

---

**12.º Ano de Escolaridade | Turma G-K**

---

**CADERNO 1**

1. .

**1.1. P2001/2002**

Estamos perante de uma experiência aleatória Binomial  
Sabe-se que:

- a experiência repete-se oito vezes
- a probabilidade de sucesso é  $\frac{1}{2} \rightarrow$  (probabilidade de sair face euro num lançamento de uma moeda)
- a probabilidade de insucesso é  $\frac{1}{2} \rightarrow$  (probabilidade de não sair face euro num lançamento de uma moeda)

Pretende-se a probabilidade do acontecimento "A face euro sai exatamente cinco vezes"

Assim, tem-se que  $P = {}^8 C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = {}^8 C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^8$

**Resposta:(A)**

**1.2. PMC2015**

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 &\Leftrightarrow \frac{y^2}{16} = 1 - \frac{x^2}{25} \Leftrightarrow y^2 = 16 - \frac{16x^2}{25} \Leftrightarrow y^2 = \frac{16(25 - x^2)}{25} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{\frac{16(25 - x^2)}{25}} &\Leftrightarrow y = \pm \frac{4}{5} \sqrt{25 - x^2} \end{aligned}$$

Como o ponto  $P$  tem abcissa e ordenada positivas, tem-se que  $P\left(x; \frac{4}{5}\sqrt{25 - x^2}\right)$

Assim, a área do retângulo é dada por  $A(x) = 2x \times 2y = 2x \times 2 \times \frac{4}{5}\sqrt{25 - x^2} = \frac{16x}{5}\sqrt{25 - x^2}$

**Resposta:(A)**

$$2. g(2x) - f(x) > 0 \Leftrightarrow 2^{-\frac{2x}{2}+1} - 2^{x+1} > 0 \Leftrightarrow 2^{-x+1} > 2^{x+1} \Leftrightarrow -x+1 > x+1 \Leftrightarrow 0 > 2x \Leftrightarrow x < 0$$

Logo,  $C.S. = \mathbb{R}^-$

**Resposta:(C)**

$$\begin{aligned} 3. P(A | B) + P(\bar{A} | B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \\ &= \frac{P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1 \end{aligned}$$

**Resposta:(D)**

4. De  $P(\bar{A} | B) = \frac{1}{3}$ , vem que

$$\begin{aligned} P(\bar{A} | B) = \frac{1}{3} &\Leftrightarrow \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{P(B) - \frac{1}{5}}{P(B)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow P(B) - \frac{1}{5} = \frac{1}{3}P(B) \Leftrightarrow 3P(B) - \frac{3}{5} = P(B) \Leftrightarrow 3P(B) - P(B) = \frac{3}{5} \Leftrightarrow 2P(B) = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow P(B) = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

De  $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$ , vem,

$$\begin{aligned} P(A \cup B) = \frac{3}{5} &\Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{5} \Leftrightarrow P(A) + \frac{3}{10} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow P(A) = \frac{3}{5} - \frac{3}{10} + \frac{1}{5} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Portanto, } P(B | \bar{A}) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(\bar{A})} = \frac{\frac{3}{10} - \frac{1}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{5}$$

5. .

**5.1.** Para definir um plano são necessários três pontos não colineares. Como no sólido não há três pontos (vértices) colineares, tem-se que o número de casos possíveis é dado por  ${}^8C_3$ , pois dos oito vértices do sólido tenho de escolher três. Quanto ao número de casos favoráveis: Pretende-se que o plano seja paralelo ao plano  $yOz$ , ora, então teremos de escolher três pontos (vértices) entre os quatro da face  $[ABFE]$  ou escolher três pontos (vértices) entre os quatro da face  $[CDHG]$ , e essa escolha pode ser feita de  ${}^4C_3 \times 2$  maneiras distintas

$$\text{Assim, a probabilidade pedida é igual a } P = \frac{{}^4C_3 \times 2}{{}^8C_3} = \frac{8}{56} = \frac{1}{7}$$

**5.2.** Um vetor normal ao plano  $EFG$  é  $\vec{\alpha} = (1; 0; 3)$

Como a reta pedida é perpendicular ao plano  $EFG$ , então um seu vetor diretor poderá ser  $\vec{\alpha} = (1; 0; 3)$

Portanto, uma equação vetorial da reta perpendicular ao plano  $EFG$  e que contém o ponto  $D$ , é dada por  $(x; y; z) = (-3, -3; 0) + k(1; 0; 3), k \in \mathbb{R}$

