

Prova-Modelo de Exame – Proposta de resolução

Caderno 1

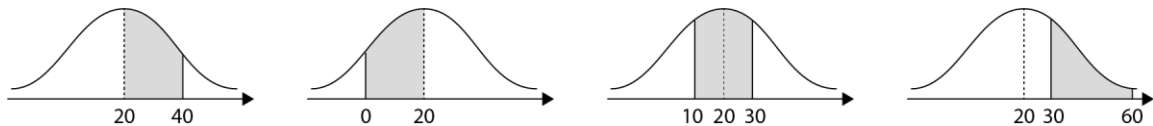
1.

1.1. Opção (C)

$$X \sim N(20, \sigma) \text{ e } P(a < X < b) = 0,7$$

Sabemos que $P(X < 20) = P(X > 20) = 0,5$.

Com exceção da opção (C), em todas as restantes verifica-se que $P(a < X < b) < 0,5$.



Apenas na opção (C) é possível que $P(a < X < b)$ seja 0,7.

1.2. Opção (D)

$$\begin{aligned} x(t) &= 4 \left(\sqrt{3} \cos(\pi t) - \sin(\pi t) \right) = 4 \times 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\pi t) - \frac{1}{2} \sin(\pi t) \right) = \\ &= 8 \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos(\pi t) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin(\pi t) \right) = \\ &= 8 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

Assim, $A = 8$ e $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

2.

2.1. Consideremos a reta perpendicular ao plano ABC e que contém o ponto V :

$$(x, y, z) = \left(4, \frac{19}{4}, 13 \right) + k(2, 3, 6), k \in \mathbb{R}$$

Um ponto genérico desta reta é:

$$(x, y, z) = \left(4 + 2k, \frac{19}{4} + 3k, 13 + 6k \right) \text{ com } k \in \mathbb{R}$$

Determinemos a interseção desta reta com o plano ABC :

$$\begin{aligned} 2(4 + 2k) + 3\left(\frac{19}{4} + 3k\right) + 6(13 + 6k) + 10 &= 0 \Leftrightarrow 8 + 4k + \frac{57}{4} + 9k + 78 + 36k + 10 = 0 \\ &\Leftrightarrow 49k = -\frac{441}{4} \\ &\Leftrightarrow k = -\frac{9}{4} \end{aligned}$$

A interseção desta reta com o plano é, assim, o ponto de coordenadas:

$$\left(4 + 2\left(-\frac{9}{4}\right), \frac{19}{4} + 3\left(-\frac{9}{4}\right), 13 + 6\left(-\frac{9}{4}\right) \right) = \left(-\frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{2}\right)$$

Assim, $I\left(-\frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{2}\right)$.

Logo:

$$\begin{aligned}h = d(V, I) &= \sqrt{\left(4 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{19}{4} + 2\right)^2 + \left(13 + \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{81}{4} + \frac{729}{16} + \frac{729}{4}} = \\ &= \sqrt{\frac{3969}{16}} = \\ &= \frac{63}{4}\end{aligned}$$

A altura da pirâmide é igual a $\frac{63}{4}$.

2.2. Os pontos P_1 e P_2 pertencem aos semieixos positivos Ox e Oy e, como A pertence ao plano definido por $z = -3$, então $\overrightarrow{AP_1}$ e $\overrightarrow{AP_2}$ não são colineares, logo o ângulo P_1AP_2 não pode ser raso. Assim, o ângulo P_1AP_2 é obtuso se e só se $\overrightarrow{AP_1} \cdot \overrightarrow{AP_2} < 0$.

Sabemos que $P_1(a, 0, 0)$, $P_2(0, a, 0)$ e $A(1, 2, -3)$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP_1} \cdot \overrightarrow{AP_2} &= (a - 1, -2, 3) \cdot (-1, a - 2, 3) = -a + 11 - 2a + 4 + 9 = \\ &= -3a + 14\end{aligned}$$

Assim, o ângulo P_1AP_2 é obtuso se e só se:

$$-3a + 14 < 0 \Leftrightarrow -3a < -14 \Leftrightarrow a > \frac{14}{3}$$

Logo, a ângulo P_1AP_2 é obtuso se e só se $a \in \left] \frac{14}{3}, +\infty \right[$.

