Unidade 3: Combinatória e probabilidades

Tema 1: Cálculo combinatório

1.1. $\overline{A}\cup B = \overline{\overline{\overline{A}}\cap\overline{B}} = \overline{A\cap\overline{B}} = \overline{A\setminus B}$

1.2. $\left(\overline{A}\cap B\right)\cup\left(A\cap B\right) = \left(\overline{A}\cup A\right)\cap B = U\cap B = B$

1.3. $\left(\overline{A\cup B}\right)\cup\left(B\setminus A\right) = \left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)\cup\left(B\cap\overline{A}\right) = \left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\right) = \overline{A}\cap\left(\overline{B}\cup B\right) = \overline{A}\cap U = \overline{A}$

2.1.

1.º A	2.º A	3.º A	4.º A
9	8	7	6

$9\times 8\times 7\times 6 = 3024$

É possível formar 3024 números.

2.2.

1.º A	2.º A	3.º A	4.º A
2	8	7	6

Só pode ser 1 ou 2.

$2\times 8\times 7\times 6 = 672$

672 desses números são inferiores a 3000.

3. Policial – Comédia

12 10

12 × 10 = 120

Policial – Drama

12 7

12 × 7 = 84

Comédia – Drama

10 7

10 × 7 = 70

120 + 84 + 70 = 274

A escolha pode ser feita de 274 maneiras.

4.1. $2(x+2)! - 17(x+1)! = 8x! \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2(x+2)(x+1)x! - 17(x+1)x! - 8x! = 0 \wedge x+2\geq 0 \wedge x+1\geq 0 \wedge x\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x!\left[2(x+2)(x+1) - 17(x+1) - 8\right] = 0 \wedge x\geq 0$$

$$\Leftrightarrow x! = 0 \vee 2\left(x^2 + x + 2x + 2\right) - 17x - 17 - 8 = 0 \wedge x\geq 0$$

$$\Leftrightarrow x\in\varnothing \vee 2x^2 + 6x + 4 - 17x - 25 = 0 \wedge x\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 11x - 21 = 0 \wedge x\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x = 7 \vee x = -\frac{3}{2}\right) \wedge x\geq 0 \Leftrightarrow x = 7$$

$S = \{7\}$

4.2. $\dfrac{100!-99!}{98!}=\dfrac{100\times 99\times 98!-99\times 98!}{98!}=\dfrac{98!\times(100\times 99-99)}{98!}=9900-99=9801$

4.3. $\dfrac{(n+1)!}{n}\times\dfrac{n+1}{(n-1)!}=\dfrac{(n+1)n(n-1)!}{n}\times\dfrac{n+1}{(n-1)!}=(n+1)(n+1)=(n+1)^2$

Pág. 51

5.1.

Pessoas	1.ª	2.ª	3.ª	4.ª
Hipótese de escolha. . .	6	6	6	6

$6\times 6\times 6\times 6=1296$

ou

${}^{6}A'_4=6^4=1296$

5.2. O algarismo das unidades terá de ser 5.

Há cinco possibilidades de escolha para os restantes.

Números entre 1000 e 9999

$$\underset{5}{\_}\ \underset{5}{\_}\ \underset{5}{\_}\ \underset{1}{5}$$

$5\times5\times5={}^{5}A'_3=5^3$

Números entre 1000 e 9999

$$\underset{5}{\_}\ \underset{5}{\_}\ \underset{5}{\_}\ \underset{5}{\_}\ \underset{1}{5}$$

$5\times5\times5\times5={}^{5}A'_4=5^4$

${}^{5}A'_3+{}^{5}A'_4=5^3+5^4=750$

6.1. ${}^{8}A_3=8\times7\times6=336$

6.2. Trata-se de escolher uma sequência de três cores entre seis possíveis. O seu número é dado por ${}^{6}A_3=6\times5\times4=120$.

6.3. ${}^{10}A_4=10\times9\times8\times7=5040$

Pág. 52

7.1. $P_6=6!=720$

7.2.

1.ºA	2.ºA	3.ºA	4.ºA	5.ºA
4	3	2	1	2

→ Pode ser 3 ou 7

→ Sequência dos quatro algarismos restantes

$4\times3\times2\times1\times2=48$

ou

$P_4\times2=4!\times2=48$

Existem 48 números nas condições pedidas.

8.1. **a)** $^{8}C_{3} = \dfrac{^{8}A_{3}}{P_{3}} = \dfrac{8\times7\times6}{3\times2} = 56$

b) $^{7}C_{2} = 21$

8.2. $^{5}C_{4} \times {^{7}C_{4}} = 5\times35 = 175$

$^{7}C_{4}$ → Número de maneiras de escolher quatro questões nas restantes sete

$^{5}C_{4}$ → Número de maneiras de escolher quatro questões entre as primeiras cinco

---

Pág. 53

9.1.

1   a b 22 100

1   1 + a $a + b$

$1 + a + b + 22\,100 = 23\,479 \Leftrightarrow a + b = 23\,479 - 22\,101 \Leftrightarrow a + b = 1378$

9.2. $^{n}C_{0} + {^{n}C_{1}} + \ldots + {^{n}C_{n}} = 128 \Leftrightarrow 2^{n} = 2^{7} \Leftrightarrow n = 7$

Um conjunto com 128 subconjuntos tem 7 elementos.

Como $^{7}C_{3} = {^{7}C_{4}}$, um conjunto com 7 elementos tem tantos subconjuntos de três elementos como subconjuntos de quatro elementos.

Pág. 54

10. $\left(2-\sqrt{2}\right)^{5} = \sum_{p=0}^{5} {^{5}C_{p}}\, 2^{5-p}\left(-\sqrt{2}\right)^{p} =$

$$= {^{5}C_{0}} \times 2^{5} \times \left(-\sqrt{2}\right)^{0} + {^{5}C_{1}} \times 2^{4} \times \left(-\sqrt{2}\right)^{1} +$$

$$+ {^{5}C_{2}} \times 2^{3} \times \left(-\sqrt{2}\right)^{2} + {^{5}C_{3}} \times 2^{2} \times \left(-\sqrt{2}\right)^{3} +$$

$$+ {^{5}C_{4}} \times 2^{1} \times \left(-\sqrt{2}\right)^{4} + {^{5}C_{5}} \times 2^{0} \times \left(-\sqrt{2}\right)^{5}$$

$$= 1\times32\times1 - 5\times16\times\sqrt{2} + 10\times8\times2 - 10\times4\times2\sqrt{2} + 5\times2\times4 - 1\times1\times4\sqrt{2} =$$

$$= 32 + 160 + 40 - 80\sqrt{2}\times80\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 232 - 164\sqrt{2}$$

11. $\left(\dfrac{2}{x} + x^{3}\right)^{5} = \sum_{p=0}^{5} {^{5}C_{p}} \left(\dfrac{2}{x}\right)^{5-p} \left(x^{3}\right)^{p}$

$$T_{p+1} = {^{5}C_{p}} \left(\frac{2}{x}\right)^{5-p} \times \left(x^{3}\right)^{p} = {^{5}C_{p}} \left(2\times x^{-1}\right)^{5-p} \times x^{3p} =$$

$$= {^{5}C_{p}} \times 2^{5-p} \times x^{-5+p} \times x^{3p} = {^{5}C_{p}} \times 2^{5-p} \times x^{4p-5} =$$

$4p - 5 = 7 \Leftrightarrow 4p = 12 \Leftrightarrow p = 3$

$T_{3+1} = {^{5}C_{3}} \times 2^{5-3} \times x^{7}$

$T_{4} = 10 \times 2^{2} \times x^{7}$

$T_{4} = 40x^{7}$

Resposta: 40

Pág. 57

12. 1 , 3 , 5 , 7 , 9

$$\underset{5}{\underline{1.^{\circ}}}\ \underset{4}{\underline{2.^{\circ}}}\ \underset{3}{\underline{3.^{\circ}}}\ \underset{1}{\underline{4.^{\circ}}}\ \underset{1}{\underline{5.^{\circ}}}$$

$5 \times 4 \times 3 = 60$

Resposta: (A)

13.1. A letra *a* tem de aparecer na posição central e em mais dois lugares.

$$\underset{1}{\underline{a}}\ \underset{9}{\underline{\ \ }}\ \underset{1}{\underline{a}}\ \underset{1}{\underline{\ \ }}\ \underset{1}{\underline{a}}$$ **ou**

$$\underset{9}{\underline{\ \ }}\ \underset{1}{\underline{a}}\ \underset{1}{\underline{a}}\ \underset{1}{\underline{a}}\ \underset{1}{\underline{\ \ }}$$

$9 + 9 = 18$

Resposta: (C)

13.2. $$\underset{3}{\underline{v}}\ \underset{9}{\underline{\ \ }}\ \underset{8}{\underline{\ \ }}\ \underset{1}{\underline{\ \ }}\ \underset{1}{\underline{\ \ }}$$

$3 \times 9 \times 8 = 216$

Resposta: (D)

14. Rock: 3 Jazz: 4 Clássica: 2

14.1. $3! \times 4! \times 2! \times 3! = (3!)^2 \times 4! \times 2!$

Resposta: (B)

14.2. $4! \times 5! \times 6$

Resposta: (A)

14.3. $6! \times {}^{7}A_{3}$

- ${}^{7}A_{3}$ → Escolha ordenada de 3 lugares para os discos de *Rock* entre os seis restantes, no início ou no fim da fila.
- $6!$ → Ordenação dos seis discos de *Jazz* e de música clássica.

Resposta: (A)

15. $6! - 2! \times 4! \times 5 = 480$

- 5 → Número de posições que o grupo dos dois livros de Matemática pode ocupar na fila (no início, no fim ou entre os outros quatro).
- $4!$ → Número de maneiras de ordenar os restantes quatro livros.
- $2!$ → Número de maneiras de ordenar os dois livros de Matemática.
- $6!$ → Número de maneiras de dispor os seis livros.

Ou $4! \times {}^{5}A_{2} = 480$

Resposta: (C)

Pág. 58

16.1. Usam-se os algarismos 0, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9

$$\underset{7}{\underline{\ \ }}\ \underset{7}{\underline{\ \ }}\ \underset{6}{\underline{\ \ }}\ \underset{5}{\underline{\ \ }}\ \underset{4}{\underline{\ \ }}$$

$7 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 5880$ **ou**

$7! \times {}^{7}A_{4} = 5880$

Resposta: (A)

16.2. ___ ___ ___ ___ ___

9	8	7	6	1	Terminados em 0
8	8	7	6	1	Terminados em 5

$9 \times 8 \times 7 \times 6 + 8 \times 8 \times 7 \times 6 = 5712$

Resposta: (B)

17. 10 compartimentos

Iogurtes naturais (iguais): 3

Iogurtes de fruta (diferentes): 4

$^{10}C_3 \times {}^7A_4 = 100\,800$

$^7A_4$ → escolha de 4 lugares para os iogurtes de fruta entre os 7 restantes (interessa a ordem)

$^{10}C_3$ → escolha de 3 lugares para os iogurtes naturais entre os 10 disponíveis (não interessa a ordem porque são iguais)

18. Mulheres : 4

Homens : 5

$\underline{+1}$ (advogado)

6

18.1. $^6C_2 \times {}^4C_3 = 60$

18.2. $^{10}C_5 - {}^6C_5 = 246$ **ou**

$^6C_1\,{}^4C_4 + {}^6C_2\,{}^4C_3 + {}^6C_3\,{}^4C_2 + {}^6C_4\,{}^4C_1 = 6 + 60 + 120 + 60 = 246$

18.3. $^4C_4 + {}^4C_3 \times {}^5C_1 + {}^4C_2 \times {}^5C_2 + {}^4C_1 \times {}^5C_3 = 1 + 20 + 60 + 40 = 121$

19.

Rapazes	Raparigas	
<u>10</u>	<u>12</u>	
2	1	Composição
1	2	da comissão

Os elementos da comissão podem ser escolhidos de $^{10}C_2 \times {}^{12}C_1 + {}^{10}C_1 \times {}^{12}C_2$ maneiras diferentes.

Os três cargos podem ser distribuídos pelos três elementos da comissão de $P_3 = 3!$ maneiras diferentes.

Logo, podem ser formadas $\left({}^{10}C_2 \times {}^{12}C_1 + {}^{10}C_1 \times {}^{12}C_2\right) \times 3! = 7200$ comissões mistas diferentes.

Pág. 59

20. $\dfrac{9!}{2! \times 4!} = 7560$ **ou** $^9C_2 \times {}^7C_4 \times 3! = 7560$

21. $\dfrac{5!}{3! \times 2!} = 10$ **ou** $^5C_3 \times {}^2C_2 = 10$

22. $\dfrac{20!}{14! \times 4! \times 2!} = 581\,400$ **ou** $^{20}C_{14} \times {}^6C_4 \times {}^2C_2 = 581\,400$

23. $\dfrac{8!}{3! \times 2!} = 3360$ **ou** $^8C_3 \times {}^5C_2 \times 3! = 3360$

24. X X X T T 2 2 2 3 3

$\frac{10!}{3!\times 2!\times 3!\times 2!} = 25\ 200$ **ou** ${}^{10}C_3 \times {}^{7}C_2 \times {}^{5}C_3 \times {}^{2}C_2 = 25\ 200$

25. 8 8 8 5 5 F F R R Y Y X

25.1. $\frac{12!}{3!\times 2!\times 2!\times 2!\times 2!} = 4\ 989\ 600$ **ou** ${}^{12}C_3 \times {}^{9}C_2 \times {}^{7}C_2 \times {}^{5}C_2 \times {}^{3}C_2 = 4\ 989\ 600$

25.2. Só há uma maneira de colocar os números: 5 5 8 8 8

Quanto às letras temos:

$\frac{7!}{2!\times 2!\times 2!} = 630$ **ou** ${}^{7}C_2 \times {}^{5}C_2 \times {}^{3}C_2 = 630$

$1 \times 630 = 630$

26. $\frac{15!}{5!\times 5!\times 5!} = 756\ 756$ **ou** ${}^{15}C_5 \times {}^{10}C_5 = 756\ 756$

27. $\frac{52!}{13!\times 13!\times 13!\times 13!} = \frac{52!}{(13!)^4}$ **ou** ${}^{52}C_{13} \times {}^{39}C_{13} \times {}^{26}C_{13} \times {}^{13}C_{13}$

28.1. $\frac{15!}{5!\times 5!\times 5!\times 3!} = 126\ 126$ **ou** $\frac{{}^{15}C_5 \times {}^{10}C_5 \times {}^{5}C_5}{3!} = 126\ 126$

28.2. $\frac{15!}{6!\times 6!\times 3!\times 2!} = 210\ 210$ **ou** $\frac{{}^{15}C_6 \times {}^{9}C_6 \times {}^{3}C_3}{2!} = 210\ 210$

29. $\frac{7!}{3!\times 2!\times 2!} = 210$ **ou** ${}^{7}C_3 \times {}^{4}C_2 \times {}^{2}C_2 = 210$

30. $\frac{7!}{2!\times 2!\times 3!\times 2!} = 105$ **ou** $\frac{{}^{7}C_2 \times {}^{5}C_2 \times {}^{3}C_3}{2!} = 105$

31. Diretor + 7 = 8

31.1. ${}^{7}C_3 = 35$ (o diretor mais três pessoas escolhidas entres as restantes sete)

31.2. ${}^{8}C_2 + {}^{8}C_3 + {}^{8}C_4 + {}^{8}C_5 + {}^{8}C_6 + {}^{8}C_7 + {}^{8}C_8 = 2^8 - {}^{8}C_0 - {}^{8}C_1 = 256 - 1 - 8 = 247$

31.3. ${}^{8}C_1 + {}^{8}C_2 + {}^{8}C_3 + {}^{8}C_4 + {}^{8}C_5 + {}^{8}C_6 = 2^8 - {}^{8}C_0 - {}^{8}C_7 - {}^{8}C_8 = 256 - 1 - 8 - 1 = 246$

32. ${}^{8}C_2 + {}^{8}C_3 + {}^{8}C_4 + {}^{8}C_5 + {}^{8}C_6 + {}^{8}C_7 + {}^{8}C_8 = 2^8 - {}^{8}C_0 - {}^{8}C_1 = 2^8 - 1 - 8 = 2^8 - 9$

Resposta: (D)

33. A linha com 13 elementos corresponde a $n = 12$. Os elementos desta linha são da forma ${}^{12}C_p$.

O quarto elemento é ${}^{12}C_3$.