**5.3.**  $\vec{AH} = H - A = (-3, -3; 5) - (3; -3; 0) = (-6; 0; 5)$  poderá ser um vetor normal ao plano mediador pedido

Determinemos o ponto  $M$ , ponto médio do segmento de reta  $[AH]$

$$M \left( \frac{-3+3}{2}; \frac{-3-3}{2}; \frac{5+0}{2} \right), \text{ ou seja, } M \left( 0; -3; \frac{5}{2} \right)$$

A equação do plano mediador é da forma  $-6x + 0y + 5z + d = 0, d \in \mathbb{R}$

Como o plano contém o ponto  $M$ , vem,

$$-6 \times 0 + 5 \times \frac{5}{2} + d = 0 \Leftrightarrow d = -\frac{25}{2}$$

Logo, a equação do plano mediado pedida é  $-6x + 5z - \frac{25}{2} = 0$ , ou ainda,  $-12x + 10z - 25 = 0$

6. Sabe-se que  $\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) = -\infty$ , logo a reta  $s$  tem equação  $x = -2$

Sabe-se que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ g(x) - \frac{1}{4}x + \frac{3}{4} \right] = 0$ , ou seja que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ g(x) - \left( \frac{1}{4}x - \frac{3}{4} \right) \right] = 0$ , logo a reta  $r$  tem equação  $y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$

Determinemos o ponto  $I$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -2 \\ y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -2 \\ y = \frac{1}{4} \times (-2) - \frac{3}{4} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -2 \\ y = -\frac{2}{4} - \frac{3}{4} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -2 \\ y = -\frac{5}{4} \end{array} \right.$$

Logo,  $I \left( -2; -\frac{5}{4} \right)$

**Resposta:**(A)

7. .

$$\begin{aligned} 7.1. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+1} - 1}{2e^x - 1} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^{x+1} - 1}{e^x}}{\frac{2e^x - 1}{e^x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+1}}{e^x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{e^x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x}} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} (e) - \frac{1}{e^{+\infty}}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (2) - \frac{1}{e^{+\infty}}} = \frac{e - \frac{1}{+\infty}}{2 - \frac{1}{+\infty}} = \frac{e - 0}{2 - 0} = \frac{e}{2} \end{aligned}$$

Logo, a reta de equação  $y = \frac{e}{2}$  é assíntota ao gráfico da função, quando  $x \rightarrow +\infty$

7.2. A função  $g$  é contínua em todo o seu domínio, por se tratar de quociente de funções contínuas, logo, em particular, é contínua em  $[1; 2]$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} g(1) &= -\frac{4}{e} + f(1) = -\frac{4}{e} + \frac{e^{1+1} - 1}{2e - 1} = -\frac{4}{e} + \frac{e^2 - 1}{2e - 1} < 0 \\ g(2) &= -\frac{4}{e^2} + f(2) = -\frac{4}{e^2} + \frac{e^{2+1} - 1}{2e^2 - 1} = -\frac{4}{e^2} + \frac{e^3 - 1}{2e^2 - 1} > 0 \end{aligned}$$

Como  $g(1)$  e  $g(2)$  têm sinais contrários, ou seja, tem-se que  $g(1) \times g(2) < 0$ , e a função  $g$  é contínua em  $[1; 2]$ , então, pelo corolário do teorema de Bolzano-Cauchy, a função  $g$  tem pelo menos um zero em  $]1; 2[$ , isto é,  $\exists c \in ]1; 2[ : g(c) = 0$

8. .

8.1. Pretende-se determinar as soluções da equação  $p(t) = 5$ , no intervalo de tempo  $[0; 8]$

$$\begin{aligned} p(t) = 5 &\Leftrightarrow 5 + 5e^{-0.2t} \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) = 5 \Leftrightarrow 5e^{-0.2t} \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5e^{-0.2t} = 0 \vee \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \text{equação impossível} \vee \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi t}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \pi t = \frac{3\pi}{2} + 3k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = \frac{3}{2} + 3k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Atribuindo valores a  $k$ , vem,

$$\begin{aligned} k = 0 &\rightarrow t = \frac{3}{2} \in [0; 8] \\ k = 1 &\rightarrow t = \frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{2} \in [0; 8] \\ k = 2 &\rightarrow t = \frac{3}{2} + 6 = \frac{15}{2} \in [0; 8] \\ k = 3 &\rightarrow t = \frac{3}{2} + 9 = \frac{21}{2} \notin [0; 8] \end{aligned}$$