2.3. Número de casos possíveis: 6^5

Número de casos favoráveis: ${}^6C_5 \times 5! + {}^6C_4 \times 2 \times 4! + {}^6C_3 \times 3!$

- são utilizadas 5 cores distintas: ${}^6C_5 \times 5!$
 6C_5 é o número de maneiras distintas de escolher as 5 cores de entre as 6 disponíveis. Por cada uma destas maneiras, existem $5!$ maneiras distintas de colorir as 5 faces com as 5 cores.
- são utilizadas 4 cores distintas: ${}^6C_4 \times 2 \times 4!$
 6C_4 é o número de maneiras distintas de escolher as 4 cores de entre as 6 disponíveis. Por cada uma destas maneiras, existem 2 possibilidades para escolher as duas faces que vão ser pintadas da mesma cor ($[ABV]$ e $[DCV]$ ou $[ADV]$ e $[BCV]$) e, por cada uma destas possibilidades, existem $4!$ maneiras distintas de colorir as faces da pirâmide.
- são utilizadas 3 cores distintas: ${}^6C_3 \times 3!$
 6C_3 é o número de maneiras distintas de escolher 3 cores de entre as 6 disponíveis. Como só utilizamos 3 cores, as faces $[ABV]$ e $[CDV]$ e as faces $[ADV]$ e $[BCV]$ são pintadas com a mesma cor. Assim, após termos selecionado as cores, existem $3!$ maneiras diferentes de colorir as faces da pirâmide.

Assim, a probabilidade pedida é igual a:

$$\frac{{}^6C_5 \times 5! + {}^6C_4 \times 2 \times 4! + {}^6C_3 \times 3!}{6^5} = \frac{65}{324}$$

3.

3.1. Consideremos os acontecimentos:

B : “Usar batom”

L : “Usar lápis de olhos”

Sabemos que:

- $P(B) = P(L)$
- $P(B \cap L) = \frac{1}{5}P(B \cup L)$

Pretende-se determinar $P(\bar{L}|B)$.

Como:

- $P(B \cap L) = \frac{1}{5}P(B \cup L) \Leftrightarrow P(B \cup L) = 5P(B \cap L)$
- $P(B \cup L) = P(B) + P(L) - P(B \cap L)$

tem-se que $5P(B \cap L) = P(B) + P(L) - P(B \cap L)$.

Como $P(B) = P(L)$, então $5P(B \cap L) = P(B) + P(B) - P(B \cap L)$. Assim, $6P(B \cap L) = 2P(B)$, ou seja, $P(B \cap L) = \frac{1}{3}P(B)$.

Logo:

$$P(\bar{L}|B) = \frac{P(\bar{L} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(B \cap L)}{P(B)} = 1 - \frac{P(B \cap L)}{P(B)} = 1 - \frac{\frac{1}{3}P(B)}{P(B)} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

A probabilidade pedida é $\frac{2}{3}$.

3.2. Opção (D)

Vogais Primos: 2, 3, 5 Restantes algarismos 1, 4 e 6

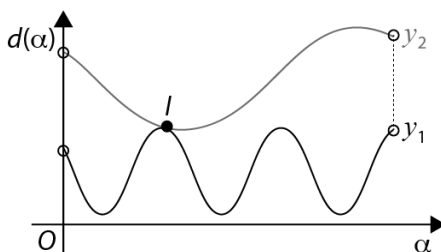
$$\begin{array}{c} \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ {}^5A_2 \quad \times \quad 3! \quad \quad \quad \times 5! \end{array}$$

- 5A_2 é o número de maneiras de escolher ordenadamente duas das cinco vogais existentes.
- $3!$ é o número de maneiras de permutar entre si os três algarismos primos.
- $5!$ é o número de maneiras de permutar o bloco das vogais, o bloco dos algarismos primos e os algarismos 1, 4 e 6 todos entre si.

$${}^5A_2 \times 3! \times 5! = 14\,400$$

4. Pretendemos determinar a solução da equação:

$$d(3\alpha) = 1,175d(\alpha) \Leftrightarrow \underbrace{12 + \cos(5,8 \times 3\alpha + 1)}_{y_1} = \underbrace{1,175(12 + \cos(5,8\alpha + 1))}_{y_2}$$



$I(a, b)$

$a \approx 0,31$

A solução pedida é igual a 0,31 rad.

