Escola Secundária de Penafiel

Exame Modelo III de Matemática A

Duração do Exame: 150 **minutos +** 30 **minutos de tolerância** | **junho de 2018**

Caderno 1 (75 minutos + 15min) + Caderno 2 (75 minutos + 15min)

12.º Ano de Escolaridade | Turma - G - K

Caderno 1

- **Duração:** 75 **minutos +** 15 **minutos de tolerância**
- **É permitido o uso de calculadora gráfica**

Indica de forma legível a versão da prova. A prova é constituída por dois cadernos (Caderno 1 e Caderno 2). Utiliza apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta. Só é permitido o uso de calculadora no Caderno 1. Não é permitido o uso de corretor. Risca o que pretendes que não seja classificado. Para cada resposta identifica o item. Apresenta as tuas respostas de forma legível. Apresenta apenas uma resposta para cada item. A prova apresenta um formulário no Caderno 1. As cotações dos itens de cada Caderno encontram-se no final de cada Caderno.

Na resposta aos itens de seleção (escolha múltipla), seleciona a resposta correta. Escreve na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação apresenta sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr *(α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)*

área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ *(α- amplitude, em radianos, do ângulo ao centro, r - raio)*

área lateral de um cone: $\pi r g$ *(r - raio da base, g - geratriz)*

área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ *(r - raio)*

Volume da pirâmide: $\frac{1}{3}\times$ *área da base* $\times$ *Altura*

Volume do cone: $\frac{1}{3}\times$ *área da base* $\times$ *Altura*

Volume da esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ *(r - raio)*

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2}\times n$

Progressão geométrica: $u_1\times\frac{1-r^n}{1-r}$, $r\neq 1$

Trigonometria

$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$

$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

Lei dos senos

$\frac{\sin\hat{A}}{a}=\frac{\sin\hat{B}}{b}=\frac{\sin\hat{C}}{c}$

Lei dos cossenos ou Teorema de Carnot

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$

Complexos

$(|z|cis\theta)^n=|z|^n cis(n\theta)$ ou $(|z|e^{i\theta})^n=|z|^n e^{i(n\theta)}$

$\sqrt[n]{|z|cis\theta}=\sqrt[n]{|z|}cis\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$ ou

$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$, $k\in\{0;1;2;...;n-1\}$ e $n\in\mathbb{N}$

Probabilidades

$\mu=p_1x_1+\cdots+p_nx_n$

$\sigma=\sqrt{p_1(x_1-\mu)^2+\cdots+p_n(x_n-\mu)^2}$

Se $X\sim N(\mu,\sigma)$, então:

$P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)\approx 0.6827$

$P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)\approx 0.9545$

$P(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma)\approx 0.9973$

Regras de derivação

$(u+v)'=u'+v'$

$(uv)'=u'v+uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$(u^n)'=nu^{n-1}u' \quad (n\in\mathbb{R})$

$(\sin u)'=u'\cos u$

$(\cos u)'=-u'\sin u$

$(\tan u)'=\frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)'=u'e^u$

$(a^u)'=u'a^u\ln a \quad (a\in\mathbb{R}^+\backslash\{1\})$

$(\ln u)'=\frac{u'}{u}$

$(\log_a u)'=\frac{u'}{u\ln a} \quad (a\in\mathbb{R}^+\backslash\{1\})$

Limites notáveis

$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e \quad (n\in\mathbb{N})$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^p}=+\infty \quad (p\in\mathbb{R})$

1. .

1.1	1.2
P2001/2002	PMC2015

1.1. Sabe-se que 7% dos pregos produzidos por uma máquina são defeituosos
Os pregos são comercializados em caixas de 500 pregos
Calcula a probabilidade de, numa caixa, existirem exatamente dez pregos defeituosos

Numa das opções está, em notação científica, o valor aproximado desta probabilidade

Em qual delas?