Concluindo,  $t \in \left\{ \frac{3}{2}; \frac{9}{2}; \frac{15}{2} \right\}$

$$8.2. \lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ 5 + 5e^{-0.2t} \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) \right] = 5 + \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ 5e^{-0.2t} \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) \right]$$

$$\text{Ora, } \lim_{t \rightarrow +\infty} [5e^{-0.2t}] = 5 \times e^{-\infty} = \frac{5}{e^{+\infty}} = \frac{5}{+\infty} = 0$$

E a função  $f(t) = \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$  é limitada

$$\text{Então, tem-se que } \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ 5e^{-0.2t} \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) \right] = 0$$

Assim

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ 5 + 5e^{-0.2t} \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) \right] = 5 + \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ 5e^{-0.2t} \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) \right] = 5 + 0 = 5$$

Com o passar do tempo o corpo tende a estabilizar a sua posição a cinco decímetros do solo

## CADERNO 2

9. .

### 9.1. P2001/2002

Seja  $X$  a variável aleatória

Como o valor médio é 60, tem-se que

$$P(50 < X < 60) = P(60 < X < 70)$$

Pelo que

$$P(X < 70) > P(X > 55)$$

$$P(X < 70) > P(X < 55)$$

$$P(X < 70) > P(X > 70)$$

**Resposta:(A)**

### 9.2. PMC2015

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{5\pi}{12} &\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} + \arccos\left(-\frac{x}{2}\right) = \frac{5\pi}{12} \Leftrightarrow \arccos\left(-\frac{x}{2}\right) = \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \arccos\left(-\frac{x}{2}\right) = \frac{8\pi}{12} \Leftrightarrow \arccos\left(-\frac{x}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{x}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

**Resposta:(A)**

10. .

$$10.1. w_1 = -2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2\sqrt{2}i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}i = -2 + 2i$$

Então,

$$\begin{aligned} |z + w_1| = 2 \wedge -\frac{\pi}{2} &\leq \text{Arg}(z) \leq -\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow |z + (-2 + 2i)| = 2 \wedge -\frac{\pi}{2} \leq \text{Arg}(z) \leq -\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |z - (2 - 2i)| = 2 \wedge -\frac{\pi}{2} \leq \text{Arg}(z) \leq -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Consideremos  $A(2; -2)$ , afixo do complexo  $z_1 = 2 - 2i$

### Representação no plano complexo

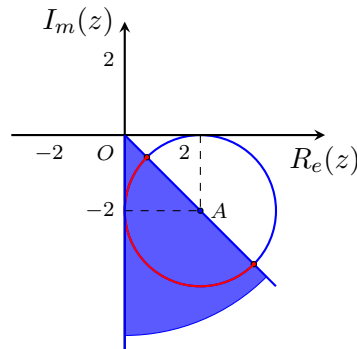


Figura 1

No plano complexo, esta condição define uma linha de comprimento  $\pi \times 2 = 2\pi$  u.c.

**10.2.**  $w_2 = \cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi) = e^{i(\theta + \pi)}$

Então,  $w_2^3 = [e^{i(\theta + \pi)}]^3 = e^{i(3\theta + 3\pi)} = \cos(3\theta + 3\pi) + i \sin(3\theta + 3\pi) = -\cos(3\theta) - i \sin(3\theta)$

$$\begin{aligned} |w_2^3 + 1| &= |-\cos(3\theta) - i \sin(3\theta) + 1| = |1 - \cos(3\theta) - i \sin(3\theta)| = \sqrt{(1 - \cos(3\theta))^2 + (\sin(3\theta))^2} = \\ &= \sqrt{1 - 2 \cos(3\theta) + \cos^2(3\theta) + \sin^2(3\theta)} = \sqrt{2 - 2 \cos(3\theta)} = \sqrt{2(1 - \cos(3\theta))} = \\ &= \sqrt{2 \times 2 \sin^2\left(\frac{3\theta}{2}\right)} = 2 \left| \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right| \end{aligned}$$

#### Cálculos auxiliares:

$$1 - \cos(2\alpha) = 1 - (\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)) = 1 - (1 - \sin^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)) = 1 - 1 + 2 \sin^2(\alpha) = 2 \sin^2(\alpha)$$

11. Determinar a função derivada de  $g$

Se  $x > 0$ , então  $g(x) = x \ln(x)$

$$g'(x) = [x \ln(x)]' = x' \times \ln(x) + x \times (\ln(x))' = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$$

Se  $x = 0$

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln(x) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(x)) = -\infty$$

Ou seja, a função  $g$  não é diferenciável no ponto  $x = 0$

Portanto,  $g'(x) = \ln(x) + 1$ , se  $x > 0$

Estudo da monotonia da função  $g$

**Zeros** de  $g'$

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\Leftrightarrow \ln(x) + 1 = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = e^{-1} \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e} \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