Resposta: (B)

34. Os dois últimos elementos de uma linha do triângulo de Pascal são iguais aos dois primeiros: 1, n

$1 \times n = 55 \Leftrightarrow n = 55$

Os elementos da linha anterior são da forma ${}^{54}C_p$.

54 : 2 = 27

O maior elemento desta linha é ${}^{54}C_{27}$.

Resposta: (B)

35. A soma dos dois últimos elementos é igual à soma dos dois primeiros: 1 e n

$1 + n = 25 \Leftrightarrow n = 24$

A linha anterior é formada pelos elementos da forma ${}^{23}C_p$.

${}^{23}C_0 + {}^{23}C_1 + {}^{23}C_2 = 1 + 23 + 253 = 277$

Resposta: (A)

36. $n \times 1 = 200 \Leftrightarrow n = 200$

Trata-se da linha dos elementos da forma ${}^{200}C_p$.

${}^{200}C_0 = 1$; ${}^{200}C_1 = 200$; ${}^{200}C_2 = 19\,900$; ${}^{200}C_3 = 1\,313\,400 > 1\,000\,000$

Apenas os três primeiros elementos e os três últimos são inferiores a um milhão.
Como a linha tem 201 elementos, há 201 – 6 = 195 que são superiores a um milhão.

Resposta: (B)

37. Os elementos da linha seguinte são da forma ${}^{399}C_p$.

$a + b + c + d = 1 + 399 + 399 + 1 = 800$

Resposta: (B)

38. O segundo e o penúltimo elemento de uma linha de triângulo de Pascal são iguais a n.

$n \times n = 121 \Leftrightarrow n^2 = 121$. Como $n \geq 0$, temos $n = 11$.

O terceiro elemento dessa linha é ${}^{11}C_2 = 55$

Resposta: (D)

39.

$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & & a & & b\,\ldots & \\ 1 & & x & & y\,\ldots & & \end{array}$$

$x = 1 + a \Leftrightarrow x - a = 1$; $y = a + b \Leftrightarrow \dfrac{a+b}{y} = 1$; $1 + 2a + b = x + y$

Resposta: (C)

40. $(x-2)^4 = \sum_{p=0}^{4} {}^4C_p x^{4-p}(-2)^p = {}^4C_0 x^4(-2)^0 + {}^4C_1 x^3(-2)^1 + {}^4C_2 x^2(-2)^2 + {}^4C_3 x(-2)^3 + {}^4C_4 x^0(-2)^4 =$

$= x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$

$(x-2)^4 = 12x^2 - 32x + 16 \Leftrightarrow x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16 = 12x^2 - 32x + 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^4 - 8x^3 + 12x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2\left(x^2 - 8x + 12\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = 0 \vee x^2 - 8x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \dfrac{8 \pm \sqrt{64-48}}{2} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \vee x = 6$

$S = \{0\,,2\,,6\}$

41.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

$\left(2-\sqrt{2}\right)^5 =$

$= 1\times 2^5 \times\left(-\sqrt{2}\right)^0 + 5\times 2^4\times\left(-\sqrt{2}\right)^1 + 10\times 2^3\times\left(-\sqrt{2}\right)^2 +$

$+10\times 2^2\times\left(-\sqrt{2}\right)^3 + 5\times 2^1\times\left(-\sqrt{2}\right)^4 + 1\times 2^0\times\left(-\sqrt{2}\right)^5 =$

$= 32 - 80\sqrt{2} + 160 - 80\sqrt{2} + 40 - 4\sqrt{2} = 232 - 164\sqrt{2}$

42. $\left(x^2 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{15} = \sum_{p=0}^{15} {}^{15}C_p \left(x^2\right)^{15-p}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^p =$

$T_{p+1} = {}^{15}C_p x^{30-2p}\left(-1\times x^{-\frac{1}{2}}\right)^p = {}^{15}C_p x^{30-2p}\times(-1)^p\times x^{-\frac{p}{2}} = {}^{15}C_p(-1)^p\,x^{30-2p-\frac{p}{2}}$

42.1. O termo que não depende de x é do tipo ax^0.

$30 - 2p - \dfrac{p}{2} = 0 \Leftrightarrow 60 - 4p - p = 0 \Leftrightarrow 5p = 60 \Leftrightarrow p = 12$

$T_{12+1} = {}^{15}C_{12}(-1)^{12}\,x^0 = 455$

42.2. $30 - 2p - \dfrac{p}{2} = 15 \Leftrightarrow 60 - 4p - p = 30 \Leftrightarrow 5p = 30 \Leftrightarrow p = 6$

$T_{6+1} = {}^{15}C_6(-1)^6\,x^{15} = 5005x^{15}$

43. $\left(a^{10}+1\right)^7 = \sum_{p=0}^{7} {}^7C_p\left(a^{10}\right)^{7-p}\times 1^p = a^{70} + 7a^{60} + \ldots + 7a^{10} + 1$

$\left(a^{10}+1\right)^8 = \sum_{p=0}^{8} {}^8C_p\left(a^{10}\right)^{8-p}\times 1^p = a^{80} + 8\times a^{70} + \ldots + 8\times a^{10} + 1$

$\left(a^{10}+1\right)^9 = \sum_{p=0}^{9} {}^9C_p\left(a^{10}\right)^{9-p}\times 1^p = a^{90} + 9\times a^{80} + \ldots + 9\times a^{10} + 1 > a^{90} + 9\times a^{10} + 1$

Resposta: (C)

Pág. 63

44. Raparigas : 3
Rapazes : $\underline{\ \ 4}$
7

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$4!\times 6\times {}^{5}A_{3}=8640$

Resposta: (B)

45. 253 $\underset{7}{\underline{\quad}}\ \underset{6}{\underline{\quad}}\ \underset{5}{\underline{\quad}}\ \underset{4}{\underline{\quad}}\ \underset{3}{\underline{\quad}}\ \underset{2}{\underline{\quad}}$

Os restantes 6 algarismos formam uma sequência de elementos distintos escolhidos entre 7 elementos.
O seu número é dado por ${}^{7}A_{6}$.

Resposta: (B)

46. ${}^{8}C_{2}-4=24$

Resposta: (A)

47. $\left(\underbrace{{}^{10}C_{1}\times {}^{12}C_{1}+{}^{12}C_{2}}\right)\times 2=372$

Distribuição dos cargos
Número de maneiras diferentes de escolher os dois alunos – um rapaz e uma rapariga ou duas raparigas

Resposta: (C)

48.

Margaridas	Orquídeas	
7	5	
5	1	**Irmã**
4	2	
3	3	
2	4	**Mãe**

${}^{7}C_{2}\times {}^{5}C_{4}$ ou ${}^{7}C_{5}\times {}^{5}C_{1}$

Resposta: (A)

49. Medalhas : 4
Salvas : 2
Taças : $\underline{\quad 3}$ (iguais)
9

${}^{12}A_{6}\times {}^{6}C_{3}$ ou ${}^{12}C_{3}\times {}^{9}A_{6}$

Resposta: (D)

50.

Raparigas	Rapazes
12	8
2	1
1	2

$\left({}^{12}C_2 \times {}^{8}C_1 + {}^{12}C_1 \times {}^{8}C_2\right) \times 3!$

Resposta: (C)

51. ${}^{24}C_2 \times 3! = 1656$

Resposta: (B)

52. ${}^{5}C_3 \times 3 \times \underline{2 \times 2 \times 2} = 240$

Na 2.ª, 3.ª e 4.ª tiras não se pode repetir a cor da tira anterior.

Há 3 cores à escolha para a 1.ª tira

Número de maneiras de escolher 3 cores entre as 5 disponíveis.

Resposta: (A)

53. As quatro cores podem ser escolhidas de ${}^{5}C_4$ maneiras diferentes.

Vamos supor que foram escolhidas as 4 cores *A*, *B*, *C* e *D*.

Como as faces são todas iguais é indiferente a escolha da cor para pintar a primeira face. Seja, por exemplo, *D* a cor escolhida. Sobram as cores *A*, *B* e *C* para as restantes 3 faces.

Na planificação do tetraedro haveria 3! maneiras de pintar as três faces com as três cores. Repare-se, no entanto, que as sequências *ABC*, *BCA* e *CAB* conduzem a tetraedros iguais.

Portanto, só temos $\frac{3!}{3} = 2$ maneiras diferentes de pintar o tetraedro (*DABC* e *DACB*).

O tetraedro pode ser pintado de ${}^{5}C_4 \times 2$ maneiras diferentes.

Resposta: (C)

Pág. 64

54.

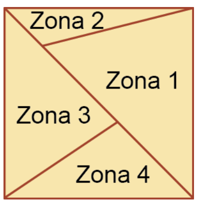
Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
6	5	4	4

Diferente de Z_1 e de Z_3

Diferente de Z_1 e de Z_2

Diferente de Z_1

Há 6 cores disponíveis



$6 \times 5 \times 4 \times 4 = 480$

Resposta: (A)

55. A soma dos dois últimos elementos de uma linha do Triângulo de Pascal é igual à soma dos dois primeiros. Como o primeiro elemento é 1 tem-se que o segundo é 20, pois a soma é 21.

Então, ${}^{n}C_1 = 20 \Leftrightarrow n = 20$

O terceiro elemento da linha correspondente a $n = 20$ é ${}^{20}C_2 = 190$

$1 + 20 + 190 = 211$

Resposta: (D)

56. Os dois primeiros elementos e os dois últimos de uma linha do triângulo de Pascal tem a forma

$1 \quad n \quad \ldots \quad n \quad 1$

O produto destes quatro elementos é igual a 121.

Logo, $n^2 = 121$ pelo que, como $n > 0$, temos $n = 11$.

A linha seguinte corresponde a $n = 12$ e, portanto, tem 13 elementos. O maior elemento desta linha é o elemento central que é igual a ${}^{12}C_6 = 924$

Resposta: (C)

57.

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & & n & & 190\ldots \\ 1 & & 1+n & & 210\ldots \end{array}$$

$n + 190 = 210 \Leftrightarrow n = 20$

Resposta: (B)

58. $1 \quad n \quad \ldots \quad n \quad 1$

$n + 1 = 31 \Leftrightarrow n = 30$

$1 + 30 + {}^{30}C_2 = 31 + 435 = 466$

Resposta: (C)

59. A linha do Triângulo de Pascal com 12 elementos é a linha correspondente a $n = 11$. A soma dos elementos desta linha é $2^{11} = 2048$.

Resposta: (B)

60. ${}^{2014}C_{100} + {}^{2014}C_{101} = {}^{2015}C_{101} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow {}^{2015}C_{101} - {}^{2014}C_{101} = {}^{2014}C_{100}$

$$\frac{{}^{2015}C_{101} - {}^{2014}C_{101}}{{}^{2014}C_{100}} = \frac{{}^{2014}C_{100}}{{}^{2014}C_{100}} = 1$$

Resposta: (B)

61. O segundo elemento de uma linha do triângulo de Pascal é igual ao penúltimo. Seja n o segundo elemento dessa linha.

Então $n \times n = 169 \Leftrightarrow n^2 = 169 \overset{n>0}{\Leftrightarrow} n = 13$.

A linha seguinte é a correspondente a $n = 14$ e é formada por elementos da forma ${}^{14}C_p$. O maior elemento dessa linha é ${}^{14}C_7 = 3432$.

Resposta: (D)

62.

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccccc} & a & & b & & c & & d & & e & & f & & g & & h & & i & & j & & k \\ w & & x & & y & & z & & & & & & & & z & & y & & x & & w & \end{array}$$

- $c + d = z$
- $a \times b \times j \times k =$ $\quad \left| \begin{array}{l} a = k = 1 \\ j = b \end{array} \right.$

$= 1 \times b \times b \times 1 = b^2$

- A linha indicada tem 11 elementos, logo trata-se da linha de ordem 10 $(n=10)$. A linha seguinte corresponde a $n = 11$.

  Logo, $w = {}^{11}C_0 = 1$, $x = {}^{11}C_1 = 11$, $y = {}^{11}C_2$ e $z = {}^{11}C_3$.
- $a = 1$, $b = 10$, $j = 10$ e $k = 1$

  $a+b+j+k = 1+10+10+1 = 22 \neq 24$

Resposta: (D)

63. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^8 = \sum_{p=0}^{8} {}^8C_p x^{8-p}\left(\frac{1}{x}\right)^p = {}^8C_p x^{8-p} x^{-p} = {}^8C_p x^{8-2p}$

- desenvolvimento tem nove termos
- por exemplo, ${}^8C_0 = {}^8C_8$
- $8-2p=3 \Leftrightarrow 2p=5 \Leftrightarrow p=\frac{5}{2} \notin \mathbb{Z}$

  Não tem um termo da forma kx^3.
- $8-2p=0 \Leftrightarrow 2p=8 \Leftrightarrow p=4$

  Para $p=4$ obtém-se o termo ${}^8C_4 x^0 = 70$

Resposta: (D)

64. $(x+y)^n = \sum_{p=0}^{n} {}^nC_p x^{n-p} y^p$

$kx^5y^7 = {}^nC_p x^{n-p} y^p$

$\begin{cases} n-p=5 \\ p=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n-7=5 \\ p=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=12 \\ p=7 \end{cases}$

$k = {}^{12}C_7 = 792$

Resposta: (A)

65. $\left(1-\sqrt{3}\right)^5 = \sum_{p=0}^{5} {}^5C_p 1^{5-p} \times \left(-\sqrt{3}\right)^p =$

$= 1\times\left(-\sqrt{3}\right)^0 + 5\times\left(-\sqrt{3}\right)^1 + 10\times\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 10\times\left(-\sqrt{3}\right)^3 + 5\times\left(-\sqrt{3}\right)^4 + 1\times\left(-\sqrt{3}\right)^5 =$

$= 1 - 5\sqrt{3} + 30 - 30\sqrt{3} + 45 - 9\sqrt{3} = 76 - 44\sqrt{3}$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \end{array}$$

$a = 76$ e $b = -44$

Resposta: (B)

66. $(x-y)^{20} = \sum_{p=0}^{20} {}^{20}C_p x^{20-p} (-y)^p$

$T_{p+1} = {}^{20}C_p x^{20-p} (-y)^p$

Se $p = 3$, $T_4 = {}^{20}C_3 x^{17} (-y)^3 = -1140x^{17}y^3$

Se $p = 17$, $T_{18} = {}^{20}C_{17} x^3 (-y)^{17} = -1140x^3y^{17}$

Resposta: (B)

67.1. $\frac{1}{4}\ \frac{2}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{4}\ \frac{5}{4}\ \frac{6}{4}\ \frac{7}{4}\ \frac{8}{4}$

$^4A'_8 = 4^8 = 65\,536$

67.2. Por exemplo, se as primeiras cinco respostas estiverem corretas e as restantes três estiverem erradas temos as seguintes hipóteses:

$\frac{1}{1}\ \frac{2}{1}\ \frac{3}{1}\ \frac{4}{1}\ \frac{5}{1}\ \frac{6}{3}\ \frac{7}{3}\ \frac{8}{3}$

$1^5 \times 3^3$

As cinco respostas certas podem ser escolhidas de $^8C_5$ maneiras diferentes.

Logo, há $^8C_5 \times 3^3 = 1512$ possibilidades.

67.3. Uma vez que o estudante conhece a resposta para cinco das questões, restam quatro possibilidades para cada uma das restantes três, ou seja, $4^3 = 64$ possibilidades.

68. Brancas: 8

Pretas: 12

68.1. $^{25}C_8 \times {}^{17}C_{12} = 6\,692\,786\,100$

68.2.

B				
	B			
		B		
B	*B*		*B*	
	B			*B*

	B			*B*
			B	
		B		*B*
	B		*B*	
B				

$2 \times {}^{20}C_3 \times {}^{17}C_{12} = 14\,108\,640$

68.3.