5. Opção (B)

Número de casos possíveis: $6 \times 6 = 36$

Número de casos favoráveis (número de casos em que o produto é um número real, ou seja, o produto de dois números reais e o produto de dois números imaginários puros): $4 \times 4 + 2 \times 2 = 20$

A probabilidade pretendida é $\frac{20}{36} = \frac{5}{9}$.

6. A sucessão (u_n) é uma progressão aritmética de razão 5 e primeiro termo a .

Seja S_{10} a soma dos 10 primeiros termos de (u_n) . Então:

$$S_{10} = \frac{u_1 + u_{10}}{2} \times 10$$

ou seja:

$$305 = \frac{a + a + 9 \times 5}{2} \times 10 \Leftrightarrow 305 = (2a + 45) \times 5 \Leftrightarrow 2a + 45 = 61$$

$$\Leftrightarrow a = 8$$

7. Opção (A)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{f(x) - f(2)} = \frac{1}{2e^4} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)}{f(x) - f(2)} = \frac{1}{2e^4}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} x \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{f(x) - f(2)} = \frac{1}{2e^4}, \text{ pois os dois limites existem e são finitos.}$$

$$\Leftrightarrow 2 \times \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{2e^4}$$

$$\Leftrightarrow 4e^4 = f'(2)$$

- Se $f(x) = e^{x^2}$, vem que $f'(x) = 2xe^{x^2}$ e $f'(2) = 4e^4$.
- Se $f(x) = e^{2x}$, vem que $f'(x) = 2e^{2x}$ e $f'(2) = 2e^4$.
- Se $f(x) = 2^{x^2}$, vem que $f'(x) = 2x \times 2^{x^2} \times \ln(2)$ e $f'(2) = 4 \times 2^4 \times \ln(2) = 64 \ln(2)$.
- Se $f(x) = 2^{2x}$, vem que $f'(x) = 2 \times 2^{2x} \times \ln(2)$ e $f'(2) = 32 \ln(2)$.

Caderno 2

8.

8.1. Opção (C)

$$\frac{4-x}{2} = \frac{z-1}{3} \quad \wedge \quad y = -1 \Leftrightarrow \frac{x-4}{-2} = \frac{z-1}{3} \quad \wedge \quad y = -1$$

Um vetor diretor de r é $\vec{r}(-2,0,3)$.

Um vetor normal ao plano α é $\vec{n}(3,1,2)$.

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = (-2,0,3) \cdot (3,1,2) = -6 + 6 = 0$$

Um ponto pertencente à reta r é $P(4, -1, 1)$.

Averiguemos se P pertence ao plano α :

$3 \times 4 + (-1) + 2 \times 1 + 10 = 0 \Leftrightarrow 12 - 1 + 2 + 10 = 0 \Leftrightarrow 23 = 0$, que é uma proposição falsa.

Logo, P não pertence ao plano α .

Como \vec{r} e \vec{n} são vetores perpendiculares e o ponto P da reta não pertence ao plano α , concluímos que r é estritamente paralela a α .

8.2. Opção (A)

$$f(x) = \ln x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad D_{f'} = \mathbb{R}^+$$

f é contínua em $[a-1, a]$ e diferenciável em $]a-1, a[$.

Logo, pelo teorema de Lagrange, concluímos que:

$$\text{existe } c \in]a-1, a[: f'(c) = \frac{f(a) - f(a-1)}{1}$$

isto é:

$$\text{existe } c \in]a-1, a[: f'(c) = \ln(a) - \ln(a-1)$$

ou seja:

$$\text{existe } c \in]a-1, a[: f'(c) = \ln\left(\frac{a}{a-1}\right)$$

Como $a-1 < c < a$, então $\frac{1}{a-1} > \frac{1}{c} > \frac{1}{a}$, ou seja, $\frac{1}{a} < f'(c) < \frac{1}{a-1}$. Logo, $\ln\left(\frac{a}{a-1}\right) < \frac{1}{a-1}$.

