r = f'(e-1) = \frac{e-1+2}{e-1+1} = \frac{e+1}{e} \rightarrow$ declive da reta r

Determinemos as coordenadas do ponto I

$$f(e-1) = \ln(e-1+1) + e-1 = \ln(e) + e-1 = 1 + e-1 = e$$

Logo, $I(e-1; e)$

A equação da reta tangente r é da forma $y = \frac{e+1}{e}x + b, b \in \mathbb{R}$

Determinemos o valor de b tendo em conta que a reta passa no ponto I

Então,

$$e = \frac{e+1}{e} \times (e-1) + b \Leftrightarrow e = \frac{(e+1)(e-1)}{e} + b \Leftrightarrow e = \frac{e^2-1}{e} + b \Leftrightarrow b = e - \frac{e^2-1}{e} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{e^2 - e^2 + 1}{e} \Leftrightarrow b = \frac{1}{e}$$

Concluindo, tem-se que a equação da reta tangente r é $y = \frac{e+1}{e}x + \frac{1}{e}$

Resposta: (C)

14.3. $f(x-1) = \ln(x-1+1) + x-1 = \ln(x) + x-1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^x + 2}{2} \times \frac{1}{(f(x-1) - x + 1)} \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^x + 2}{2} \times \frac{1}{\ln(x) + x - 1 - x + 1} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^x + 2}{2} \times \frac{1}{\ln(x)} \right] = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 2}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(x)} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} + \frac{2}{x} \right) \times \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}} = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} \right) \times \frac{1}{0^+} = \\ &= \frac{1}{2} (+\infty + 0) \times (+\infty) = +\infty \end{aligned}$$

15. $\lim(a_n) = \frac{1}{e^{k+1}} \Leftrightarrow \lim \left(\frac{2n+3}{2n-2} \right)^n = \frac{1}{e^{k+1}} \Leftrightarrow \lim \left(\frac{2n \left(1 + \frac{3}{2n} \right)}{2n \left(1 - \frac{2}{2n} \right)} \right)^n = \frac{1}{e^{k+1}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\lim \left(1 + \frac{3}{2n} \right)^n}{\lim \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{1}{e^{k+1}} \Leftrightarrow \frac{\lim \left(1 + \frac{3}{2n} \right)^n}{\lim \left(1 + \frac{-1}{n} \right)^n} = \frac{1}{e^{k+1}} \Leftrightarrow \frac{e^{\frac{3}{2}}}{e^{-1}} = \frac{1}{e^{k+1}} \Leftrightarrow e^{\frac{3}{2}+1} = e^{-k-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{5}{2}} = e^{-k-1} \Leftrightarrow -k-1 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow k = -1 - \frac{5}{2} \Leftrightarrow k = -\frac{7}{2}$$

16. $\frac{\pi}{2} \in D_h$ e é ponto aderente de D_h

A função h é contínua em $x = \frac{\pi}{2}$, se existir $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} h(x)$, ou seja, se $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} h(x) = h\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} h(x) = h\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Ora,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} h(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1 - e^{x-\frac{\pi}{2}}}{(\pi - 2x) \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} \stackrel{(0/0)}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{e^{x-\frac{\pi}{2}} - 1}{2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} \times \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} = \\ &= \frac{1}{2} \times \lim_{x - \frac{\pi}{2} \rightarrow 0^-} \frac{e^{x-\frac{\pi}{2}} - 1}{x - \frac{\pi}{2}} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Utilizou-se o limite notável $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} h(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \left[\ln\left(e^{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} + 1 - e\right) - \frac{2k}{3} \right] = \ln(e + 1 - e) - \frac{2k}{3} = \ln(1) - \frac{2k}{3} = \\ &= 0 - \frac{2k}{3} = -\frac{2k}{3} \end{aligned}$$

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Para que a função h seja contínua em $x = \frac{\pi}{2}$ deverá ter-se

$$-\frac{2k}{3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2k = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow k = -\frac{3}{4}$$