P		*P*		*P*
	P		*P*	
		P		*P*
	P		*P*	
P		*P*		*P*

P				*P*
	P		*P*	
P		*P*		*P*
	P		*P*	
P		*P*		*P*

$2 \times {}^{20}C_7 \times {}^{13}C_8 - \underbrace{{}^{16}C_3 \times {}^{13}C_8} = 198\,815\,760$

Os tabuleiros com as duas diagonais preenchidas com peças pretas aparecem em duplicado.

69. $6! - 4! \times 2! \times 5 = 480$

70. $A = \{1, 2, 3, ..., 19, 20\}$

Em A há 10 números pares e 10 números ímpares.

Para que a soma dos três números escolhidos seja um número par, entre esses números terá de haver:

(i) três número pares **ou**

(ii) dois números ímpares e um número par

Há $^{10}C_3$ maneiras de escolher três números pares e $^{10}C_2 \times {}^{10}C_1$ maneiras de escolher dois números ímpares e um número par.

Temos, portanto, $^{10}C_3 + {}^{10}C_2 \times {}^{10}C_1 = 570$ possibilidades de escolha.

71. $A=\{x\in\mathbb{N}:\ x\leq 50\}$

Em A é possível definir ${}^{50}C_2$ subconjuntos de dois elementos. Entre esses há 49 subconjuntos de dois elementos consecutivos $(\{1\,,2\}\,,\{2\,,3\}\,,\{3\,,4\}\,,\ldots,\{49\,,50\})$.

Logo, há ${}^{50}C_2-49=1176$ subconjuntos de dois elementos não consecutivos.

72.1. $4!\times 2!\times 3!\times 3! = 1728$

72.2. $4!\times 5!\times 6 = 17\,280$

72.3. $6!\times {}^{7}A_3=151\,200$

73. 1 2 2 3 3 3 4 4 4 4

$\frac{10!}{2!\times 3!\times 4!}=12\,600$ **ou** ${}^{10}C_2\times{}^{8}C_3\times{}^{5}C_4=12\,600$

74. C C C B B A L M

74.1. ${}^{8}C_3\times{}^{5}C_2=560$

74.2. ${}^{8}C_3\times{}^{5}C_2\times 3!=3360$

75. Homens: 6

Mulheres: 4

10

75.1. ${}^{10}C_2+{}^{10}C_3+\ldots+{}^{10}C_{10}=2^{10}-{}^{10}C_0-{}^{10}C_1=1024-1-10=1013$

75.2.

H	M	Total
6	4	10
5	0	5

${}^{10}C_5-{}^{6}C_5=246$

75.3.

H	M	Total
6	4	10
1	2	3
2	1	

$\left({}^{6}C_1\times{}^{4}C_2+{}^{6}C_2\times{}^{4}C_1\right)\times 3!=576$

Pág. 66

76. A **R D** V 8 9 10

76.1. $3!\times 4!\times 5=720$

76.2. $4!\times 5=120$

76.3. $7!-2!\times 5!\times 6=3600$

76.4. $4!\times{}^{5}A_3=1440$

77.1. $\dfrac{15!}{5!\times 5!\times 5!\times 3!}=126\,126$ **ou** $\dfrac{{}^{15}C_5\times{}^{10}C_5\times{}^{5}C_5}{3!}=126\,126$

77.2. $\dfrac{15!}{7!\times 4!\times 4!\times 2!}=225\,225$ **ou** $\dfrac{{}^{15}C_7\times{}^{8}C_4\times{}^{4}C_4}{2!}=225\,225$

77.3. $\dfrac{15!}{6!\times 5!\times 4!}=630\,630$ **ou** ${}^{15}C_6\times{}^{9}C_5\times{}^{4}C_4=630\,630$

78. $\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}=\left[\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]^{10}=\left(\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\right)^{10}$

$\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^{10}=\sum_{p=0}^{10}{}^{10}C_p x^{10-p}\times\left(-\dfrac{1}{x}\right)^p$

$T_{p+1}={}^{10}C_p x^{10-p}\left(-1\times x^{-1}\right)^p={}^{10}C_p x^{10-p}\times(-1)^p\times x^{-p}={}^{10}C_p\,(-1)^p\,x^{10-2p}$

$10-2p=0\Leftrightarrow 2p=10\Leftrightarrow p=5$

$T_6={}^{10}C_5\times(-1)^5\times x^0=-252$

79. $\left(2x^2y-\dfrac{1}{2}\right)^8=\sum_{p=0}^{8}{}^{8}C_p\left(2x^2y\right)^{8-p}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^p$

$T_{p+1}={}^{8}C_p 2^{8-p}x^{16-2p}y^{8-p}\times(-2)^{-p}={}^{8}C_p 2^{8-p}\times(-2)^{-p}\times x^{16-2p}y^{8-p}$

$\begin{cases}16-2p=6\\8-p=i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2p=10\\8-p=i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}p=5\\i=3\end{cases}$

$T_6={}^{8}C_5\times 2^3\times(-2)^{-5}\times x^6y^3=-14x^6y^3$

$k=-14$ e $i=3$

80. A R R A I A L

80.1. $\dfrac{7!}{3!\times 2!}=420$

80.2. A <u>R R A I L</u> A

$\dfrac{5!}{2!}=60$

80.3. R R I L

${}^{5}C_3\times\dfrac{4!}{2!}=10\times 12=120$

Possíveis ordenações de R R I L

Possíveis posições dos A A A entre –R–R–I–L–

81.1. ${}^{20}C_{n+1}={}^{20}C_{4n-1}\Leftrightarrow\left[n+1=4n-1\vee n+1=20-(4n-1)\right]\wedge 20\geq n+1\wedge 20\geq 4n-1\wedge n\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(3n=2\vee n+1=20-4n+1)\wedge n\leq 19\wedge n\leq\dfrac{21}{4}\wedge n\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\left(n=\dfrac{2}{3}\vee 5n=20\right)\wedge n\leq 5\wedge n\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow n=4$

81.2. $^{3n}C_2 = 5\times {}^{n}A_2 + 3 \Leftrightarrow \dfrac{3n(3n-1)}{2} = 5\times n(n-1)+3 \wedge 3n \geq 2 \wedge n \geq 2 \wedge n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9n^2 - 3n = 10n^2 - 10n + 6 \Leftrightarrow n \geq 2 \wedge n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -n^2 + 7n - 6 = 0 \wedge n \geq 2 \wedge n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = \dfrac{-7 \pm \sqrt{49-24}}{-2} \wedge n \geq 2 \wedge n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (n = 6 \vee n = 1) \wedge n \geq 2 \wedge n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = 6$

82. $\dfrac{12!}{3!\times 3!\times 2!\times 2!\times 2!\times 2!\times 3!} = 138\,600$ **ou** $\dfrac{^{12}C_3 \times {}^{9}C_3 \times {}^{6}C_2 \times {}^{4}C_2 \times {}^{2}C_2}{2!\times 3!} = 138\,600$

83. $\dfrac{12!}{3!\times 3!\times 2!\times 2!\times 2!} = 1\,663\,200$ **ou** $^{12}C_3 \times {}^{9}C_3 \times {}^{6}C_2 \times {}^{4}C_2 \times {}^{2}C_2 = 1\,663\,200$

84. Depois de cada pessoa receber um bombom sobram dois.
Estes dois bombons podem ser distribuídos de

$4 + {}^{4}C_2 = 4 + 6 = 10$ maneiras diferentes.

→ Duas das quatro pessoas recebem um bombom cada.
→ Uma pessoa recebe dois bombons.

85.1. $^{10}C_2 - 10 = 35$

85.2. $^{10}C_3 = 120$

85.3. $10 \times {}^{6}C_1 = 60$

85.4. 10. Há 10 maneiras diferentes de escolher 2 lados seguidos do polígono. O terceiro lado fica univocamente determinado.

85.5. $^{10}C_3 - 60 - 10 = 50$

86.1. $^{8}C_3 = 56$

86.2. Os lados dos triângulos cujos vértices do cubo podem ser:

(i) duas arestas e a diagonal da respetiva face (triângulos retângulos isósceles)

(ii) três diagonais faciais (triângulos equiláteros)

(iii) uma aresta, uma diagonal facial e uma diagonal espacial (três lados diferentes)

Os triângulos isósceles não equiláteros são do tipo (i). Em cada lado são definidos $^{4}C_1 = 4$ pelo que no total são definidos $6 \times {}^{4}C_1 = 24$

86.3. O cubo tem quatro diagonais espaciais. Cada diagonal espacial é o lado de seis triângulos (os extremos da diagonal são dois vértices do triângulo sendo o terceiro vértice escolhido entre os restantes seis vértices do cubo). Portanto, há $4 \times 6 = 24$ triângulos nestas condições (são os do tipo (iii)).

86.4. 56 – 24 – 24 = 8

Tema 2: Probabilidades

Pág. 68

1. Número de casos possíveis: $6 \times 6 \times 6 = 216$

Número de casos favoráveis: $6 \times 5 \times 4 = 120$

$$P = \frac{120}{216} = \frac{5}{9}$$

Pág. 69

2.1. Número de casos possíveis: ${}^{40}C_5 = 658\ 008$

a)

Pretas	Vermelhas	
20	20	Número de elementos disponíveis
2	3	Número de elementos a escolher

Número de casos favoráveis:

${}^{20}C_2 \times {}^{20}C_3 = 190 \times 1140 = 216\ 600$

$$P = \frac{216\ 600}{658\ 008} \approx 33\%$$

b)

Reis	Outras
4	36
1	4

Número de casos possíveis:

${}^{4}C_1 \times {}^{36}C_4 = 4 \times 58\ 905 = 235\ 620$

$$P = \frac{235\ 620}{658\ 008} \approx 36\%$$

2.2. O baralho ficou com $40 - n$ bolas sendo 20 pretas e $20 - n$ vermelhas.

Número de casos possíveis: ${}^{40-n}C_2$ (é o número de maneiras de escolher duas cartas entre as $40 - n$ que agora estão no baralho)

Número de casos favoráveis: ${}^{20}C_1 \times {}^{20-n}C_1 = 20(20-n)$ (é o número de maneiras de escolher duas cartas sendo uma preta e a outra vermelha)

Temos, portanto,

$$\frac{20(20-n)}{{}^{40-n}C_2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 60(20-n) = {}^{40-n}C_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1200 - 60n = \frac{(40-n)(39-n)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2400 - 120n = n^2 - 79n + 1560 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 41n - 840 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-41 \pm \sqrt{41^2 + 4 \times 840}}{2} \Leftrightarrow n = 15 \vee n = -56$$

Como $n \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq n \leq 20$, vem $n = 15$.

Foram retiradas 15 cartas vermelhas pelo que, antes da extração de duas cartas estavam no baralho 25 cartas.

3. Número de casos possíveis: $P_5 = 5! = 120$

Número de casos favoráveis:

$2! \times 3! \times 4 = 48$

- 4 → Número de posições que o par de namorados pode ocupar (princípio da fila, fim da fila ou entre os 3 amigos)
- $3!$ → Número de maneiras de os 3 amigos ocuparem os 3 lugares
- $2!$ → Número de maneiras de o casal de namorados ocupar os 2 lugares.

$$P = \frac{48}{120} = \frac{2}{5}$$

4. Número de casos possíveis: $5! = 120$

Número de casos favoráveis:

Comecemos por determinar o número de maneiras de dispor as 5 cartas de forma que os três reis ocupem lugares consecutivos:

$3! \times 2! \times 3 = 36$

- 3 → número de posições que o grupo dos 3 reis pode ocupar no princípio da fila, no fim ou entre as restantes duas cartas
- $2!$ → número de maneiras de ordenar os dois ternos
- $3!$ → número de maneiras de ordenar os três reis

O número de casos favoráveis é, então 120 – 36 = 84

$$P = \frac{84}{120} = \frac{7}{10}$$

5. Número de casos possíveis: 6!

Número de casos favoráveis:

$2! \times 2! \times 2! \times 3! = (2!)^3 \times 3!$

$$P = \frac{(2!)^3 \times 3!}{6!}$$

Resposta: (C)

6. Número de casos possíveis

$$\underset{10}{\underline{\qquad}}\ \underset{10}{\underline{\qquad}}\ \underset{10}{\underline{\qquad}}\ \underset{10}{\underline{\qquad}}$$

$10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$

Número de casos favoráveis:

$\underset{1}{\underline{0}}\ \underset{9}{\underline{\ }}\ \underset{1}{\underline{\ }}\ \underset{1}{\underline{\ }}$ (zero no 1.º algarismo)

$\underset{9}{\underline{\ }}\ \underset{1}{\underline{0}}\ \underset{1}{\underline{\ }}\ \underset{1}{\underline{\ }}$ (zero no 2.º algarismo)

$9 + 9 = 18$

$$P = \frac{18}{10^4} = 0{,}0018$$

Resposta: (A)

7. Número de casos possíveis: ${}^{6}C_3 = 20$

Número de casos favoráveis: $3 \times {}^{4}C_3 = 12$

$$P = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

Resposta: (B)

8. Número de casos favoráveis: ${}^{12}C_2 = 66$

Casos favoráveis: 3 $\left[\ (1 , 12) , (2 , 6) , \text{e } (3 , 4)\ \right]$

$$P = \frac{3}{66} = \frac{1}{22}$$

Resposta: (B)

9. Número de casos possíveis: 12 × 12 = 144

Casos favoráveis: 6

[(1 , 12) , (2 , 6) , (3 , 4) , (4 , 3) , (6 , 2) e (12 , 1)]

$$P = \frac{6}{144} = \frac{1}{24}$$

Resposta: (D)

10. Número de casos possíveis: ${}^{25}C_3$

Número de casos favoráveis: 23

[(**1** , 2 , 3) , (**2** , 3 , 4) , (**3** , 4 , 5), … , (**23** , 24 , 25)]

$$P = \frac{23}{{}^{25}C_3}$$

Resposta: (B)

11. Os quatro menores elementos de uma linha do Triângulo de Pascal são os dois primeiros e os dois últimos:

1 $\quad n \quad \ldots \quad n \quad$ 1

$$1 \times n \times n \times 1 = 144 \Leftrightarrow n^2 = 144 \overset{n \in \mathbb{N}}{\Leftrightarrow} n = 12$$

Trata-se da linha de ordem 12 $(n = 12)$ que tem 13 elementos.

Número de casos possíveis: ${}^{13}C_2 = 78$.

Para que o produto seja 12 os dois elementos terão de ser 1 e 12. Para cada um há duas hipóteses de escolha. Logo, o número de casos possíveis é dado por 2 × 2 = 4

A probabilidade pedida é $\frac{4}{78} = \frac{2}{39}$

Resposta: (A)

12. Se a linha do Triângulo de Pascal tem n elementos, o segundo elemento dessa linha é igual a $n-1$ e há $n-4$ elementos superiores ao segundo (apenas os dois primeiros elementos e os dois últimos não são superiores ao segundo)

$$\frac{n}{n-4}=\frac{6}{7}$$

$$\frac{n-4}{n}=\frac{6}{7} \Leftrightarrow 7n-28=6n \Leftrightarrow n=28$$

Resposta: (D)

13. Bolas brancas: 36
Bolas pretas: $\underline{\quad n}$
$36 + n$

$$\frac{n}{36+n}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3n=36+n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2n=36 \Leftrightarrow n=18$$

Resposta: (B)

14. Número de casos possíveis: ${}^{9}C_5=126$

Número de casos favoráveis:

$${}^{5}C_4 \times {}^{4}C_1 + {}^{5}C_5 = 5\times 4\times 1 = 21$$

→ Número de maneiras de escolher cinco vértices entre os cinco vértices da pirâmide

→ Número de maneiras de escolher quatro vértices entre os cinco vértices da pirâmide e um entre os quatro restantes

$$P=\frac{21}{126}=\frac{1}{6}$$

Pág. 73

15. Brancas: 5
Pretas: 3
Amarelas: $\underline{\ \ 2}$
10

Número de casos possíveis: ${}^{10}C_3=120$

15.1. <u>Brancas</u> <u>Outras</u>

$\underline{\ 5\ }$ $\underline{\ 5\ }$
3 0

Número de casos favoráveis: ${}^{5}C_3=10$

$$P=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$$

15.2. Podem ser três bolas brancas ou três bolas pretas.

Número de casos favoráveis: ${}^{5}C_3+{}^{3}C_3=11$

$$P=\frac{11}{120}$$

15.3. Tem de ser uma bola de cada cor ou três bolas pretas

Número de casos favoráveis: ${}^{5}C_1 \times {}^{3}C_1 \times {}^{2}C_1 + {}^{3}C_3 = 31$

$$P = \frac{31}{120}$$

15.4.