$$9. z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Cálculo das raízes cúbicas de z :

$$\sqrt[3]{e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt[3]{1} \times e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3}\right)}, k \in \{0, 1, 2\}$$

$$= e^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)}, k \in \{0, 1, 2\}$$

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$z_2 = e^{i\frac{9\pi}{12}} = e^{i\frac{3\pi}{4}} = w$, pois o afixo desta raiz cúbica de z é o único que pertence ao 2.º quadrante.

$$z_3 = e^{i\frac{17\pi}{12}}$$

Assim:

$$\begin{aligned} \frac{w \times \bar{z}}{\sqrt{2}z - i^{2019}} &= \frac{e^{i\frac{3\pi}{4}} \times e^{i(-\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) - i^3} = \frac{e^{i\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)}}{1 + i - (-i)} = \\ &= \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}}{1 + 2i} = \\ &= \frac{i \times (1 - 2i)}{(1 + 2i) \times (1 - 2i)} = \\ &= \frac{i - 2i^2}{1^2 - (2i)^2} = \\ &= \frac{2 + i}{1 + 4} = \\ &= \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i \end{aligned}$$

10.

10.1. Opção (B)

$$P(x = 0) = \frac{16}{81}$$

A soma dos números saídos nos quatro lançamentos é zero apenas no caso em que sai face com o número zero voltada para cima nos quatro lançamentos.

Sendo n o número de faces do cubo com o número zero, tem-se que:

$$P(x = 0) = \frac{n \times n \times n \times n}{6 \times 6 \times 6 \times 6} = \frac{n^4}{6^4}$$

Assim:

$$\frac{n^4}{6^4} = \frac{16}{81} \Leftrightarrow n^4 = 6^4 \times \frac{2^4}{3^4} \Leftrightarrow n^4 = \left(\frac{6 \times 2}{3}\right)^4 \Leftrightarrow n^4 = 4^4$$

Como $n > 0$, vem que $n = 4$.

10.2. Opção (C)

$$\begin{aligned} \lim \ln(u_n) &= \lim \ln\left(\frac{3n - 9}{3n + 6}\right)^{n+2} = \lim \ln\left(\frac{n - 3}{n + 2}\right)^{n+2} = \\ &= \lim \ln\left(1 + \frac{-5}{n+2}\right)^{n+2} = \\ &= \ln \lim\left(1 - \frac{5}{n+2}\right)^{n+2} = \\ &= \ln(e^{-5}) = \\ &= -5 \end{aligned}$$

11. $D = \mathbb{R}^+$

Neste domínio:

$$e^{(\ln x)^2} > x^2 \Leftrightarrow (\ln x)^2 > \ln(x^2) \Leftrightarrow (\ln x)^2 - \ln(x^2) > 0$$

$$\Leftrightarrow (\ln x)^2 - 2\ln x > 0$$

Consideremos a mudança de variável $y = \ln x$:

$$y^2 - 2y > 0 \Leftrightarrow y < 0 \vee y > 2$$

Como $y = \ln x$, em \mathbb{R}^+ , vem que:

$$(\ln x)^2 - 2\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 0 \vee \ln x > 2$$

$$\Leftrightarrow x < 1 \vee x > e^2$$

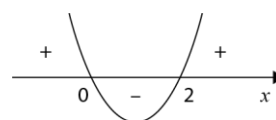
$$\text{C.S.} = (]-\infty, 1[\cup]e^2, +\infty[) \cap \mathbb{R}^+ =]0, 1[\cup]e^2, +\infty[$$

Cálculo auxiliar

$$y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow y(y - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 0 \vee y - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 0 \vee y = 2$$



12. Opção (C)

$$r: 3y - ax - 2 = 0 \Leftrightarrow 3y = ax + 2 \Leftrightarrow y = \frac{a}{3}x + \frac{2}{3}$$

Sejam m_r o declive da reta r e m_s o declive da reta s .