(A) 2.5×10^{-6}
(B) 2.5×10^{-8}
(C) 2.6×10^{-7}
(D) 2.5×10^{-7}

1.2. Em qual das opções está o valor de $\lim \sqrt[n]{11^n + 12^n + 13^n}$?
(A) 11
(B) 12
(C) 13
(D) 14

2. Num saco há dez cartões, sendo seis azuis e quatro vermelhos

Extraem-se do saco três cartões, sucessivamente e sem reposição
Qual é a probabilidade de dois e só dois cartões terem a cor azul?
Numa das opções está o valor dessa probabilidade
Em qual delas?

(A) 20%
(B) 30%
(C) 40%
(D) 50%

3. Seja $(E, P(E), P)$ um espaço de probabilidade
Sejam A e B dois acontecimentos possíveis de $P(E)$

Sabe-se que:

$P(A) = 0.2$, $P(A \cap \overline{B}) = 0.1$ e $P(A \cup B) = p$, com $p > 0$

Determina o valor de p, de modo que $P(B \mid \overline{A}) = \dfrac{3}{8}$

4. Numa caixa há dezassete bolas, sendo oito azuis, numeradas com o número dois, quatro vermelhas, numeradas com o número três, três brancas, numeradas com o número quatro e duas pretas, numeradas com o número um

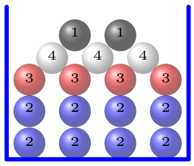

Figura 1

Retiram-se, de uma só vez, duas bolas da caixa e multiplicam-se os números das bolas

Qual é a probabilidade de o produto das duas bolas ser um número par?

Uma resposta a esta questão é dada por $P = \dfrac{{}^{11}C_2 + {}^{11}C_1 \times {}^{6}C_1}{{}^{17}C_2}$

Numa pequena composição, justifica esta resposta

Nota:

Na tua resposta deves:

- indicar e explicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis
- fazer uma referência à Lei de Laplace

5. Na figura 2 estão representados em referencial ortonormado xOy:

- uma circunferência de raio 2
- o raio $[OA]$ da circunferência
- um triângulo $[OAC]$

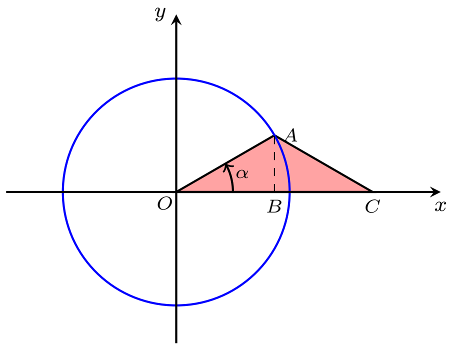

Figura 2

Tal como a figura sugere, o ponto A pertence ao primeiro quadrante, o ponto B pertence ao eixo Ox, e o ângulo de amplitude α assinalado na figura, tem por lado origem o semieixo positivo Ox e lado extremidade a semirreta $\dot{O}A$,com $x \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$

Admite que um ponto C se encontra no semieixo positivo Ox, de tal modo que se tem sempre $\overline{OA} = \overline{AC}$

Em qual das opções está a expressão que dá, em função de α, o perímetro do triângulo $[OAC]$?

(A) $4 + 4\cos(\alpha)$

(B) $2 + 2\cos(\alpha)$

(C) $2 + 2\sin(\alpha)$

(D) $4 + 4\sin(\alpha)$

6. Considera as funções f e g, reais de variável real, definidas em $\mathbb{R}$, respetivamente, por: $f(x) = -3^x + 9$ e $g(x) = -3^{-x-1} + 9$
No referencial cartesiano xOy da figura 3, estão representados partes dos gráficos das duas funções e um triângulo $[ABC]$

Mostra que o valor da área do triângulo $[ABC]$ é igual a
$A_{[ABC]} = \dfrac{135 - 5\sqrt{3}}{6}$ $u.a.$

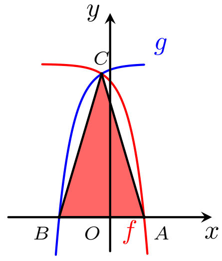

Figura 3

7. Seja a função f, real de variável real, definida em $\mathbb{R}$, por $f(x) = e^{\frac{x}{2}} - \dfrac{x}{2e}$
No referencial ortonormado da figura 4, está representado parte do gráfico da função f, uma reta r e um triângulo $[ABC]$