Pretas	Outras
3	7
2	1
3	0

Número de casos possíveis: ${}^{3}C_2 \times {}^{7}C_1 + {}^{3}C_3 = 22$

$$P = \frac{22}{120} = \frac{11}{60}$$

16. Número de casos possíveis: ${}^{15}C_7$ (número de maneiras de definir na fila de 20 gladíolos a posição dos 7 gladíolos amarelos). Sejam os acontecimentos:

A : "Não haver dois gladíolos amarelos seguidos"

B : "Não haver dois gladíolos vermelhos seguidos"

Número de casos favoráveis a A : ${}^{9}C_7$ (número de maneiras de escolher a posição dos 7 gladíolos amarelos entres os 8 vermelhos bem como no início ou no fim da fila)

$$P(A) = \frac{{}^{9}C_7}{{}^{15}C_7} = \frac{36}{6435}$$

Número de casos favoráveis a B : ${}^{8}C_8 = 1$

$$P(B) = \frac{1}{{}^{15}C_7} = \frac{1}{6435}$$

É 36 vezes mais provável não haver gladíolos amarelos seguidos.

17. Número de casos possíveis: ${}^{52}C_{13}$

17.1.

Paus	Outras
13	39
7	6

Número de casos favoráveis: ${}^{13}C_7 \times {}^{39}C_6$

$$P = \frac{{}^{13}C_7 \times {}^{39}C_6}{{}^{52}C_{13}} \approx 0{,}9\%$$

17.2. Número de casos favoráveis: $4 \times {}^{13}C_7 \times {}^{39}C_6$

$$P = \frac{4 \times {}^{13}C_7 \times {}^{39}C_6}{{}^{52}C_{13}} \approx 3{,}5\%$$

17.3.

Ases	Outras
4	48
4	9

Número de casos favoráveis: ${}^{4}C_4 \times {}^{48}C_9$

$$P = \frac{{}^{48}C_9}{{}^{52}C_{13}} \approx 0{,}3\%$$

17.4. Número de casos favoráveis ao acontecimento contrário: ${}^{39}C_{13}$

$$P = 1 - \frac{{}^{39}C_{13}}{{}^{52}C_{13}} \approx 98{,}7\%$$

18.1.

Resolvidos	Não resolvidos	Total
40	10	50
4	0	4

Número de casos possíveis: ${}^{50}C_4$

Número de casos favoráveis: ${}^{40}C_4$

$$P = \frac{{}^{40}C_4}{{}^{50}C_4} \approx 39{,}7\%$$

18.2.

Resolvidos	Não resolvidos	Total
40	10	50
0	4	4

Número de casos possíveis: ${}^{50}C_4$

Número de casos favoráveis: ${}^{50}C_4 - {}^{10}C_4$

$$P = \frac{{}^{50}C_4 - {}^{10}C_4}{{}^{50}C_4} \approx 99{,}9\%$$

19. Número de casos possíveis: ${}^{5}A'_7 = 5^7$

19.1. Número de casos favoráveis: ${}^{7}C_3 \times {}^{4}A'_4 = {}^{7}C_3 \times 4^4$

$$P = \frac{{}^{7}C_3 \times 4^4}{5^7} \approx 11{,}5\%$$

19.2. Número de casos favoráveis: $5 \times {}^{7}C_3 \times 4!$

$$P = \frac{5 \times {}^{7}C_3 \times 4!}{5^7} \approx 5{,}4\%$$

19.3. Número de casos favoráveis:

Faces:	△	△	△	□	□	□	□
Número de opções:	2	2	2	3	3	3	3

$$P = \frac{2^3 \times 3^4}{5^7} \approx 0{,}8\%$$

20. Número de casos possíveis:

1	2	3	__	__	__
1	1	1	10	10	10

$4 \times 10^3 - 2 = 3998$

→ A sequência 123123, que aparece duas vezes, é de excluir.

→ A sequência 123 pode ocupar 4 posições

Número de casos favoráveis: 1

$$P = \frac{1}{3998}$$

21.1. Qualquer trajeto entre *P* e *Q* pode ser definido por uma sequência de quatro *D* e dois *C* (são vértices de um retângulo de 4 por 2 tomando por unidade o lado da quadricula). Para definir um trajeto basta escolher nas seis posições possíveis da sequência o lugar das duas letras *D*, o que pode ser feito de ${}^{6}C_2$ maneiras diferentes.

21.2. Número de casos possíveis: ${}^{11}C_4$ (de *P* para *R* há sete *D* e quatro *C*)

Número de casos favoráveis:

$\underline{P \text{ para } Q}$ $\underline{Q \text{ para } P}$

${}^{6}C_2 \times {}^{5}C_2$

$$P = \frac{{}^{6}C_2 \times {}^{5}C_2}{{}^{11}C_4} = \frac{150}{330} = \frac{5}{11}$$

22. L L L L A A A

Número de casos possíveis

${}^{7}C_4 \times {}^{26}A'_4 \times {}^{10}A'_3 = 35 \times 26^4 \times 10^3$

- ${}^{10}A'_3$ → Número de maneiras de escolher ordenadamente os três algarismos, iguais ou diferentes
- ${}^{26}A'_4$ → Número de maneiras de escolher ordenadamente quatro letras, diferentes ou não
- ${}^{7}C_4$ → Número de maneiras de escolher a posição das quatro letras

Número de casos favoráveis:

$4 \times {}^{26}A'_4 \times {}^{10}C_3 = 4 \times 26^4 \times 120$

- ${}^{10}C_3$ → Número de maneiras de escolher os três algarismos
- ${}^{26}A'_4$ → Número de sequências de quatro letras
- 4 → Nmero de maneiras de colocar a sequência de quatro letras

$$P = \frac{4 \times 26^4 \times 120}{35 \times 26^4 \times 10^3} = \frac{12}{875} \approx 1,4\%$$

23. 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5

23.1. _ _ _ _

2 5 4 3

- 5 → diferente do 1.º algarismo
- 2 → pode ser 4 ou 5

2 × 5 × 4 × 3 = 120

23.2. Número de casos possíveis: ${}^{120}C_3$

a) Número de múltiplos de 5 que existem em A

_ _ _ _

2 4 3 1 ← (terminados em 0)

1 4 3 1 ← (terminados em 5)

2 × 4 × 3 + 4 × 3 = 36

Número de casos favoráveis

$${}^{36}C_2 \times {}^{84}C_1 + {}^{36}C_3$$

Três múltiplos de 5

Dois múltiplos de 5 e um número não múltiplo de 5.

$$P = \frac{{}^{36}C_2 \times 84 + {}^{36}C_3}{{}^{120}C_3} = \frac{429}{2006} \approx 21,4\%$$

b) Número de casos favoráveis

$${}^{5}C_3 + {}^{4}C_3 = 10 + 4 = 14$$

Números que começam por 4. Os outros três algarismos são escolhidos entre 0 , 1, 2 e 3.

Números começados por 5. Os outros três algarismos são escolhidos entre 0 ,1 , 2 , 3 e 4.

Há 14 números com algarismos por ordem decrescente

Número de casos favoráveis: ${}^{14}C_3$

$$P = \frac{{}^{14}C_3}{{}^{120}C_3} = \frac{13}{10\ 030} \approx 0,1\%$$

Pág. 76

24. A linha do Triângulo de Pascal constituída pelos elementos da forma ${}^{n}C_p$ tem $n + 1$ elementos dois dos quais são iguais a n.

Logo, $P = \dfrac{2}{n+1}$

Resposta: (D)

25. Depois de ser extraída uma bola branca ficaram na urna nove bolas entre as quais há três numeradas com números ímpares. Logo, a probabilidade pedida é $\dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$.

Resposta: (D)

26. Número de casos possíveis: ${}^{52}C_{13}$

Número de casos favoráveis

Naipe	Outras
13	39
7	6

$$4 \times {}^{13}C_7 \times {}^{39}C_6$$

$$P = \frac{4 \times {}^{13}C_7 \times {}^{39}C_6}{{}^{52}C_{13}}$$

Resposta: (B)

27.

Têxtil	Tabaco	Total
25	15	40
4	0	4

Número de casos possíveis: ${}^{40}C_4$

Número de casos favoráveis: ${}^{25}C_4$

$$P = \frac{{}^{25}C_4}{{}^{40}C_4}$$

Resposta: (C)

28. Número de casos possíveis: 13!

Número de casos favoráveis:

10! × 3!

3! → Número de maneiras de ordenar os três livros de Matemática

10! → Número de maneiras de ordenar os restantes dez livros

$$P = \frac{10! \times 3!}{13!}$$

Resposta: (D)

29. Número de casos possíveis: 6 × 6 = 36

Número de casos favoráveis: 2 (2 × 1 ou 1 × 2)

$$P = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

Resposta: (C)

30. Número de casos possíveis: ${}^{8}C_2 = 28$

Número de casos favoráveis: 6 × 2 = 12 (cada face tem duas diagonais)

$$P = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}$$

Resposta: (D)

31. Número de casos possíveis: ${}^{12}C_4$

Número de casos favoráveis: ${}^{10}C_2$

$$P = \frac{{}^{10}C_2}{{}^{12}C_4}$$

Resposta: (A)

32. Número de casos possíveis: 6 × 4 = 24

Número de casos favoráveis: 9

	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0					
2	0					
3	0					

$$P = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

Resposta: (A)

33. 2 , 3 , 5 , 7 , 11 , 13 , 17 e 19 são números primos.
210 = 1 × 2 × 3 × 5 × 7
Número de casos possíveis: ${}^{9}C_{3} = 84$
Número de casos favoráveis: ${}^{5}C_{3} = 10$ (para ser divisor de 210 terá de ser o produto de três fatores primos da decomposição de 210)
$$P = \frac{10}{84} = \frac{5}{42}$$
Resposta: (B)

34. Número de casos possíveis: 6
Número de casos favoráveis: 1
$$P = \frac{1}{6}$$
Resposta: (D)

35.1. Número de casos possíveis:

F1	F2	F3	F4	F5	F6
9	8	7	6	5	4

$${}^{9}A_{6} = 60\ 480$$
Número de casos favoráveis
$$6 \times {}^{8}A_{5} = 40\ 320 \ ; \quad P = \frac{40\ 320}{60\ 480} = \frac{2}{3}$$

35.2. Número de casos possíveis: ${}^{9}A'_{6} = 9^6$
Número de casos favoráveis: ${}^{9}A_{6}$
$$P = \frac{{}^{9}A_{6}}{9^6} \approx 11{,}4\%$$

36. 0 0 2 2 3 3
Número de casos possíveis:
$$\frac{6!}{2! \times 2! \times 2!} = 90$$
Número de casos favoráveis
- O 1.º algarismo é 0.
- Então o 2.º algarismo é 2 ou 3.

$$\boxed{0\ \ 2} + \ 0\ \ 2\ \ 3\ \ 3: \ \frac{4!}{2!} = 12$$

$$\boxed{0\ \ 3} + \ 0\ \ 2\ \ 3\ \ 3: \ \frac{4!}{2!} = 12$$

- O primeiro algarismo é 2.

$$\boxed{2} + \ 0\ \ 0\ \ 2\ \ 3\ \ 3: \ \frac{5!}{2! \times 2!} = 30$$

- O primeiro algarismo é 32.

$\boxed{3} + 0\ 0\ 2\ 3\ 3 : \dfrac{5!}{2! \times 2!} = 30$

Número de casos favoráveis:
12 + 12 + 30 + 30 = 84

$P = \dfrac{84}{90} = \dfrac{14}{15}$

Outro processo

Os números não superiores a 20 000 são os que começam por 00.

$\boxed{0\ 0} + 2\ 2\ 3\ 3$

Temos $\dfrac{4!}{2! \times 2!} = \dfrac{24}{4} = 6$

$P = \dfrac{90-6}{90} = \dfrac{14}{15}$

37. A A A A A B B C
Número de casos possíveis: ${}^8C_5 \times {}^3C_2 = 168$

37.1. $P = 0$
A chave *C B A B* ***D*** *A A* ***D*** tem duas respostas *D*.
Nas respostas do Pedro não há qualquer *D*. Logo, o Pedro acertou em seis respostas, no máximo.

37.2. Só há um caso possível: *C B A B A A A A*

$P = \dfrac{1}{168}$

37.3. *C B A B D A A D* ← Respostas corretas
A A _ *A A* _ _ *A* ← Só há uma possibilidade para colocar os *AA* fora do sítio.
Sobram três lugares onde é possível colocar as opções *B B* e *C* o que pode ser feito de ${}^3C_2 = 3$ maneiras diferentes.

$P = \dfrac{3}{168}$

38. Número de casos possíveis: 3! = 6
Os casos possíveis são os seguintes:

A	B	C	
A	B	C	3
A	C	B	1
B	A	C	1
B	C	A	0
C	A	B	0
C	B	A	1

Número de amigas que receberam o postal certo.

38.1. Número de casos favoráveis: 1 (ABC)

$P=\frac{1}{6}$

38.2. Número de casos favoráveis: 3 (ACB , BAC e CBA)

$P=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

38.3. Número de casos favoráveis: 2 (BCA e CAB)

$P=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

39. Número de casos possíveis: ${}^{6}C_2=15$

39.1. Número de casos favoráveis: 6 (o hexágono tem seis lados)

$P=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$

39.2. Número de casos favoráveis: ${}^{6}C_2-6=9$

$P=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$

39.3. Número de casos favoráveis: 3 (retas *AD* , *BE* e *CF*)

$P=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$

Pág. 78

40. Número de casos possíveis: ${}^{10}C_3=120$

40.1. Número de casos favoráveis:

O lado comum com o retângulo pode ser [*PQ*], [*QR*], [*RS*] ou [*SP*].

Há seis possibilidades de escolha do terceiro vértice.

Temos, portanto, 4 × 6 = 24 casos favoráveis

A probabilidade pedida é $\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$

40.2. Número de casos favoráveis:

Hexágono 6 vértices	Retângulo 4 vértices	
2	1	Situações possíveis
1	2	

O número de triângulos que é possível definir com pelo menos um vértice em cada um dos polígonos é dado por:

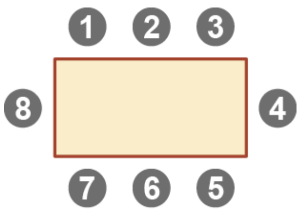
${}^{6}C_2\times{}^{4}C_1+{}^{6}C_1\times{}^{4}C_2=15\times4+6\times6=96$

A probabilidade pedia é $\frac{96}{120}=\frac{4}{5}$

41. Número de casos possíveis:

${}^{8}C_4 = 70$ (número de maneiras de escolher quatro lugares para o homens, ou para as mulheres)

41.1.



Os lugares 1, 2 e 3 têm de ser ocupados por 3 homens ou por 3 mulheres. O mesmo acontece com os lugares 7, 6 e 5. Nos lugares 4 e 8 ficará um homem e uma mulher.

123	765	4	8
2	1	2	1

2 × 2 = 4 é o número de casos favoráveis

$$P = \frac{4}{70} = \frac{2}{35}$$

41.2.

Lugares:	1	2	3	4	5	6	7	8
Nº de opções:	2	2	2	2	1	1	1	1

→ Ficam determinadas

→ Homem ou mulher

Número de casos favoráveis:

2 × 2 × 2 × 2 = 16

$$P = \frac{16}{70} = \frac{8}{35}$$

42.

Brancas	Pretas	Total
16	n	16 + n
1	1	2

$$\frac{{}^{16}C_1 \times {}^{n}C_1}{{}^{16+n}C_2} = 0{,}48 \Leftrightarrow \frac{16n}{\frac{(n+16)(n+15)}{2}} = \frac{48}{100} \Leftrightarrow \frac{32n}{n^2+15n+16n+240} = \frac{12}{25} \Leftrightarrow$$

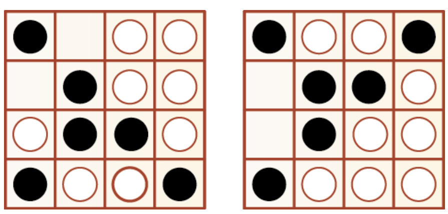
$$\Leftrightarrow 12n^2 - 428n + 2880 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{428 \pm \sqrt{428^2 - 48 \times 2880}}{24} \Leftrightarrow n = \frac{80}{3} \vee n = 9$$

Como $n \in \mathbb{N}$, temos $n = 9$

No saco estão nove bolas pretas.