Como r e s são perpendiculares, então tem-se que $m_r = -\frac{1}{m_s}$, isto é:

$$\frac{a}{3} = -\frac{1}{1 + \sqrt{2}} \Leftrightarrow a = \frac{-3(1 - \sqrt{2})}{(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})} \Leftrightarrow a = \frac{-3 + 3\sqrt{2}}{1 - 2}$$

$$\Leftrightarrow a = 3 - 3\sqrt{2}$$

13. Opção (D)

$$(f^{-1} \circ h')(1) = f^{-1}(h'(1)) = f^{-1}(0)$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$$

$$f(2) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(0) = 2$$

$$\text{Logo, } (f^{-1} \circ h')(1) = 2.$$

14.

14.1. g é contínua em $x = 1$ se e só se existir $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$, isto é:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = g(1)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{xe^x - e}{ex - e} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{xe^{x-1} - 1}{x-1} =$$

Consideremos a mudança de variável $x - 1 = y$: se $x \rightarrow 1^- \Rightarrow y \rightarrow 0^-$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{(y+1)e^y - 1}{y} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{ye^y + e^y - 1}{y} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{y \rightarrow 0^-} e^y + \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^y - 1}{y}}_{\text{limite notável}} = \\
&= 1 + 1 = \\
&= 2
\end{aligned}$$

- $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + \ln(x^2) + 1}{x} = \frac{2}{1} = 2$
- $g(1) = 2$

Logo, g é contínua em $x = 1$.

14.2. Para $x \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \ln(x^2) + 1}{x^2} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\ln(x^2)}{x^2} + \frac{1}{x^2} \right) =
\end{aligned}$$

(i) Consideremos a mudança de variável $x^2 = y$: se $x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned}
&= 1 + \overbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y}}^{(i)} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = \\
&= 1 + 0 + 0 = \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + \ln(x^2) + 1}{x} - x \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \ln(x^2) + 1 - x^2}{x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2) + 1}{x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 \ln|x|}{x} + \frac{1}{x} \right) = \\
&= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \\
&= 2 \times 0 + 0 = \\
&= 0
\end{aligned}$$

A reta de equação $y = x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de g quando $x \rightarrow +\infty$.

Para $x \rightarrow -\infty$:

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x e^x - e}{x(e x - e)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - \frac{e}{x}}{e x - e} = \\
&= \frac{0}{-\infty} = \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^x - e}{ex - e} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x-\frac{e}{x}}}{e-\frac{e}{x}} = \\
 &= \frac{0}{e} = \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de g quando $x \rightarrow -\infty$.

14.3. Em $]1, +\infty[$:

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= \frac{\left(2x + \frac{2x}{x^2}\right)x - (x^2 + \ln(x^2 + 1))}{x^2} = \frac{2x^2 + 2 - x^2 - \ln(x^2) - 1}{x^2} = \\
 &= \frac{x^2 + 1 - \ln(x^2)}{x^2} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g''(x) &= \frac{\left(2x - \frac{2x}{x^2}\right)x^2 - (x^2 + 1 - \ln(x^2)) \times 2x}{4} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x + 2x \ln(x^2)}{x^4} = \\
 &= \frac{-4x + 2x \ln(x^2)}{x^4} = \\
 &= \frac{-4 + 2 \ln(x^2)}{x^3}
 \end{aligned}$$

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-4 + 2 \ln(x^2)}{x^3} = 0 \Leftrightarrow -4 + 2 \ln(x^2) = 0 \wedge x^3 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2) = 2 \wedge \underbrace{x \neq 0}_{\text{condição universal em }]1, +\infty[}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = e^2$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x = -e}_{\text{condição impossível em }]1, +\infty[} \vee x = e$$

$$\Leftrightarrow x = e$$

Assim:

x	1		e	$+\infty$
Sinal de g''		-	0	+
Sentido das concavidades do gráfico de g		\cap	P.I.	\cup

Cálculos auxiliares

$$e^0 < e^{\frac{1}{2}} < e$$

$$1 < \sqrt{e} < e$$

$$-4 + 2 \ln((\sqrt{e})^2) = -4 + 2 = -2$$

$$-4 + 2 \ln((e^2)) = -4 + 2 \times 4 = 4$$

O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $]1, e]$ e tem a concavidade voltada para cima em $[e, +\infty[$.

$$g(e) = \frac{e^2 + \ln(e^2) + 1}{e} = e + \frac{3}{e}$$

$(e, e + \frac{3}{e})$ é ponto de inflexão do gráfico de g .