Escola Secundária de Penafiel

Exame Modelo II de Matemática A

Duração do Exame: 150 **minutos** + 30 **minutos de tolerância** | **junho de 2018**

Caderno 1 (75 minutos + 15min) + Caderno 2 (75 minutos + 15min)

12.º Ano de Escolaridade | Turma - G - K

Caderno 1

- **Duração:** 75 **minutos** + 15 **minutos de tolerância**
- **É permitido o uso de calculadora gráfica**

Indica de forma legível a versão da prova. A prova é constituída por dois cadernos (Caderno 1 e Caderno 2). Utiliza apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta. Só é permitido o uso de calculadora no Caderno 1. Não é permitido o uso de corretor. Risca o que pretendes que não seja classificado. Para cada resposta identifica o item. Apresenta as tuas respostas de forma legível. Apresenta apenas uma resposta para cada item. A prova apresenta um formulário no Caderno 1. As cotações dos itens de cada Caderno encontram-se no final de cada Caderno.

Na resposta aos itens de seleção (escolha múltipla), seleciona a resposta correta. Escreve na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação apresenta sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr *(α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)*

área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ *(α- amplitude, em radianos, do ângulo ao centro, r - raio)*

área lateral de um cone: $\pi r g$ *(r - raio da base, g - geratriz)*

área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ *(r - raio)*

Volume da pirâmide: $\frac{1}{3}\times$ *área da base* $\times$ *Altura*

Volume do cone: $\frac{1}{3}\times$ *área da base* $\times$ *Altura*

Volume da esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ *(r - raio)*

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$, $r \neq 1$

Trigonometria

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Lei dos senos

$\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c}$

Lei dos cossenos ou Teorema de Carnot

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos \hat{A}$

Complexos

$(|z| cis\theta)^n = |z|^n cis(n\theta)$ ou $(|z|e^{i\theta})^n = |z|^n e^{i(n\theta)}$

$\sqrt[n]{|z| cis\theta} = \sqrt[n]{|z|} cis\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$, $k \in \{0; 1; 2; ...; n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1(x_1 - \mu)^2 + \cdots + p_n(x_n - \mu)^2}$

Se $X \sim N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0.6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'e^u$

$(a^u)' = u'a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. .

1.1	1.2
P2001/2002	PMC2015

1.1. A tabela de distribuição de probabilidade de uma variável aleatória X é a que se segue

x_i	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Em qual das opções está o valor de k?

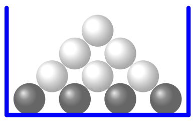
(A) $\frac{1}{4}$
(B) $\frac{9}{10}$
(C) $\frac{1}{5}$
(D) $\frac{1}{10}$

1.2. Um ponto P desloca-se numa reta numérica durante um intervalo de tempo I, de tal forma que a respetiva abcissa é dada por $x(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{4}\right)$, com $t \in I$

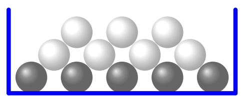
Em qual das opções está a frequência deste oscilador?

(A) 16
(B) $\frac{1}{16}$
(C) $\frac{1}{8}$
(D) 8

2. Considera duas caixas, A e B. Na caixa A estão quatro bolas pretas e seis bolas brancas, e na caixa B estão cinco bolas pretas e sete bolas brancas



Caixa A



Caixa B

Considera a experiência que consiste em retirar duas bolas da caixa A e coloca-las na caixa B e, seguidamente, retirar, sucessivamente e sem reposição, duas bolas da caixa B e observar a sua cor

Sejam X e Y os acontecimentos:

X : "as bolas retiradas da caixa A são da mesma cor"
Y : "as bolas retiradas da caixa B têm cores diferentes"

Qual é o valor de $P(\overline{Y} \mid \overline{X})$?

(A) $\frac{43}{91}$
(B) $\frac{48}{91}$
(C) $\frac{12}{49}$
(D) $\frac{25}{49}$

3. No referencial ortonormado $Oxyz$, da figura 1 está representado um cubo $[ABCDEFGH]$ e um octaedro $[TPQRSU]$

Sabe-se que:

- a origem O do referencial situa-se no centro do cubo
- P, Q, R, S, T, U, são centros das faces do cubo
- os pontos P e R pertencem ao eixo Ox ; os pontos Q e S pertencem ao eixo Oy ; os pontos U e T pertencem ao eixo Oz ;
- a área da superfície do cubo é 96 $u.a.$
- uma equação vetorial da reta SU é $(x; y; z) = (0; -2; 0) + k(0; -4; -4), k \in \mathbb{R}$

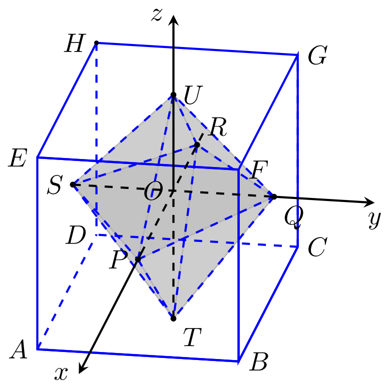


Figura 1

3.1. Considera todos os conjuntos que são constituídos por cinco dos catorze pontos assinalados no sólido. Quantos destes conjuntos são constituídos apenas por vértices do cubo ou vértices do octaedro?