**Sinal** de  $g'$

$$\begin{aligned} g'(x) > 0 &\Leftrightarrow \ln(x) + 1 > 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > -1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x > e^{-1} \wedge x > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{e} \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x > \frac{1}{e} \end{aligned}$$

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow \ln(x) + 1 < 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \ln(x) < -1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x < e^{-1} \wedge x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{e} \wedge x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{e}$$

Quadro de sinal de  $g'$  e de variação de  $g$

$x$	0		$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$g'(x)$	\ \ \ \	-	0	+
$g(x)$	0	\	$-\frac{1}{e}$	/

$$g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \ln(e^{-1}) = -\frac{1}{e}$$

Estudar as concavidades do gráfico de  $g$

$$g''(x) = (\ln(x) + 1)' = \frac{1}{x}, \text{ com } x > 0$$

Logo,  $g''(x) > 0, \forall x > 0$

Portanto o gráfico da função  $g$  tem a concavidade voltada para cima em todo o seu domínio

**Resposta:**(B)

**Outro processo:**

Em alternativa, poder-se-ia resolver da seguinte forma

Determinar a função derivada de  $g$

Se  $x > 0$ , então  $g(x) = x \ln(x)$

$$g'(x) = [x \ln(x)]' = x' \times \ln(x) + x \times (\ln(x))' = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$$

Se  $x = 0$

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln(x) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(x)) = -\infty$$

Ou seja, a função  $g$  não é diferenciável no ponto  $x = 0$

Portanto,  $g'(x) = \ln(x) + 1$ , se  $x > 0$

Daqui se exclui as opções (C) e (D), pois em ambos os gráficos existe um "ponto anguloso" de abscissa  $\frac{1}{e}$ , não sendo diferenciável a função em  $x = \frac{1}{e}$

Restam as opções (A) e (B)

$$\text{Ora, como } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln(x)) = +\infty$$

Conclui-se que a resposta só poderá ser a opção (B)

12. Se no saco estão onze bolas numeradas e se, se retiram duas de uma só vez, então o número de casos possíveis é dado por  ${}^{11}C_2$

Quanto ao número de casos favoráveis: pretende-se que as duas bolas retiradas tenham o mesmo número, então, atendendo à simetria do triângulo de pascal, e ao facto de haver onze bolas, tem-se que há apenas cinco pares de números iguais, pelo que o número de casos favoráveis é igual a 5

Portanto, a probabilidade pedida é dada por  $P = \frac{5}{{}^{11}C_2}$

**Resposta:**(B)

13.  $\log_a(b^3) = 2 \Leftrightarrow 3 \log_a(b) = 2 \Leftrightarrow \log_a(b) = \frac{2}{3}$

$$\frac{\log_b(a^2)}{\log_a(\sqrt{b})} = \frac{2 \log_b(a)}{\log_a(b^{\frac{1}{2}})} = \frac{2 \log_b(a)}{\frac{1}{2} \log_a(b)} = \frac{4 \log_b(a)}{\log_a(b)} = \frac{4 \times \frac{\log_a(a)}{\log_a(b)}}{\frac{2}{3}} = \frac{4 \times \frac{1}{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} = 4 \times \frac{9}{4} = 9$$

**Resposta:**(A)

14. .

14.1.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{e^{2x} - e^x} \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\frac{e^{2x} - e^x}{x}} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - 1 + 1 - e^x}{x}} =$

$$= \frac{1}{2 \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - 1}{2x} - \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x}} = \frac{1}{2 \times 1 - 1} = 1$$

Utilizou-se o limite notável  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Conclui-se, assim, que o valor de  $b$  é 1

14.2.  $\lim a_n = \lim \left( \frac{2n+3}{n+1} \right)^n = \lim \left[ \frac{2n \left( 1 + \frac{3}{2n} \right)}{n \left( 1 + \frac{1}{n} \right)} \right]^n = \lim(2^n) \times \frac{\lim \left( 1 + \frac{3}{2n} \right)^n}{\lim \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n} =$

$$= +\infty \times \frac{e^{\frac{3}{2}}}{e} = +\infty$$

Assim,  $\lim f(a_n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ (x+1) \ln \left( \frac{x+2}{x} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \ln \left( \left( \frac{x+2}{x} \right)^{x+1} \right) \right] =$

$$= \ln \left[ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \left( \frac{x+2}{x} \right)^{x+1} \right) \right] = \ln \left[ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \left( 1 + \frac{2}{x} \right)^x \left( 1 + \frac{2}{x} \right) \right) \right] =$$

$$= \ln \left[ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{2}{x} \right)^x \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{2}{x} \right) \right] = \ln(e^2 \times 1) = \ln(e^2) = 2$$

Logo,  $b = 2$  e a reta  $r$  tem equação  $y = 2$

15. .