43. Número de casos possíveis: ${}^{16}C_6 \times {}^{10}C_8 = 360\ 360$

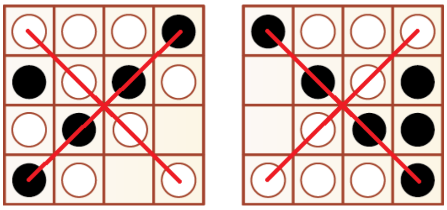
43.1.



Número de casos favoráveis: ${}^{12}C_2 \times {}^{10}C_8 \times 2 = 5940$

$$P = \frac{5940}{360\,360} = \frac{3}{182}$$

43.2.



Número de casos favoráveis: ${}^{8}C_2 \times {}^{6}C_4 \times 2 = 840$

$$P = \frac{840}{360\,360} = \frac{1}{429}$$

44. Número de casos possíveis: ${}^{8}C_3 = 20$

44.1. Número de casos favoráveis: 2

$$P = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

44.2. Número de casos favoráveis: 6

$$P = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

45. Número de casos possíveis: ${}^{26}C_2 \times {}^{26}C_2$

Número de casos favoráveis: ${}^{13}C_1 \times {}^{13}C_1 \times {}^{13}C_1 \times {}^{13}C_1 = 13^4$

$$P = \frac{13^4}{{}^{26}C_2 \times {}^{26}C_2} \approx 27\%$$

46.1. $5 \times 4 \times {}^{5}A'_3 = 2500$

- ${}^{5}A'_3$ → Sequência de três algarismos ímpares, repetidos ou não
- 4 → Número de posições que o algarismo par pode ocupar
- 5 → Há cinco algarismos pares

46.2. Número de casos possíveis: $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$

Número de casos favoráveis:

${}^{4}C_2 \times {}^{9}A'_2 = 486$

- ${}^{9}A'_2$ → Sequência dos algarismos diferentes de 0.
- ${}^{4}C_2$ → Número de maneiras de escolher a posição do algarismo 0.

$$P = \frac{486}{10^4} = 0{,}0486$$

47.1. Para além da delegada e do subdelegado pretende-se escolher mais quatro raparigas entres as restantes 14 e mais dois rapazes entres os restantes 9. O número de escolhas possíveis é dado por

${}^{14}C_4 \times {}^{9}C_2 = 36\ 036$

47.2. Número de casos possíveis: 8!

Número de casos favoráveis:

$5! \times 3! \times {}^{6}C_3$

→ Número de maneiras de escolher lugar para os três rapazes (são escolhidos três lugares entre as cinco raparigas, no principio ou no fim)

→ Número de maneiras de ordenar os três rapazes

→ Número de maneira de ordenar as cinco raparigas

$$P = \frac{5! \times 3! \times {}^{6}C_3}{8!} = \frac{5}{14}$$

48. Número de casos possíveis: ${}^{12}C_4 = 495$

Número de casos favoráveis:

${}^{3}C_2 \times {}^{4}C_2 = 3 \times 6 = 18$

→ número de maneiras de escolher duas retas entre *p* , *q* , *r* e *s*.

→ número de maneiras de escolher duas restas entre *a* , *b* e *c*.

$$P = \frac{18}{495} = \frac{2}{55}$$

Pág. 79

49. Segundo a definição de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é igual ao quociente entre o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, se estes forem todos equiprováveis.
O número de casos possíveis é igual a 4^3 pois, atendendo a que há reposição de cada bola extraída, em cada extração existem quatro possibilidades. Assim no conjunto das três extrações existem $4 \times 4 \times 4 = 4^3$ resultados possíveis.

Para determinar o número de casos favoráveis a que o produto dos três números obtidos seja igual a 8, temos de considerar duas possibilidades: ou saem as bolas numeradas com 1, 2 e 4 ou sai três vezes a bola com o número 2.
O primeiro caso pode verificar-se de 3! maneiras diferentes (número de permutações dos três elementos).
No segundo caso, 2 – 2 – 2, existe apenas uma possibilidade.
Assim, o número de casos favoráveis é dado por 3! + 1.

Portanto uma resposta para este problema é $\frac{3!+1}{4^3}$.

50.1. Número de casos possíveis: ${}^{8}C_2 = 28$

a) Número de casos favoráveis: $6 \times 2 = 12$ (tem de ser retas-suporte de diagonais das faces do cubo)

$$P = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}$$

b) Número de casos favoráveis: ${}^{7}C_1 = 7$ (*OA* , *OB* , *OC* , *OD* , *OE* , *OF* e *OG*)

$$P = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$$

c) Pertencem ao plano de equação $x+y+2=2$ os vértices $A(0\,,2\,,2)$, $C(0\,,2\,,0)$ e $D(0\,,0\,,2)$.

Número de casos favoráveis: ${}^{3}C_2 = 3$.

$$P=\frac{3}{28}$$

d) A reta terá de estar contida no plano *BCG* ou no plano *AOD*.

Número de casos possíveis: ${}^{4}C_3 \times 2 = 8$

$$P=\frac{8}{28}=\frac{2}{7}$$

50.2. Número de casos possíveis: ${}^{8}C_3 = 56$

a) Os vértices O , B , F e D pertencem ao plano de equação $x = y$.

Número de casos favoráveis: ${}^{4}C_3 = 4$

$$P=\frac{4}{56}=\frac{1}{14}$$

b) A superfície esférica tangente a todas as faces do cubo tem raio 1. Logo, a interseção da superfície esférica com os planos que passam no seu centro, e só com esses, são circunferências de raio 1. Os planos que passam no centro são definidos pelas retas paralelas que contém as diagonais de faces opostas (*ADGB* , *EOCF* , *AFGO* , *EBCD* , *OBFD* e *ACGE*).

Portanto, o número de casos favoráveis é $6 \times {}^{4}C_3 = 24$.

$$P=\frac{24}{56}=\frac{3}{7}$$

51. Número de casos possíveis: ${}^{9}C_5 \times {}^{4}C_2 = 756$

51.1. Número de casos favoráveis: ${}^{5}C_2 \times {}^{7}C_5 = 210$

$$P=\frac{210}{756}=\frac{5}{18}$$

51.2. Número de casos favoráveis

$$3 \times 3 \times {}^{4}C_2 = 54$$

Número de maneiras de arrumas as peças pretas

Número de maneiras de escolher a linha

Número de maneiras de escolher a coluna

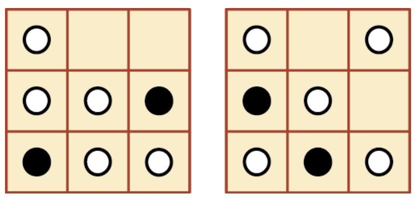
$$P=\frac{54}{756}=\frac{1}{14}$$

51.3. Número de casos favoráveis

$${}^{6}C_2 \times {}^{4}C_2 \times 2 - 1 \times {}^{4}C_2 = 174$$

Os tabuleiros com duas diagonais com peças brancas aparecem em duplicado.

$$P=\frac{174}{756}=\frac{29}{126}$$



52. Número de casos possíveis: ${}^{12}C_2 = 66$

Número de casos favoráveis: 6

$$P = \frac{6}{66} = \frac{1}{11}$$

53.1. Número de casos possíveis: ${}^{12}C_2$

Número de casos favoráveis: $3 \times {}^{4}C_2$

- 3 é o número de possibilidades de escolher a cor
- ${}^{4}C_2$ é o número de possibilidades de escolher duas bolas da cor selecionada

$$P = \frac{3 \times {}^{4}C_2}{{}^{12}C_2} = \frac{3}{11}$$

53.2. a) Número de casos possíveis: 12!

Número de casos favoráveis: 4! × 4! × 4! × 3!

$$P = \frac{4! \times 4! \times 4! \times 3!}{12!} = \frac{1}{5775}$$

b) Número de casos possíveis: 12!

Número de casos favoráveis: 4! × 8! × 9

$$P = \frac{4! \times 8! \times 9}{12!} = \frac{1}{55}$$

c) Número de casos possíveis: 12!

Número de casos favoráveis: $8! \times {}^{9}A_4$

$$P = \frac{8! \times {}^{9}A_4}{12!} = \frac{14}{55} \quad \text{ou}$$

Número de casos possíveis: ${}^{12}C_4$ (número de maneiras de arrumar as bolas brancas na fila de 12)

Número de casos favoráveis: ${}^{9}C_4$ (número de maneiras de escolher lugares separados para as bolas brancas)

$$P = \frac{{}^{9}C_4}{{}^{12}C_4} = \frac{14}{55}$$

d) Número de casos possíveis: ${}^{12}C_2$ (número de maneiras de escolher as duas primeiras bolas brancas)

Número de casos favoráveis: ${}^{3}C_2 \times 4 \times 4$

- ${}^{3}C_2$ é o número de possibilidades para as cores das duas primeiras bolas (BP ou BV ou VP)
- 4 × 4 é o número de possibilidades de escolher uma bola de cada uma das cores selecionadas

$$P = \frac{{}^{3}C_2 \times 4 \times 4}{{}^{12}C_2} = \frac{8}{11}$$

Ou

$$P = \frac{{}^{3}A_2 \times {}^{10}C_4 \times {}^{6}C_3}{{}^{12}C_4 \times {}^{8}C_4} = \frac{8}{11}$$

Ou

$$P = \frac{{}^{3}A_2 \times 4 \times 4 \times 10!}{12!} = \frac{8}{11}$$

54.1. Número de casos possíveis: $9 \times {}^{10}A'_3 = 9 \times 1000 = 9000$

Número de casos favoráveis:

${}^{3}C_1 \times {}^{9}A'_2 + {}^{3}C_2 \times 8 \times 9 = 243 + 216 = 459$

- ${}^{3}C_1 \times {}^{9}A'_2$ é o número de opções em que o primeiro algarismo é 9.

  ${}^{3}C_1$ é o número de maneiras de escolher o lugar do outro algarismo 9.

  ${}^{9}A'_2$ é o número de maneiras de escolher ordenadamente os dois algarismos diferentes de 9.
- $8 \times {}^{3}C_2 \times 9$ é o número de opções em que o primeiro algarismo é diferente de 9.

  8 é o número de opções para o primeiro algarismo porque também é diferente de 0.

  ${}^{3}C_2$ é o número de maneiras de escolher o lugar dos algarismos iguais a 9.

  9 é o número de maneiras de escolher o outro algarismo diferente de 9.

$$P = \frac{459}{9000} = 0{,}051$$

54.2. Número de casos possíveis: $9 \times {}^{10}A'_3 = 9 \times 1000 = 9000$

1.ºA	2.ºA	3ºA	4.ºA
5	10	1	1

$5 \times 10 = 50$

$$P = \frac{50}{9000} = \frac{1}{180}$$

54.3. Número de casos possíveis: $9 \times {}^{10}A'_3 = 9 \times 1000 = 9000$

Número de casos favoráveis:

O número será da forma 1 a b c sendo c ímpar. Portanto para c temos 4 hipóteses (algarismos ímpares diferentes de 1). Como c é ímpar, $1 + c$ é par. Logo para que $1 + a + b + c$ seja um número par, $a + b$ terá de ser par. Para que $a + b$ seja par, os dois algarismos a e b terão de ser os dois pares (5×4 hipóteses) ou os dois ímpares (3×2 hipóteses).

Temos, portanto, $1 \times 5 \times 4 \times 4 + 1 \times 3 \times 2 \times 4 = 104$ casos favoráveis.

$$P = \frac{104}{9000} \approx 0{,}01$$

Tema 3: Propriedades da função de probabilidade

Pág. 80

1. $P(A \cup B) = 2P(A)$ e $P(A) = P(B)$

É sabido que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Como $P(A \cup B) = 2P(A)$ e $P(B) = P(A)$, tem-se:

$$2P(A) = P(A) + P(A) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = 2P(A) - 2P(A) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\ (A \cap B) = 0 \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$$

Logo, A e B são incompatíveis.

Pág. 81

2. $0 < P(A) < 1$

$0 < P(B) < 1$

Se $A \subset B$, $P(A) \leq P(B)$, logo (A) é falsa.

Se $A \subset B$, $P(A \cap B) = P(A)$ e $P(A) > 0$, logo (B) é falsa.

Se $A \subset B$, $P(A \cup B) = P(B)$ e $P(B) < 1$, logo (C) é falsa.

Se $A \subset B$,

$P(A) \leq P(B)$ e $1 - P(\overline{A}) \leq 1 - P(\overline{B}) \Leftrightarrow -P(\overline{A}) \leq -P(\overline{B}) \Leftrightarrow P(\overline{A}) \geq P(\overline{B})$

Resposta: (D)

3. $S = \{1, 2, 3, 4\}$

$A = \{2, 4\}$;

$B = \{2, 3\}$

$$P(A) - P(\overline{B}) + P(\overline{A} \cup \overline{B}) = \frac{5}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A) - [1 - P(B)] + P(\overline{A \cap B}) = \frac{5}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A) - 1 + P(B) + 1 - P(A \cap B) = \frac{5}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A \cup B) = \frac{5}{6}$$

$A \cup B = \{2, 3, 4\}$

$\overline{A \cup B} = \{1\}$

$$P(\{1\}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

Pág. 82

4.

	Rapazes (M)	Raparigas (F)	
2.º ciclo (A)	0,26	0,3	0,56
3.º ciclo (B)	0,22	0,22	0,44
	0,48	0,52	

- 1 – 0,48 = 0,52
- 0,52 – 2,3 = 0,22
- $P(B \cap M) = P(B \cap F) = 0{,}22$
- 0,48 – 0,22 = 0,26

$$P(A \mid M) = \frac{P(A \cap M)}{P(M)} = \frac{0{,}26}{0{,}48} = \frac{13}{24}$$

5. $P(C \mid \overline{T}) = \dfrac{P(C \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} = \dfrac{0{,}6 \times 0{,}8}{0{,}4 \times 0{,}9 + 0{,}6 \times 0{,}8} = \dfrac{0{,}48}{0{,}84} = \dfrac{4}{7}$

Pág. 83

6. Sejam os acontecimentos
A: "Sai face euro no lançamento da moeda"
B: "Não sai face com o número 5 no lançamento do dado"
Os acontecimentos *A* e *B* são independentes. Logo:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{12}$$

Pág. 84

7. $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}2 \Leftrightarrow P(\overline{A \cup B}) = 0{,}2 \Leftrightarrow 1 - P(A \cup B) = 0{,}2 \Leftrightarrow P(A \cup B) = 0{,}8$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$0{,}8 = P(A) + 0{,}6 - 0{,}1 \Leftrightarrow 0{,}3 = P(A)$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

Resposta: (D)

8. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Como $P(A) = 0{,}3$ e $P(B) = 0{,}7$, temos

$P(A \cup B) = 0{,}3 + 0{,}7 - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) = 1 - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) + P(A \cap B) = 1$

Resposta: (C)

9. Os acontecimentos *A* e *B* não são contrários (os alunos escolhidos podem ser um do género feminino e outro do género masculino) mas são incompatíveis ($A \cap B = \emptyset$ dado que os dois alunos não podem ser simultaneamente do género masculino e do género feminino)
Resposta: (C)

10.

	Geometria Descritiva	Psicologia	
Raparigas	4	10	14
Rapazes	8	2	10
	12	12	24

$P(A \mid B)$ designa a probabilidade de o aluno escolhido frequentar Psicologia sabendo que é do género feminino.

Na turma há 14 alunos do género feminino entre os quais há 10 que frequentam Psicologia. Logo,

$P(A \mid B) = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$.