3.2. Pretende-se numerar as faces do octaedro com números iguais ao do conjunto $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$, de modo que em cada face fique apenas um número, não haja faces numeradas com o mesmo número e que na pirâmide $[PQRST]$ (ou na pirâmide $[PQRSU]$) só sejam utilizados números pares e na outra pirâmide $[PQRSU]$ (ou na pirâmide $[PQRST]$) só sejam utilizados números ímpares. De quantas maneiras se podem numerar as faces do octaedro?

3.3. Escreve a equação do plano perpendicular à reta SU e que contém o ponto Q

4. No desenvolvimento de $\left(x + \frac{1}{x}\right)^8$, com $x \neq 0$, há um termo da forma ax^2

   Determina o valor de a

5. Na figura 2 estão representados em referencial ortonormado xOy:

- uma circunferência de raio 3
- o raio $[OA]$ da circunferência
- um paralelogramo $[ABCO]$

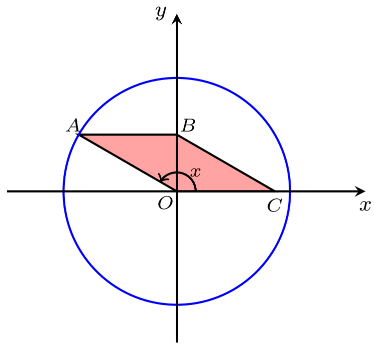


Figura 2

Sabe-se que:

- o ponto C pertence ao eixo Ox e tem abcissa simétrica da abcissa do ponto A
- os pontos B e C acompanham o movimento do ponto A

Tal como a figura sugere, o ponto A pertence ao segundo quadrante, o ponto B pertence ao eixo Oy, e tem a mesma ordenada do ponto A, e o ângulo de amplitude x assinalado na figura, tem por lado origem o semieixo positivo Ox e lado extremidade a semirreta $\dot{O}A$,com $x \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$

5.1. Mostra que a área do paralelogramo $[ABCO]$, é dada, em função de x, por $f(x) = -\frac{9}{2}\sin(2x)$, com $x \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$

5.2. Para um certo valor de $x \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$, sabe-se que $\tan(x) = -\frac{\sqrt{7}}{5}$

Determina o valor exato da área do paralelogramo $[ABCO]$, para esse valor de x

5.3. Determina o valor de $x \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$, para o qual a área do paralelogramo $[ABCO]$ é máxima

6. Na figura 3 estão representados, num plano munido de um referencial ortonormado xOy, os gráficos das funções f, de domínio $[-2;2]$ e g, de domínio $[-1;1]$, definidas, respetivamente, por $f(x) = x^2 - 4$ e $g(x) = \sqrt{x^2+3}$.

Sabe-se que A é ponto do gráfico de g e tem abcissa -1

Considera a função d que associa a cada x a distância entre o ponto A e o ponto P do gráfico de f de abcissa x

Recorrendo às potencialidades da calculadora gráfica, determina as abcissas dos pontos do gráfico de f que distam quatro unidades do ponto A. Apresenta os valores arredondados às centésimas

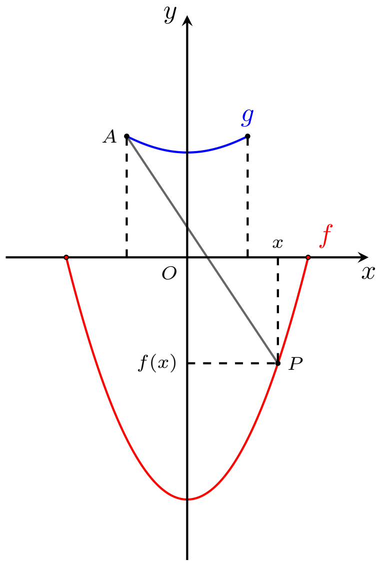


Figura 3

7. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considera os números complexos, $z_1 = 2+2i$ e $z_2 = 2i$
Considera a condição $|z+z_2| = |z - iz_2| \wedge |z+z_1| \leq 2$

No plano complexo, esta condição representa um segmento de reta

Em qual das opções pode estar o conjunto de pontos definido pela condição dada?