Sabe-se que:

- a reta r, é assíntota ao gráfico de f, quando $x \to -\infty$
- o ponto B pertence ao eixo das ordenadas e tem ordenada $2e$
- o ponto A é o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo Oy
- o ponto C é o ponto do gráfico de f de abcissa positiva que tem a mesma ordenada do ponto B

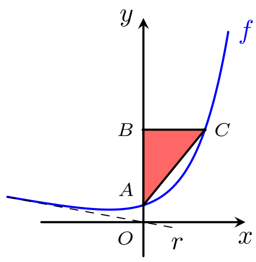

Figura 4

7.1. Escreve a equação reduzida da reta r

7.2. Recorrendo às potencialidades da calculadora gráfica, determina um valor arredondado às centésimas da área do triângulo $[ABC]$
Nota: Na tua resposta deves reproduzir o gráfico visualizado na calculadora, devidamente identificado, desenhar o triângulo $[ABC]$, e assinalar os pontos notáveis, com as cooordenadas arredondadas às centésimas (se houver necessidade)

7.3. Sabe-se que a função f é duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$
Mostra que, sendo $a \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{2}f'(a) - f''(a) + \dfrac{1}{4e} = 0$

8. Seja $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos

Em qual das opções pode estar a condição na variável complexa que define o conjunto de pontos representado?

(A) $1 < |z| < 2 \wedge 0 < Arg(z) < \dfrac{\pi}{4}$

(B) $1 \leq |z| \leq 2 \wedge 0 < Arg(z) < \dfrac{\pi}{4}$

(C) $1 < |z| < 2 \wedge 0 \leq Arg(z) \leq \dfrac{\pi}{4}$

(D) $1 \leq |z| \leq 2 \wedge 0 \leq Arg(z) \leq \dfrac{\pi}{4}$

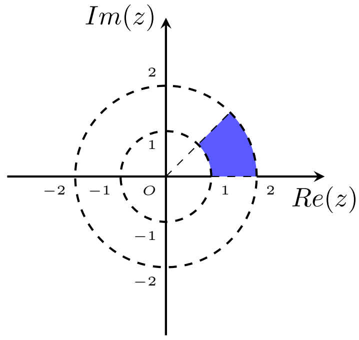

Figura 5

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES

1.			
		....	5 pontos
2.			
		....	5 pontos
3.			
		....	10 pontos
4.			
		....	10 pontos
5.			
		....	10 pontos
6.			
		....	15 pontos
7.			
	7.1	....	15 pontos
	7.2	....	15 pontos
	7.3	....	10 pontos
8.			
		....	5 pontos
		TOTAL	**100 pontos**

PÁGINA EM BRANCO

Caderno 2

- **Duração:** 75 **minutos** $+$ 15 **minutos de tolerância**
- **Neste Caderno não é permitida a utilização de calculadora**

9. .

9.1	9.2
P2001/2002	PMC2015

9.1. Admite que a variável peso, expressa em gramas, das laranjas de um pomar é bem modelada por uma distribuição normal $N(50;4)$, em que 50 é o valor médio e 4 é o valor do desvio-padrão da distribuição
Retira-se, ao acaso, uma dessas laranjas
Considera os acontecimentos
A :"o peso da laranja retirada é inferior a 40 gramas"
B :"o peso da laranja retirada é superior a 55 gramas"

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) $P(A)+P(B)=1$
(B) $P(A)<P(B)$
(C) $P(A)=P(B)$
(D) $P(A)>P(B)$

9.2. Em qual das opções está o valor exato de $\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right)$

(A) $\frac{2\sqrt{2}}{9}$
(B) $-\frac{2\sqrt{2}}{9}$
(C) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$
(D) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

10. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considera os números complexos, $z_1=-2+2i^{41}$ e $z_2=\frac{\sqrt{2}}{e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}}$

10.1. Determina os números reais a e b, de modo que $a\overline{z_1}-i(z_2)^2=\frac{b}{i^3}$

10.2. Escreve o número complexo z_2 na forma trigonométrica e determina o menor valor de $n\in\mathbb{N}$, para o qual $(z_2)^n$ é um número real positivo