Em alternativa, temos $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{10}{24}}{\frac{14}{24}} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$

Resposta: (D)

11. $P(\overline{B}) = 0{,}3 \Leftrightarrow 1 - P(B) = 0{,}3 \Leftrightarrow P(B) = 1 - 0{,}3 \Leftrightarrow P(B) = 0{,}7$

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}2 \Leftrightarrow P(\overline{A \cup B}) = 0{,}2 \Leftrightarrow 1 - P(A \cup B) = 0{,}2 \Leftrightarrow P(A \cup B) = 0{,}8$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, logo $0{,}8 = 0{,}3 + 0{,}7 - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}2$

$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}2}{0{,}7} = \frac{2}{7}$

Resposta: (A)

12. $P(B \mid A) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(B \cap A) = \frac{1}{3}P(A) \Leftrightarrow P(B \cap A) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} \Leftrightarrow P(B \cap A) = \frac{1}{5}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{5} + \frac{3}{10} - \frac{1}{5} = \frac{7}{10}$

Resposta: (B)

13. Amarelas: n

Pretas: $\underline{\quad 4}$

Total: $4 + n$

$\mathrm{P}(A_1) = \frac{n}{4+n}$

$\mathrm{P}(A_2 \mid A_1) = \frac{n-1}{3+n}$ (após ser retirada uma bola amarela ficaram na caixa $3 + n$ bolas sendo $n - 1$ amarelas)

$\mathrm{P}(A_2 \mid A_1) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{n-1}{3+n} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3(n-1) = 2(3+n) \Leftrightarrow 3n - 3 = 6 + 2n \Leftrightarrow n = 9$

Havia nove bolas amarelas no saco.

14.1. $P(C)=\frac{1}{6} \Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{6}$

$$P(B\mid A)=\frac{2}{7} \Leftrightarrow \frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{2}{7} \Leftrightarrow 7P(A\cap B)=2P(A) \Leftrightarrow 7\times\frac{1}{6}=2P(A) \Leftrightarrow P(A)=\frac{7}{12}$$

14.2. $P(\bar{A})=1-P(A)=1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$

$\frac{5}{12}$ das bolas têm número ímpar

$\frac{5}{12}\times 36=15$

15 bolas têm números ímpares.

15.

$$P(\bar{A}\mid B)=\frac{P(\bar{A}\cap B)}{P(B)}=$$

$P(B)=P(B\cap A)+P(B\cap \bar{A})$

$$=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)}=$$

$$=\frac{P(B)}{P(B)}-\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=1-P(A\mid B)$$

16. Se A e B são incompatíveis então $P(A\cap B)=0$. Logo,

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0}{P(B)}=0$$

Resposta: (A)

17. Sejam os acontecimentos:

A: "O agregado familiar tem pelo menos um automóvel"

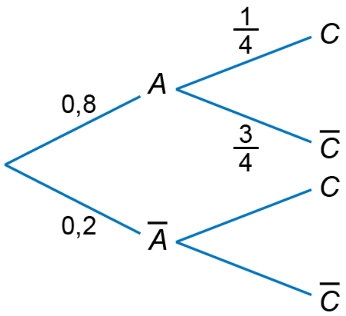
C: "O agregado familiar vive em casa arrendada"

Sabe-se que:

$$P(C)=\frac{1}{3},\ P(A)=0{,}8\ ;\ P(C\mid A)=\frac{1}{4}$$

Temos:

$$P(\bar{C})=\frac{2}{3}\ ;\ P(\bar{A})=0{,}2\ ;\ P(\bar{C}\mid A)=\frac{3}{4}$$



17.1. Pretende-se determinar $P(\bar{A}\cap\bar{C})$.

$$P(\bar{C})=\frac{2}{3} \Leftrightarrow P(A\cap\bar{C})+P(\bar{A}\cap\bar{C})=\frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}8\times\frac{3}{4}+P(\bar{A}\cap\bar{C})=\frac{2}{3} \Leftrightarrow P(\bar{A}\cap\bar{C})=\frac{2}{3}-\frac{8}{10}\times\frac{3}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(\bar{A}\cap\bar{C})=\frac{1}{15}$$

17.2. Pretende-se determinar $P\left(\bar{A}\mid C\right)$.

$$P\left(\bar{A}\mid C\right)=\frac{P\left(\bar{A}\cap C\right)}{P(C)}$$

$$P(C)=\frac{1}{3}\Leftrightarrow P(A\cap C)+P\left(\bar{A}\cap C\right)=\frac{1}{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}8\times\frac{1}{4}+P\left(\bar{A}\cap C\right)=\frac{1}{3}\Leftrightarrow P\left(\bar{A}\cap C\right)=\frac{1}{3}-0{,}2\Leftrightarrow P\left(\bar{A}\cap C\right)=\frac{2}{15}$$

$$P\left(\bar{A}\mid C\right)=\frac{P\left(\bar{A}\cap C\right)}{P(C)}=\frac{\frac{2}{15}}{\frac{1}{3}}=\frac{2}{15}\times 3=\frac{2}{5}$$

18. Sejam D e P os acontecimentos:

D: "O coelho está infetado"

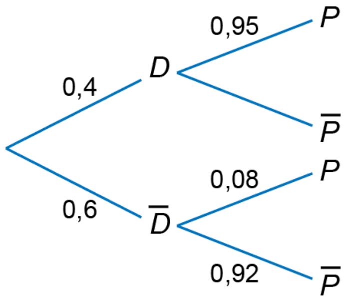
P: "O teste deu positivo"

$P(D)=0{,}4$;

$P(P\mid D)=0{,}95$;

$P(\bar{P}\mid \bar{D})=0{,}92$

Pretende-se determinar $P(D\mid P)$.



$$P(P\mid \bar{D})=1-P(\bar{P}\mid \bar{D})=1-0{,}92=0{,}08$$

$$P(D\mid P)=\frac{P(D\cap P)}{P(P)}=\frac{P(D)\times P(P\mid D)}{P(P)}=\frac{0{,}4\times 0{,}95}{0{,}4\times 0{,}95+0{,}6\times 0{,}08}\approx 88{,}8\%$$

19.1. $P\left(\bar{A}\cup\bar{B}\right)-P(A)\times P(\bar{B}\mid A)=P\left(\overline{A\cap B}\right)-P\left(A\cap\bar{B}\right)=1-P(A\cap B)-P\left(A\cap\bar{B}\right)=$

$$=1-\left[P(A\cap B)+P\left(A\cap\bar{B}\right)\right]=1-P(A)=P\left(\bar{A}\right)$$

19.2. Sejam A e B os acontecimentos:

A: "O habitante é do género feminino"

B: "O habitante concluiu o ensino básico"

Sabe-se que $P(A)=0{,}6$ e $P(\bar{B}\mid A)=0{,}4$.

Pretende-se determinar $P\left(\bar{A}\cup\bar{B}\right)$.

1.º processo:

$$P(B\mid A)=1-P(\bar{B}\mid A)=1-0{,}4=0{,}6$$

$$P\left(\bar{A}\cup\bar{B}\right)=P\left(\overline{A\cap B}\right)=1-P(A\cap B)=1-P(A)\times P(B\mid A)=1-0{,}6\times 0{,}6=0{,}64$$

2.º processo:

$$P\left(\bar{A}\cup\bar{B}\right)-P(A)\times P(\bar{B}\mid A)=P\left(\bar{A}\right)$$

$$P\left(\bar{A}\cup\bar{B}\right)-0{,}6\times 0{,}4=1-0{,}6\Leftrightarrow P\left(\bar{A}\cup\bar{B}\right)=0{,}4+0{,}24\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(\bar{A}\cup\bar{B}\right)=0{,}4+0{,}24\Leftrightarrow P\left(\bar{A}\cup\bar{B}\right)=0{,}64$$

20.

	A	B	
Raparigas	0,12	0,24	0,36
Rapazes	0,40	0,24	0,64
	0,52	0,48	1

$1-0,64=0,36$; $\frac{1}{3}\times 0,36=0,12$; $0,36-0,12=0,24$; $0,64-0,24=0,40$

Sejam os acontecimentos

A: "O aluno escolhido é da turma A"

M: "O aluno escolhido é um rapaz"

20.1. a) $P(M\mid A)=\frac{0,40}{0,52}=\frac{10}{13}$

b) $P(B\mid \bar{M})=\frac{0,24}{0,36}=\frac{2}{3}$

20.2. Seja n o número de alunos do curso profissional de multimédia.

$0,24\times n=12 \Leftrightarrow n=\frac{12}{0,24} \Leftrightarrow n=50$

$0,40\times 50=20$

A turma A tem 20 rapazes.

21. $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

$P(A)=1-P(\bar{A})=1-0,8=0,2$

$P(A\cap B)=0,1 \Leftrightarrow P(A)\times P(B)=0,1 \Leftrightarrow 0,2\times P(B)=0,1 \Leftrightarrow P(B)=\frac{0,1}{0,2} \Leftrightarrow P(B)=\frac{1}{2}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$P(A\cup B)=0,2+0,5-0,1=0,6$

22. $P(B)=1-P(\bar{B})=1-0,8=0,2$

$P(A)\times P(B)=0,8\times 0,2=0,16$

$P(\bar{A}\cup \bar{B})=0,84 \Leftrightarrow P(\overline{A\cap B})=0,84 \Leftrightarrow 1-P(A\cap B)=0,84 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A\cap B)=1-0,84 \Leftrightarrow P(A\cap B)=0,16$

Como $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$, os acontecimentos A e B são independentes.

23.1. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=$

$$=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)= \qquad | P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

$$=1-P(\bar{A})+P(B)\times[1-P(A)]=$$

$$=1-P(\bar{A})+P(B)\times P(\bar{A})=$$

$$=1-P(\bar{A})\times[1-P(B)]=$$

$$=1-P(\bar{A})\times P(\bar{B})$$

23.2. $P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=$

$$=1-[P(A)+P(B)-P(A\cap B)]=$$

$$=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)= \qquad | P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

$$=P(\bar{A})-P(B)+P(A)\times P(B)=$$

$$=P(\bar{A})-P(B)\times[1-P(A)]=$$

$$=P(\bar{A})-P(B)\times P(\bar{A})=$$

$$=P(\bar{A})[1-P(B)]==P(\bar{A})\times P(\bar{B})$$

Pág. 89

24. *A* e *B* não são contrários porque, na extração de uma bola do saco, pode não se verificar *A* nem *B*, ou seja, a bola extraída pode ser preta.

Resposta: (B)

25. Temos:

A: "Sair face ímpar"

$A = \{1, 3, 5\}$

B: "Sair face com um número primo"

$B = \{2, 3, 5\}$

$A\cup B=\{1,2,3,5\}$

$\overline{A\cup B}=\{4,6\}$

Resposta: (B)

26. $P(\bar{A}\cap\bar{B})=0{,}1 \Leftrightarrow P(\overline{A\cup B})=0{,}1 \Leftrightarrow 1-P(A\cup B)=0{,}1 \Leftrightarrow P(A\cup B)=0{,}9$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$0{,}9=0{,}5+P(B)-0{,}2 \Leftrightarrow P(B)=0{,}6$

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0{,}2}{0{,}6}=\frac{1}{3}$$

Resposta: (C)

27. $P(A \cup B) - 4P(A \cap B) = P(A) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A \cup B) = 4P(A \cap B) + P(A)$

Substituindo $P(A \cup B)$ por $4P(A \cap B) + P(A)$ em

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ vem:

$4P(A \cap B) + P(A) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4P(A \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

$\Leftrightarrow 5P(A \cap B) = P(B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{5} \times P(B)$

$\Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow P(A \mid B) = \frac{1}{5}$

Resposta: (A)

28. $P\left((A \cap B) \cup \bar{A}\right) = P\left(A \cup \bar{A}\right) = P(E) = 1$ | Se $A \subset B$, $A \cap B = A$.

Resposta: (B)

29. Na opção **(A)** temos quatro retângulos três dos quais são quadrados.

Logo, nesta opção $P(A \mid B) = \frac{3}{4}$.

Na opção **(B)** temos três retângulos dois dos quais são quadrados.

Logo, nesta opção $P(A \mid B) = \frac{2}{3}$.

Na opção **(C)** temos três retângulos um dos quais é quadrado.

Logo, nesta opção $P(A \mid B) = \frac{1}{3}$.

Na opção **(D)** temos quatro retângulos, um dos quais é quadrado.

Logo, nesta opção $P(A \mid B) = \frac{1}{4}$

Resposta: (C)

30. Se $A \subset B$ então $A \cap B = A$.

Logo: $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$

Resposta: (C)

31. Se $A \subset B$ então $B \cap A = A$.

Logo: $P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$

Resposta: (B)

32. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

$P(A \cap B) \neq 0$. Logo, A e B não são incompatíveis.

Resposta: (A)

33. $P(B \mid A)$ significa a probabilidade de o produto dos números saídos ser menor do que 5 sabendo que, no lançamento do dado saiu par, ou seja, saiu 2, 4 ou 6.

Na tabela seguinte apresentam-se todos os casos possíveis:

		Dado		
		2	4	6
Bola	1	2	4	6
	2	4	8	12
	3	6	12	18
	4	8	16	24

Entre os 12 casos possíveis há 3 em que o produto dos dois números saídos é inferior a 5.

Portanto, a probabilidade pedida é $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

Resposta: (B)

34. $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P(A \cup B)$

$P(B) = P(A) = 0{,}6$

$P(B \mid A) = P(B) \Leftrightarrow \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = P(B) \Leftrightarrow \frac{P(B \cap A)}{0{,}6} = 0{,}6 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}6 \times 0{,}6$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) = 0{,}6 + 0{,}6 - 0{,}6 \times 0{,}6 \Leftrightarrow P(A \cup B) = 0{,}84$

$P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 1 - 0{,}84 = 0{,}16$

Resposta: (D)

35. $P(A \mid B) = 0{,}125 \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0{,}125 \Leftrightarrow \frac{0{,}1}{P(B)} = 0{,}125$

$\Leftrightarrow 0{,}1 = 0{,}125 \times P(B) \Leftrightarrow P(B) = \frac{0{,}1}{0{,}125} \Leftrightarrow P(B) = 0{,}8$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$0{,}95 = P(A) + 0{,}8 - 0{,}1 \Leftrightarrow P(A) = 0{,}25$

$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$

Como 0,75 = 3 × 0,25, temos que $P\left(\overline{A}\right) = 3P(A)$.

36. $P(A) = 2P(B) \Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{2}P(A)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$5P(A \cap B) = P(A) + \frac{1}{2}P(A) - P(A \cap B) \Leftrightarrow 5P(A \cap B) + P(A \cap B) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)P(A) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6P(A \cap B) = \frac{3}{2}P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{2}P(A) \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{3}{12} \Leftrightarrow P(B \mid A) = \frac{1}{4}$

37. $P(\overline{B} \mid A)$ designa a probabilidade de as bolas retiradas da caixa 2 serem de cores diferentes sabendo que as bolas retiradas da caixa 1 são da mesma cor.

Ora, se as bolas retiradas da caixa 1 são da mesma cor, terão de ser necessariamente pretas, dado que nesta caixa só há duas bolas brancas. Assim, a caixa 2 fica com três bolas brancas e três bolas pretas.

Logo, para calcular probabilidade de as bolas retiradas da caixa 2 serem de cores diferentes, temos:

Número de casos possíveis: ${}^6C_2 = 15$

Número de casos favoráveis: ${}^3C_1 \times {}^3C_1 = 9$ (número de maneiras de escolher uma bola branca e uma bola preta)

$$P(\overline{B} \mid A) = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

38. Na extração, ao acaso, de uma carta do baralho, sejam os acontecimentos:

R: "Sair um rei"

E: "Sair uma carta de espadas"

É dado que:

$$P(E) = \frac{1}{5} = 0{,}2 \ ; \ P(R) = \frac{1}{10} \ ; \ P(\overline{R} \cap \overline{E}) = 0{,}75$$

38.1. $P(\overline{R} \cap \overline{E}) = 0{,}75 \Leftrightarrow P(\overline{R \cup E}) = 0{,}75 \Leftrightarrow 1 - P(R \cup E) = 0{,}75 \Leftrightarrow P(R \cup E) = 0{,}25$

Substituindo em $P(R \cup E) = P(R) + P(E) - P(R \cap E)$, vem:

$$0{,}25 = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} - P(R \cap E) \Leftrightarrow P(R \cap E) = 0{,}05$$

Como $P(R \cap E) > 0$ o acontecimento $R \cap E$ é possível. Logo, o rei de espadas está no baralho.