(A)

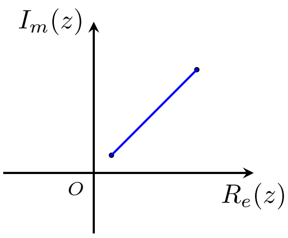


Figura 4

(B)

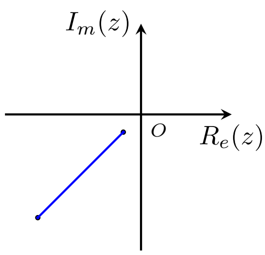


Figura 5

(C)

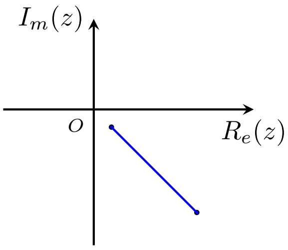


Figura 6

(D)

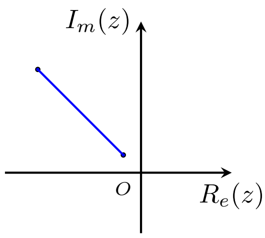


Figura 7

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES

1.		
	....	5 pontos
2.		
	....	5 pontos
3.		
	3.1	5 pontos
	3.2	10 pontos
	3.2	5 pontos
4.		
	....	10 pontos
5.		
	5.1	10 pontos
	5.2	15 pontos
	5.3	15 pontos
6.		
	....	15 pontos
7.		
	....	5 pontos

TOTAL .... **100 pontos**

PÁGINA EM BRANCO

Caderno 2

- **Duração:** 75 **minutos** + 15 **minutos de tolerância**
- **Neste Caderno não é permitida a utilização de calculadora**

8. .

8.1	8.2
P2001/2002	PMC2015

8.1. Seja X uma variável aleatória com distribuição normal de valor médio 6
Sabe-se que $P(6 < X < 10) = 0.4$

Qual é o valor de $P(X < 2)$?

(A) 0.1
(B) 0.2
(C) 0.3
(D) 0.4

8.2. Na figura 8 está representada a função f, definida por $f(x) = \frac{\pi}{4} + \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$

Sabe-se que:

- o domínio de f é $D_f = [a; b]$
- o contradomínio de f é $D'_f = [c; d]$

Os valores de a, b, c e d, são, respetivamente

(A) $-2;\ 2;\ -\frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}$

(B) $-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ -\frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}$

(C) $-1;\ 1;\ -\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{3}$

(D) $-2;\ 2;\ -\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{3}$

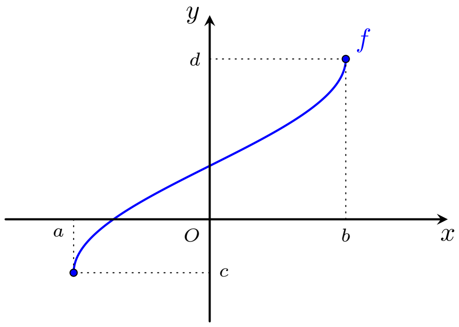


Figura 8

9. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considera os números complexos,
$z_1 = -1 + 3i^{91}$ e $z_2 = \sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \sqrt{2}i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

9.1. Mostra que o número complexo $\frac{z_1 + z_2}{2 + 2i}$ é um imaginário puro, e e escreve-o na forma trigonométrica

9.2. Resolve, em $\mathbb{C}$, a equação $z^4 - \overline{z_2}z = 0$

10. Sejam a e b dois números naturais

Seja $\quad 1 \quad a \quad 15 \quad b \cdots b \quad 15 \quad a \quad 1 \quad$ parte de uma linha do Triângulo de Pascal

Qual é o valor de b?

(A) 18

(B) 20

(C) 22

(D) 24

11. Na figura 9 encontra-se parte da representação gráfica da função f, definida em $\mathbb{R}$, por $f(x) = e^{-x+2} + 1$ e uma reta r tangente ao gráfico da função no ponto A de abcissa 2

Sabe-se que:

- o ponto B é o ponto de interseção da reta r com o eixo Oy
- o ponto C é o ponto de interseção da reta r com o eixo Ox

Em qual das opções está, em graus, a inclinação da reta r?