15.1. A função  $h$  é contínua em  $x = 0$ , se existir  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ , ou seja, se  $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = h(0)$  e  $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = h(0)$

Ora,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{1 - e^{4x}} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{\frac{e^{4x} - 1}{x}} = - \frac{2}{4 \times \lim_{4x \rightarrow 0^+} \frac{e^{4x} - 1}{4x}} = - \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} = - \frac{1}{2}$$

Utilizou-se o limite notável  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(-2x)(\cos^2(x) - \sin^2(x))}{4x} = - \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(2x) \cos(2x)}{4x} = \\ &= -\frac{1}{2} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(4x)}{4x} = -\frac{1}{2} \times \lim_{4x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(4x)}{4x} = -\frac{1}{2} \times 1 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Utilizou-se o limite notável  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

$$h(0) = -\frac{k \ln(\sqrt{e})}{2}$$

Para que a função  $h$  seja contínua em  $x = 0$  deverá ter-se

$$-\frac{k \ln(\sqrt{e})}{2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow k \ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = 1 \Leftrightarrow k \times \frac{1}{2} \ln(e) = 1 \Leftrightarrow k \times \frac{1}{2} \times 1 = 1 \Leftrightarrow k = 2$$

**15.2.** seja  $x > 0$ ,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(\frac{2x}{1 - e^{4x}}\right)' = \frac{(2x)' \times (1 - e^{4x}) - 2x \times (1 - e^{4x})'}{(1 - e^{4x})^2} = \frac{2 \times (1 - e^{4x}) - 2x \times (0 - 4e^{4x})}{(1 - e^{4x})^2} = \\ &= \frac{2 - 2e^{4x} + 8xe^{4x}}{(1 - e^{4x})^2} = \frac{e^{4x}(8x - 2) + 2}{(1 - e^{4x})^2}, \text{ com } x > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{2}{(1 - e^{4x})^2} \Leftrightarrow \frac{e^{4x}(8x - 2) + 2}{(1 - e^{4x})^2} = \frac{2}{(1 - e^{4x})^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{e^{4x}(8x - 2)}{(1 - e^{4x})^2} + \frac{2}{(1 - e^{4x})^2} = \frac{2}{(1 - e^{4x})^2} \Leftrightarrow \frac{e^{4x}(8x - 2)}{(1 - e^{4x})^2} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow e^{4x}(8x - 2) = 0 \wedge (1 - e^{4x})^2 \neq 0 \Leftrightarrow (e^{4x} = 0 \vee 8x - 2 = 0) \wedge 1 - e^{4x} \neq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\text{equação impossível} \vee 8x = 2) \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{8} \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$C.S. = \left\{ \frac{1}{4} \right\}$$

**15.3.** O declive da reta tangente é igual a  $h'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{e^{4 \times \frac{1}{4}} \left(8 \times \frac{1}{4} - 2\right) + 2}{\left(1 - e^{4 \times \frac{1}{4}}\right)^2} = \frac{2}{(1 - e)^2}$

A equação da reta tangente  $t$  é da forma  $t: y = \frac{2}{(1 - e)^2}x + b, b \in \mathbb{R}$

$$\text{Ora, } h\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{2 \times \frac{1}{4}}{1 - e^{4 \times \frac{1}{4}}} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - e} = \frac{1}{2(1 - e)}$$

Assim, o ponto de tangência tem coordenadas  $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2(1 - e)}\right)$

Substituindo as coordenadas deste ponto na equação de  $t$ , vem

$$\begin{aligned} \frac{1}{2(1 - e)} &= \frac{2}{(1 - e)^2} \times \frac{1}{4} + b \Leftrightarrow b = \frac{1}{2(1 - e)} - \frac{1}{2(1 - e)^2} \Leftrightarrow b = \frac{1 - e}{2(1 - e)^2} - \frac{1}{2(1 - e)^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow b = \frac{1 - e - 1}{2(1 - e)^2} \Leftrightarrow b = -\frac{e}{2(1 - e)^2} \end{aligned}$$

Portanto, a equação da reta  $t$  é  $t: y = \frac{2}{(1 - e)^2}x - \frac{e}{2(1 - e)^2}$