38.2. $P(R \mid E) = \dfrac{P(R \cap E)}{P(E)} = \dfrac{0{,}05}{0{,}2} = \dfrac{1}{4}$

39. Sejam os acontecimentos:

F: "O aluno escolhido é do género feminino"

B: "O aluno escolhido tem bolsa de mérito"

39.1. É dado que $P(B) = \frac{1}{5}$; $P(F) = \frac{1}{2}$; $P(B \mid F) = \frac{1}{3}$.

$$P(\overline{B}) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \ ; \ P(\overline{F}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ ; \ P(\overline{B} \mid F) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Pretende-se determinar $P(\overline{B} \mid \overline{F})$

$$P(\overline{B}) = P(F \cap \overline{B}) + P(\overline{F} \cap \overline{B}) \Leftrightarrow P(\overline{B}) = P(F) \times P(\overline{B} \mid F) + P(\overline{F}) \times P(\overline{B} \mid \overline{F})$$

Substituindo os valores, temos:

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times P(\overline{B} \mid \overline{F}) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \times P(\overline{B} \mid \overline{F}) = \frac{4}{5} - \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \times P(\overline{B} \mid \overline{F}) = \frac{7}{15} \Leftrightarrow P(\overline{B} \mid \overline{F}) = \frac{14}{15}$$

39.2. Seja n o número de alunos da turma. Há apenas um aluno em n que é rapaz e tem bolsa:

$$P\left(\overline{F}\cap B\right)=\frac{1}{n}\Leftrightarrow P\left(\overline{F}\right)\times P\left(B\,|\overline{F}\right)=\frac{1}{n}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\times\left(1-P\left(\overline{B}\,|\overline{F}\right)\right)=\frac{1}{n}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{14}{15}\right)=\frac{1}{n}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\times\frac{1}{15}=\frac{1}{n}\Leftrightarrow n=30$$

A turma tem 30 alunos.

40.1. $P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=1-P(A)\times P\left(B\,|A\right)$

$$P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=P\left(\overline{A\cap B}\right)=1-P(A\cap B)=1-P(A)\times P(B\,|\,A)$$

40.2. $P(B)+P\left(\overline{A}\right)+P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=2P\left(\overline{A}\right)+P(A\cup B)$

$$P(B)+P\left(\overline{A}\right)+P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=P(B)+P\left(\overline{A}\right)+P\left(\overline{A}\right)+P\left(\overline{B}\right)-P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=$$

$$=P(B)+2P\left(\overline{A}\right)+1-P(B)-P\left(\overline{A\cup B}\right)=2P\left(\overline{A}\right)+\left[1-P\left(\overline{A\cup B}\right)\right]=$$

$$=2P\left(\overline{A}\right)+P(A\cup B)$$

40.3. $P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=P\left(\overline{A}\right)-P(B)+P(A\cup B)$

$$P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=P\left(\overline{A}\right)+P\left(\overline{B}\right)-P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=$$

$$=P\left(\overline{A}\right)+1-P(B)-P\left(\overline{A\cup B}\right)=$$

$$=P\left(\overline{A}\right)-P(B)+\left[1-P\left(\overline{A\cup B}\right)\right]=$$

$$=P\left(\overline{A}\right)-P(B)+P(A\cup B)$$

40.4. $P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=P\left(\overline{A}\right)-P(B)+P\left(A\,|B\right)\times P(B)$

$$P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P(A\cup B)=$$

$$=1-\left[P(A)+P(B)-P(A\cap B)\right]=$$

$$=\left[1-P(A)\right]-P(B)+P(A\cap B)=$$

$$=P\left(\overline{A}\right)-P(B)+P(B)\times P\left(A\,|B\right)=$$

$$=P\left(\overline{A}\right)-P(B)+P\left(A\,|B\right)\times P(B)$$

40.5. $P\left(A\,|B\right)-P\left(\overline{B}\right)\times P\left(A\,|B\right)=P(A)\times P\left(B\,|A\right)$

$$P\left(A\,|B\right)-P\left(\overline{B}\right)\times P\left(A\,|B\right)=$$

$$=P\left(A\,|B\right)\times\left[1-P\left(\overline{B}\right)\right]=$$

$$=P\left(A\,|B\right)\times P(B)=$$

$$=P(A\cap B)=P(A)\times P\left(B\,|A\right)$$

40.6. $1-P(A|B)\times P(B)-P(A\cap\overline{B})=P(\overline{A})$

$$1-P(A|B)\times P(B)-P(A\cap\overline{B})=$$
$$=1-P(A\cap B)-P(A\cap\overline{B})=$$
$$=1-\left[P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})\right]=$$
$$=1-P\left[(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})\right]=$$
$$=1-P\left[A\cap(B\cup\overline{B})\right]=1-P(A\cap S)=$$
$$=1-P(A)=P(\overline{A})$$

$A\cap B$ e $A\cap\overline{B}$ são incompatíveis

40.7. $P(A)\times\left[P(B|A)-1\right]+P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A})$

$$P(A)\times\left[P(B|A)-1\right]+P(\overline{A}\cup\overline{B})=$$
$$=P(A)\times P(B|A)-P(A)+P(\overline{A\cap B})=$$
$$=P(A\cap B)-P(A)+1-P(A\cap B)=1-P(A)=P(\overline{A})$$

40.8. $P\left((\overline{\overline{A}\cap B})\,|\,B\right)=P(A\,|\,B)$

$$P\left((\overline{\overline{A}\cap B})\,|\,B\right)=P\left((A\cup\overline{B})\,|\,B\right)=\frac{P\left((A\cup\overline{B})\cap B\right)}{P(B)}=$$
$$=\frac{P\left((A\cap B)\cup(\overline{B}\cap B)\right)}{P(B)}=\frac{P((A\cap B)\cup\varnothing)}{P(B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A|B)$$

40.9. $\dfrac{P(\overline{B})-P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(A)}=1-P(B|A)$

$$\frac{P(\overline{B})-P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(A)}=\frac{P(\overline{B})-P(\overline{A\cup B})}{P(A)}=$$
$$=\frac{P(\overline{B})-\left[1-P(A\cup B)\right]}{P(A)}=\frac{P(\overline{B})-1+P(A\cup B)}{P(A)}=$$
$$=\frac{-\left[1-P(\overline{B})\right]+P(A)+P(B)-P(A\cap B)}{P(A)}=$$
$$=\frac{-P(B)+P(A)+P(B)-P(A\cap B)}{P(A)}=$$
$$=\frac{P(A)}{P(A)}-\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=1-\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=1-P(A|B)$$

40.10. $\frac{P(A\cup B)}{P(B)}-P\left(\overline{A}\,|B\right)=\frac{P(A)}{P(B)}$

$$\frac{P(A\cup B)}{P(B)}-P\left(\overline{A}\,|B\right)=\frac{P(A\cup B)}{P(B)}-\frac{P\left(\overline{A}\cap B\right)}{P(B)}=$$

$$=\frac{P(A\cup B)-P\left(\overline{A}\cap B\right)}{P(B)}=$$

$$=\frac{P(A)+P(B)-P(A\cap B)-P\left(\overline{A}\cap B\right)}{P(B)}=$$

$$=\frac{P(A)+P(B)-\left[P(A\cap B)+P\left(\overline{A}\cap B\right)\right]}{P(B)}=$$

$$=\frac{P(A)+P(B)-P\left[(A\cap B)\cup\left(\overline{A}\cap B\right)\right]}{P(B)}=$$

$$=\frac{P(A)+P(B)-P\left[\left(A\cup\overline{A}\right)\cap B\right]}{P(B)}=$$

$$=\frac{P(A)+P(B)-P(S\cap B)}{P(B)}=$$

$$=\frac{P(A)+P(B)-P(B)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}$$

40.11. $P(B\,|\,A)\geq 1-\frac{1-P(B)}{P(A)}$

$$P\left(B|A\right)\geq 1-\frac{1-P(B)}{P(A)}\Leftrightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\geq\frac{P(A)-1+P(B)}{P(A)}\Leftrightarrow \qquad |\ P(A)>0$$

$$\Leftrightarrow P(A\cap B)\geq P(A)-1+P(B)\Leftrightarrow 1\geq P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

Esta desigualdade é verdadeira, quaisquer que sejam os acontecimentos A e B, dado que a probabilidade de um acontecimento nunca é superior a 1.

40.12. $P(A\cup B)<P\left(A|B\right)\times P\left(\overline{B}\right)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow P(A)+P(B)<P\left(A|B\right)$$

$$P(A\cup B)<P\left(A|B\right)\times P\left(\overline{B}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B)<P\left(A|B\right)\times\left[1-P(B)\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B)<P\left(A|B\right)-P\left(A|B\right)\times P(B)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B)<P\left(A|B\right)-P(A\cap B)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A)+P(B)<P\left(A|B\right)$$

41.1. Sair pelo menos um valete é o acontecimento contrário de não sair qualquer valete.

Número de casos possíveis: $^{52}C_6$

Número de casos favoráveis (ao acontecimento contrário):

Valetes	Outras cartas
<u>4</u>	<u>48</u>
0	6

$^{4}C_0 \times {}^{48}C_6 = {}^{48}C_6$

$$P = 1 - \frac{^{48}C_6}{^{52}C_6} \approx 0{,}397$$

41.2. $P(C\,|\,(A \cup B))$ representa a probabilidade de sair uma carta de paus na segunda extração, sabendo que na primeira extração saiu uma carta de ouros ou uma carta de copas.

Podemos, assim, concluir que:

Número de casos possíveis: 51 (número de cartas que restam no baralho depois de efetuada a primeira extração).

Número de casos favoráveis: 13 (número de cartas de paus existentes no baralho depois de efetuada a extração de uma carta de ouros ou de copas).

Aplicando a regra de Laplace, a probabilidade pedida é $\frac{13}{51}$.

42. Sejam os acontecimentos:

A: "A soma dos números saídos nos três lançamentos é igual a 7"

B: "O produto dos números saídos no três lançamentos é igual a 12"

O número de casos possíveis é $4 \times 4 \times 4 = 4^3$.

Para que *A* ocorra é necessário verificar-se um dos resultados seguintes:

1-2-4	Pode sair de 3! maneiras diferentes
1-3-3	Pode sair de 3 maneiras diferentes (pois o 1 pode sair em 1.º lugar, 2.º ou 3.º)
2-2-3	Pode sair de 3 maneiras diferentes (pois o 3 pode sair em 1.º lugar, 2.º ou 3.º)

$$P(A) = \frac{3! + 3 + 3}{3^4} = \frac{12}{3^4}$$

Para que *B* ocorra é necessário verificar-se um dos resultados seguintes:

1-3-4	Pode sair de 3! maneiras diferentes
2-2-3	Pode sair de 3 maneiras diferentes (pois o 3 pode sair em 1.º lugar, 2.º ou 3.º)

$A \cap B$ verifica-se se sair 2-2-3 o que pode acontecer de 3 maneiras diferentes

$$P(A \cap B) = \frac{3}{3^4}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{3^4}}{\frac{12}{3^4}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

43. Sejam os acontecimentos:

A_1: "O Rui acerta no alvo no 1.º lançamento"

A_2: "O Rui acerta no alvo no 2.º lançamento"

Tem-se $P(A_1)=P(A_2)=p$.

A_1 e A_2 são independentes.

Pretende-se determinar $P(A_1\cup A_2)$

1.º processo:

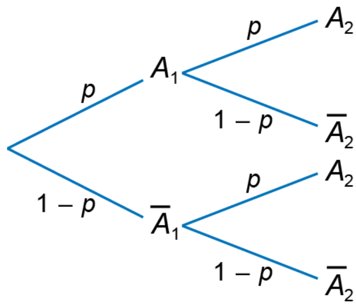
$P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cap A_2)$

Como A_1 e A_2 são independentes,

$P(A_1\cap A_2)=P(A_1)\times P(A_2)$

Então:

$$P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1)\times P(A_2)=$$
$$=p+p-p\times p=$$
$$=2p-p^2$$



2.º processo:

$$P(A_1\cup A_2)=1-P\left(\overline{A_1\cup A_2}\right)=1-P\left(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\right)=$$
$$=1-(1-p)\times(1-p)=1-\left(1-2p+p^2\right)=$$
$$=2p-p^2$$

44. $P(R\mid T)$ designa a probabilidade de os três pontos escolhidos definirem um triângulo retângulo, sabendo que os mesmos definem um triângulo, ou seja, sabendo que os três pontos não são colineares.

Os três pontos podem ser escolhidos de ${}^7C_3=35$ maneiras diferentes. Nestes 35 casos há três que não definem um triângulo: *AOD, BOE* e *COF*. Estes três casos correspondem às escolhas de pontos que pertencem aos diâmetros da circunferência circunscrita ao hexágono cujos extremos são vértices do mesmo.

Temos, assim, $35-3=32$ casos possíveis.

Os casos favoráveis correspondem aos triângulos retângulos que é possível definir com três pontos escolhidos entre os sete dados.

Nenhum dos triângulos com vértice em O é retângulo (têm um ângulo de amplitude 60º ou 120º).

Dois dos vértices de qualquer triângulo retângulo inscrito na circunferência têm se ser extremos de um diâmetro. Para o outro vértice há quatro escolhas possíveis.

Portanto, há $3\times 4=12$ casos favoráveis.

Logo, a probabilidade pedida é dada por $P(R\mid T)=\dfrac{12}{32}=\dfrac{3}{8}$.

45. Sejam I e M os acontecimentos:

I: "O aluno tem Internet no telemóvel"

M: "O aluno tem rede MTN"

Sabe-se que $P(I)=0,45$ e $P(M)=0,4$, logo $P(I\mid \bar{M})=\frac{1}{6}$.

45.1. Pretende-se determinar $P(I\mid M)$

$$P(I)=0,45 \Leftrightarrow P(M\cap I)+P(\bar{M}\cap I)=0,45 \Leftrightarrow$$

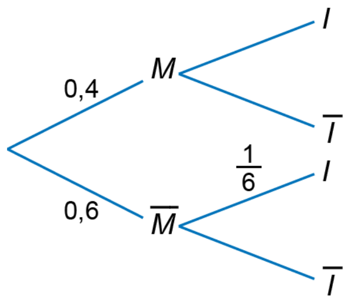
$$\Leftrightarrow P(M)\times P(I\mid M)+P(\bar{M})P(I\mid \bar{M})=0,45 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,4\times P(I\mid M)+0,6\times\frac{1}{6}=0,45 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,4\times P(I\mid M)=0,45-0,1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,4\times P(I\mid M)=0,35 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(I\mid M)=\frac{0,35}{0,4} \Leftrightarrow P(I\mid M)=\frac{7}{8}$$



45.2. Pretende-se determinar $P(\bar{M}\cup I)$.

$$P(\bar{M}\cup I)=P(\bar{M})+P(I)-P(\bar{M}\cap I)=0,6+0,45-0,6\times\frac{1}{6}=0,95$$

46.1. Probabilidade de A:

Vermelhas	Azuis	Total
5	4	9
2	0	2

$$P(A)=\frac{{}^5C_2}{{}^9C_2}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$$

Probabilidade de B:

Pares	Ímpares	Total
4	5	9
2	0	2

$$P(B)=\frac{{}^4C_2}{{}^9C_2}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

Probabilidade de $A\cap B$:

«As duas bolas retiradas são vermelhas e têm números pares»

$A\cap B$	Outras	Total
2	7	9
2	0	2

$$P(A\cap B)=\frac{{}^2C_2}{{}^9C_2}=\frac{1}{36}=\frac{1}{36}$$

46.2. Vermelhas Azuis Total

Vermelhas	Azuis	Total
5	4 + n	9 + n
0	2	2

A probabilidade de as duas bolas extraídas serem azuis é $\frac{^{4+n}C_2}{^{9+n}C_2}$.