(A) 145° (B) 120° (C) 150° (D) 135°

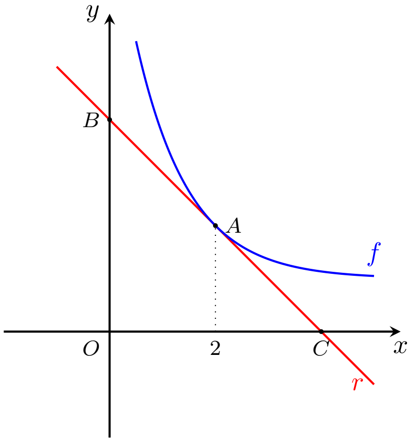


Figura 9

12. Considera a função g, real de variável real, definida em $]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$, e diferenciável em todos os pontos do seu domínio
Na figura 10 estão representados, em referencial ortonormado xOy, parte do gráfico da função g e de três retas r, s e t

Sabe-se que:

- as retas s e r, são, respetivamente, a assíntota vertical e a assíntota não vertical ao gráfico da função g
- $\lim\limits_{x \to -2^-} g(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to -2^+} g(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[g(x) + \frac{1}{4}x - \frac{3}{4} \right] = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[g(x) + \frac{1}{4}x - \frac{3}{4} \right] = 0$
- a reta t é tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa -1

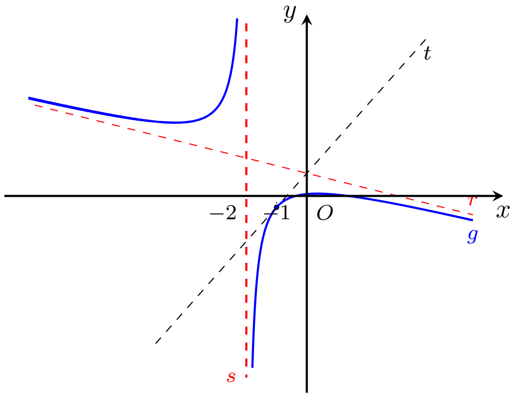


Figura 10

12.1. Sabendo que $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{xe^x + x^2e^x}{g(x) - g(-1)} = -\dfrac{8}{9e}$, determina $g'(-1)$ e o declive da reta t

12.2. Mostra que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 \ln(x) - x^2 g(x)}{x^3} = \dfrac{1}{4}$

13. Sejam a, b números reais positivos tais que $a \neq 1$ e $b \neq 1$
Sabe-se que $\log_a(ab) = 4$

Determina o valor de $\log_b \left(\dfrac{\sqrt[3]{b^3 a}}{a^2} \right)$?

14. Considera a função h, de domínio $\mathbb{R}$, e diferenciável em todos os pontos do seu domínio
Sabe-se que:

- $h(0) = 1$ e $h'(0) = -2$

Calcula o valor de $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{xh(x) - x}{xe^{x+2} - xe^2}$

15. Na figura 11, está representado, num referencial ortonormado xOy, parte do gráfico da função f, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2 + \dfrac{x}{e^{x^2} + e^x} & se \quad x < 0 \\ \ln\left(e^2\right) & se \quad x = 0 \\ -\dfrac{2\sin(-x)\cos(x)}{x} & se \quad x > 0 \end{cases}$$

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao gráfico de f e tem abcissa π
- a reta t é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa π

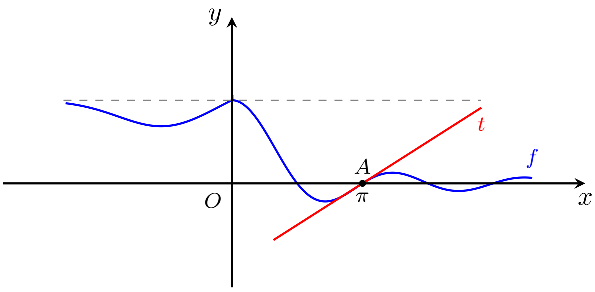


Figura 11

15.1. Mostra que a reta de equação $y = 2$, é assíntota ao gráfico de f, quando $x \to -\infty$

15.2. Escreve a equação reduzida da reta t, tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa π

15.3. Justifica, analiticamente, que a função f é contínua no ponto $x = 0$

16. Considera a função g, real de variável real, definida por $g(x) = \begin{cases} e^{\sin(x)} - \sin(x) & se \quad x \leq 0 \\ \dfrac{e^{x^2} - e^x}{x} & se \quad x > 0 \end{cases}$

Seja (v_n), a sucessão definida por $v_n = \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^n$, que se sabe ser monótona crescente, e seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = 1 - v_n$

Determina o valor de $\lim g(u_n)$

FIM DO CADERNO 2

COTAÇÕES

8.			
		....	5 pontos
9.			
	9.1	....	10 pontos
	9.2	....	10 pontos
10.			
		....	5 pontos
11.			
		....	5 pontos
12.			
	12.1	....	5 pontos
	12.2	....	5 pontos
13.			
		....	5 pontos
14.			
		....	5 pontos
15.			
	15.1	....	10 pontos
	15.2	....	10 pontos
	15.3	....	15 pontos
16.			
		....	10 pontos
		TOTAL	**100 pontos**

PÁGINA EM BRANCO