11. O Rodrigo está a aquecer água para colocar no saco de água quente. Depois de aquecer a água vai encher o saco de água quente e colocá-lo na cama
A temperatura da água, t minutos após se ter enchido o saco de água quente, é bem modelada pela função $f(t)=15+65e^{-0.02t}$

11.1. O Rodrigo, por questões de segurança, só vai para a cama quando a temperatura da água que se encontra no saco de água quente é de $40°C$. Quanto tempo vai ter de esperar para ir para a cama? Apresenta a resposta em minutos, arredondados às décimas

11.2. Sabe-se que, com o passar do tempo, a temperatura da água que se encontra no saco de água quente tende a ficar à temperatura ambiente do quarto. Qual é a temperatura ambiente do quarto?

12. Considera, num referencial o.n. $Oxyz$, os planos de equações $\alpha : 2k^2x + 2y - 2z - 1 = 0$, com $k \in \mathbb{R}$ e $\beta : 2x + 4z - 3 = 0$

Os dois planos α e β são perpendiculares se e somente se,

(A) $k \in \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$
(B) $k \in \{-2; 2\}$
(C) $k \in \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$
(D) $k \in \{-1; 1\}$

13. Sejam $x \in \mathbb{R}^+$ e $y \in \mathbb{R}^+$
No desenvolvimento de $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^{10}$ há um termo da forma ax^3y^2, com $a \in \mathbb{N}$

Em qual das opções está o seu coeficiente a?

(A) $^{10}C_2$
(B) $^{10}C_4$
(C) $^{10}C_6$
(D) $^{10}C_8$

14. Seja f, a função real de variável real, definida em $]-1; +\infty[$, por $f(x) = \ln(x+1) + x$
Na afigura 6, está representado parte do gráfico da função f e uma reta r, tangente ao gráfico no ponto I, de abcissa $e - 1$

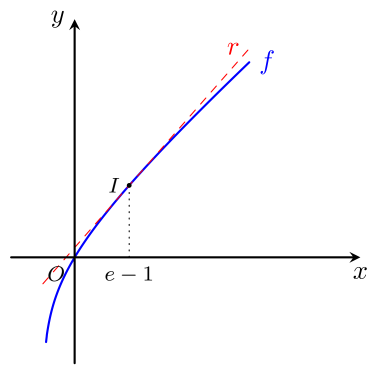

Figura 6

14.1. Mostra, analiticamente, que a função f é estritamente crescente em todo o seu domínio

14.2. Em qual das opções está a equação reduzida da reta r?

(A) $y = \frac{e-1}{e}x + \frac{1}{e}$
(B) $y = \frac{e+1}{e}x - \frac{1}{e}$
(C) $y = \frac{e+1}{e}x + \frac{1}{e}$
(D) $y = \frac{e+1}{e}x + \frac{2}{e}$

14.3. Determina $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x + 2}{2} \times \frac{1}{(f(x-1) - x + 1)}$

15. Seja (a_n) a sucessão de números reais definida por $a_n = \left(\frac{2n+3}{2n-2}\right)^n$

    Determina o número real k de modo que $\lim(a_n) = \frac{1}{e^{k+1}}$

16. Seja $k \in \mathbb{R}$ e h, a função definida por

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - e^{x-\frac{\pi}{2}}}{(\pi - 2x)\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} & se \quad x < \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{1}{2} & se \quad x = \dfrac{\pi}{2} \\ \ln\left(e^{\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} + 1 - e\right) - \dfrac{2k}{3} & se \quad x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

    Determina o valor de k para o qual a função h é contínua no ponto $x = \frac{\pi}{2}$

FIM DO CADERNO 2

COTAÇÕES

9.			
		....	5 pontos
10.			
	10.1	....	10 pontos
	10.2	....	10 pontos
11.			
	11.1	....	10 pontos
	11.2	....	10 pontos
12.			
		....	5 pontos
13.			
		....	5 pontos
14.			
	14.1	....	5 pontos
	14.2	....	10 pontos
	14.3	....	10 pontos
15.			
		....	10 pontos
16.			
		....	10 pontos
		TOTAL	**100 pontos**

PÁGINA EM BRANCO