Assim, $\frac{^{4+n}C_2}{^{9+n}C_2}=\frac{4}{7}$.

$$\frac{^{4+n}C_2}{^{9+n}C_2}=\frac{4}{7}\Leftrightarrow\frac{\frac{(n+4)(n+3)}{2}}{\frac{(n+9)(n+8)}{2}}=\frac{4}{7}\Leftrightarrow\frac{(n+4)(n+3)}{(n+9)(n+8)}=\frac{4}{7}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{n^2+3n+4n+12}{n^2+8n+9n+72}=\frac{4}{7}\Leftrightarrow\frac{n^2+7n+12}{n^2+17n+72}=\frac{4}{7}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7n^2+49n+84=4n^2+68n+288\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3n^2-19n-204=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n=\frac{19\pm\sqrt{19^2+4\times3\times204}}{6}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n=\frac{19\pm53}{6}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n=12\vee n=-\frac{17}{3}$$

Como $n\in\mathbb{N}$, vem $n=12$.

Foram introduzidas mais 12 bolas azuis no saco.

47.

$$P(\bar{A}\cup\bar{B}\mid B)=\frac{P\left[(\bar{A}\cup\bar{B})\cap B\right]}{P(B)}=\frac{P\left[(\bar{A}\cap B)\cap(\bar{B}\cap B)\right]}{P(B)}=$$

$$=\frac{P\left[(\bar{A}\cap B)\cap\varnothing\right]}{P(B)}=\frac{P(\bar{A}\cap B)}{P(B)}=P(\bar{A}\mid B)$$

Pág. 92

1.

V	C	C	C	C
5	21	21	21	21

$5\times21^4\times5=25\times{}^{21}A'_4$

A vogal pode ocupar uma de cinco posições

Resposta: (B)

2. O segundo elemento ($^{n}C_1$) é igual ao penúltimo: $^{n}C_1=22\Leftrightarrow n=22$

O terceiro elemento dessa linha é $^{22}C_2=231$.

Resposta: (B)

3. Brancas: 5 numeradas

Pretas: 6 iguais

$^{16}A_5 \times {}^{11}C_6$

→ Número de maneiras de arrumar as seis bolas pretas (iguais) nos restantes onze lugares.

→ Número de maneiras de escolher ordenadamente cinco lugares para as bolas brancas (diferentes entre si) entre as 16 casas do tabuleiro.

Resposta: (C)

4.

Del.-Sub Del.	Restantes	
2	18	Elementos disponíveis
1	3	Elementos a escolher

$^{2}C_1 \times {}^{18}C_3 = 1632$

Resposta: (C)

5.

Mulheres	Homens
12	8
2	1
1	2

$\left({}^{12}C_2 \times {}^{8}C_1 + {}^{12}C_1 {}^{8}C_2\right) \times 3! = \left({}^{12}C_2 \times 8 + {}^{8}C_2 \times 12\right) \times 3!$

→ Número de maneiras de distribuir os três cargos pelas três pessoas escolhidas.

→ Número de maneiras de escolher uma comissão com uma mulher e dois homens.

→ Número de maneiras de escolher uma comissão com duas mulheres e um homem.

Resposta: (D)

6. Terão de entrar cinco pessoas no elevador A e as restantes no elevador B, ou vice-versa:

A	B	
5	4	ou
4	5	

$^{9}C_5 \times {}^{4}C_4 + {}^{9}C_4 \times {}^{5}C_4 = {}^{9}C_5 + {}^{9}C_4$

Resposta: (A)

7. Número do tipo 253 223335

→ Nestes algarismos varia a ordem

Pretende-se determinar o número de sequências que se podem formar trocando a ordem aos seis algarismos 223335

$\frac{6!}{2! \times 3!} = 60$ ou $\quad {}^{6}C_2 \times {}^{4}C_3 = 60$

Resposta: (B)

8. Atendendo a que ${}^{n}C_p + {}^{n}C_{p+1} = {}^{n+1}C_{p+1}$,

${}^{2000}C_{100} + {}^{2000}C_{101} = {}^{2001}C_{101}$

Resposta: (D)

9. A soma dos três últimos elementos de uma linha do Triângulo de Pascal é igual à soma dos três primeiros elementos dessa linha:

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & & a & & b\ \ldots \\ 1 & & 1+a & & a+b\ \ldots & \end{array}$$ (linha seguinte)

$1 + a + b = 211$

$a + b = 210$

O terceiro elemento da linha seguinte é $a + b = 210$.

Resposta: (C)

10. Se não sai face nacional nos quatro lançamentos, sai face europeia pelo menos uma vez.

Resposta: (C)

11. $P(B \text{ e } B \text{ ou } P \text{ e } P) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} + \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{30}{90} + \frac{12}{90} = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}$

Resposta: (D)

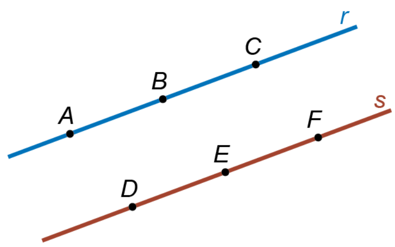
12. Número de casos possíveis: ${}^{6}C_{3} = 20$

Número de casos favoráveis:

${}^{6}C_{3} - 2 = 18$ → Todos os casos exceto *A, B, C* e *D, E, F*

$P = \frac{18}{20} = 0{,}9$

Resposta: (A)



13. Número de casos possíveis: ${}^{6}C_{3}$

Número de casos favoráveis:

${}^{5}C_{2}$ (número de maneiras de escolher os restantes dois vértices entre os restantes cinco pontos)

$P = \frac{{}^{5}C_{2}}{{}^{6}C_{3}}$

Resposta: (B)

14. A linha dos elementos da forma ${}^{99}C_{p}$ tem 100 elementos $(0 \leq p \leq 100)$. Nessa linha existem dois elementos iguais a 99, pois ${}^{99}C_{1} = {}^{99}C_{98} = 99$.

Logo, $P = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$

Resposta: (A)

15. Comecemos por atender ao acontecimento contrário (escolherem todos o mesmo filme)

Número de casos possíveis: 6^5

$\underline{A_1}$ $\underline{A_2}$ $\underline{A_3}$ $\underline{A_4}$ $\underline{A_5}$ (cinco amigos)

6 6 6 6 6 (possibilidade de escolha)

Número de casos favoráveis: 6

(Há seis possibilidades para escolherem todos o mesmo filme dado que há seis filmes disponíveis)

$$P = 1 - \frac{6}{6^5} = 1 - \frac{1}{6^4} = \frac{6^4 - 1}{6^4}$$

Resposta: (C)

16. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= 0{,}5 + P(A \cap B) + 0{,}4 - P(A \cap B) = 0{,}9$

Resposta: (A)

17. $P(A) = 0{,}7$; $P(B) = 0{,}4$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = 0{,}7 + 0{,}4 - P(A \cap B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A \cup B) = 1{,}1 - P(A \cap B)$

Como $P(A \cup B) \leq 1$, então:

$1{,}1 - P(A \cap B) \leq 1 \Leftrightarrow P(A \cap B) \geq 0{,}1$

Logo, como $P(A \cap B) \neq 0$, A e B não são acontecimentos incompatíveis.

Resposta: (B)

18. $P(A) = 0{,}3$, $P(A \cup B) = 0{,}58$

$P(A \mid B) = P(A) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0{,}3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}3 \times P(B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$0{,}58 = 0{,}3 + P(B) - 0{,}3 \times P(B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0{,}28 = 0{,}7\ P(B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(B) = \dfrac{0{,}28}{0{,}7} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(B) = 0{,}4$

Resposta: (C)

19. $P(A)=0{,}4\;;\;P(B)=0{,}6\;;\;P\left(\overline{A}\cup B\right)=0{,}84$

$$P\left(\overline{A}\cup B\right)=P\left(\overline{A}\right)+P(B)-P\left(\overline{A}\cap B\right)$$

$$0{,}84=1-0{,}4+0{,}6-P\left(\overline{A}\cap B\right)\Leftrightarrow P\left(B\cap\overline{A}\right)=0{,}36$$

$$P(B)=P(B\cap A)+P\left(B\cap\overline{A}\right)$$

$$0{,}6=P(B\cap A)+0{,}36\Leftrightarrow P(B\cap A)=0{,}24$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}4+0{,}6-0{,}24=0{,}76$$

Resposta: (C)

20.

Partido A	Outros
2	4
0	3
1	2

$${}^{2}C_0\,{}^{4}C_3+{}^{2}C_1\,{}^{4}C_2=4+2\times6=16$$

21.

Matemática A	Física
3	4

21.1. $P_3\times P_4\times 2=3!\times4!\times2=288$

→ Pode ser MAT.-FÍS. ou FÍS.-MAT.

21.2. $P_3\times P_4\times 5=3!\times4!\times5=720$

→ Os livros de Matemática A podem ficar no início da fila, no fim ou entre os livros de Física.

22.

5 primeiras	7 restantes
5	7
4	4

$${}^{5}C_4\times{}^{7}C_4=175$$

23.1. ${}^{25}C_6=177\ 100$

23.2.

Rapazes	Raparigas
10	15
4	2

$${}^{10}C_4\times{}^{15}C_2=22\ 050$$

23.3.

Irmãos	Outros
2	23
1	5
0	6

$${}^{2}C_1\,{}^{23}C_5+{}^{2}C_0\,{}^{23}C_6=168\ 245$$

23.4. $^{23}C_4 = 8855$

24. Os três vértices são escolhidos entre seis pontos não havendo três colineares: $^{6}C_3 = 20$

25.

V	C	C	C	C
5	21	21	21	21

$\underbrace{5\times 21^4\times 5}_{\text{A vogal pode ocupar qualquer um dos 5 lugares.}} = 25\times 21^4 = 4\ 862\ 025$

26.

Colineares	Outros
5	5
0	3
1	2
2	1

$^{5}C_0\,^{5}C_3 + {}^{5}C_1\,^{5}C_2 + {}^{5}C_2\,^{5}C_1 = 1\times 10 + 5\times 10 + 10\times 5 = 110$

27.1.

Iniciados	Outros
3	7
2	3
3	2

$^{3}C_2\,^{7}C_3 + {}^{3}C_3\,^{7}C_2 = 126$

27.2. $^{10}A_5 = 30\ 240$

28.

- $5!$ é o número de sequências que é possível formar com cinco algarismos diferentes. Estas sequências aparecem em duplicado porque há dois algarismos iguais.

  Uma solução é $\dfrac{5!}{2}$.
- $^{5}A_3 = 60$ também é solução por ser o número de maneiras de escolher ordenadamente lugar na sequência de cinco elementos para os algarismos diferentes 1, 2 e 3. O lugar dos restantes algarismos, por serem iguais, fica determinado.
- $^{5}C_2 \times 3! = 60$: $^{5}C_2$ é o número de maneiras de escolher lugar na sequência para os dois algarismos iguais e $3!$ é o número de maneiras de os três algarismos diferentes ocuparem os restantes lugares.

Pág. 95

29.1. $^{3}C_1\times{}^{7}C_1 + {}^{3}C_2\times{}^{7}C_2 + {}^{3}C_3\times{}^{7}C_3 = 119$

Trocam três selos. O João escolhe três (em 3) e o Pedro escolhe três (em 7).
Trocam dois selos. O João escolhe dois (em 3) o Pedro escolhe dois (em 7).
Trocam um selo. O João escolhe-o em três e o Pedro em sete.

A outra solução corresponde a:

- juntam-se os 10 selos;
- o João escolhe qualquer subconjunto de 3 selos no conjunto de 10 selos ($^{10}C_3$) exceto o subconjunto que corresponde aos seus três selos $\left(^{3}C_3 = 1\right)$.

$^{10}C_3 - 1 = 119$

29.2. $3 \times 2 \times 4! \times {}^{11}A_8 = 958\ 003\ 200$

- ${}^{11}A_8$ → Número de maneiras de arrumar os restantes oito selos nos restantes onze lugares.
- $4!$ → Número de maneiras de arrumar os quatro selos de desporto nos quatro lugares que lhes são destinados.
- 2 → Número de maneiras de escolher quatro lugares seguidos numa fila de cinco lugares (fica livre o primeiro ou o último)
- 3 → Há três hipóteses para escolher a fila do tema "desporto".

30.

- Num conjunto de 4 livros o João escolhe um subconjunto de um, dois, três ou quatro livros. Esta escolha pode ser feita de ${}^{4}C_1 + {}^{4}C_2 + {}^{4}C_3 + {}^{4}C_4$ maneiras diferentes.
- Para cada um dos quatro livros o João tem duas possibilidades: escolhe o livro ou não escolhe o livro. Há, assim, $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$ possibilidades. Excluindo o caso em que o João rejeita todos os livros, há $2^4 - 1$ possibilidades de escolher pelo menos um dos quatro livros.

31. $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^9 = \sum_{p=0}^{9} {}^{9}C_p \left(x^2\right)^p \left(\frac{1}{x}\right)^{9-p}$

$T_{p+1} = {}^{9}C_p x^{2p} \left(x^{-1}\right)^{9-p} = {}^{9}C_p\ x^{2p} x^{-9+p} = C_p x^{2p-9+p} = {}^{9}C_p x^{3p-9}$

$3p - 9 = 0 \Leftrightarrow 3p = 9 \Leftrightarrow p = 3$ (O termo independente de x é o termo em x^0)

$T_{3+1} = {}^{9}C_3\ x^0 = 84$

32. $\left(x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{12} = \sum_{p=0}^{12} {}^{12}C_p x^p \left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{12-p}$

$T_{p+1} = {}^{12}C_p x^p \left(\frac{2}{x^{1/2}}\right)^{12-p} = {}^{12}C_p x^p \left(2 \times x^{-\frac{1}{2}}\right)^{12-p} =$

$= {}^{12}C_p x^p \times 2^{12-p} \times \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^{12-p} =$

$= {}^{12}C_p 2^{12-p} \times x^p \times x^{-6+\frac{p}{2}} =$

$= {}^{12}C_p 2^{12-p} x^{p-6+\frac{p}{2}}$

$p - 6 + \frac{p}{2} = 9 \Leftrightarrow p + \frac{p}{2} = 15 \Leftrightarrow 2p + p = 30 \Leftrightarrow p = 10$

$T_{10+1} = {}^{12}C_{10} 2^{12-10} x^9 = 66 \times 4x^9 = 264x^9$

33. $\left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^7 = \sum_{p=0}^{7} {}^{7}C_p \left(\sqrt{2}\right)^p \left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{7-p}$

$T_{p+1} = {}^{7}C_p \left(\sqrt{2}\right)^p \left(-1 \times x^{-\frac{1}{2}}\right)^{7-p} = {}^{7}C_p \left(\sqrt{2}\right)^p (-1)^{7-p} \times x^{-\frac{7}{2}+\frac{p}{2}}$

$-\frac{7}{2} + \frac{p}{2} = -2 \Leftrightarrow -7 + p = -4 \Leftrightarrow p = 3$

$T_{3+1} = {}^{7}C_3 \left(\sqrt{2}\right)^3 (-1)^4\ x^{-2} = 35 \times 2\sqrt{2}\ x^{-2} = 70\sqrt{2}x^{-2}$

34. $\left(\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{1}{x^2}\right)^{10} = \sum_{p=10}^{10} {}^{10}C_p \left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^p \left(\frac{1}{x^2}\right)^{10-p}$

$$T_{p+1} = {}^{10}C_p \left(x^{\frac{1}{2}} \times 2^{-1}\right)^p \left(x^{-2}\right)^{10-p} = {}^{10}C_p\ x^{\frac{p}{2}}\ 2^{-p}\ x^{-20+2p} = {}^{10}C_p\ 2^{-p}\ x^{\frac{p}{2}-20+2p}$$

$$\frac{p}{2} - 20 + 2p = 0 \Leftrightarrow p - 40 + 4p = 0 \Leftrightarrow 5p = 40 \Leftrightarrow p = 8$$

$$T_{8+1} = {}^{10}C_8\ 2^{-8}\ x^0 = 45 \times \frac{1}{256} = \frac{45}{256}$$

35.1. Para ir de A para B há que seguir oito lados de quadrícula para a direita (8D) e seis para cima (6C) num total de 14 lados. Nos 14 lados de quadrícula há que escolher os oito em que se segue para a direita, o que pode ser feito de ${}^{14}C_8 = 3003$ maneiras diferentes (igualmente se podiam escolher os seis lados em que se vira para cima: ${}^{14}C_6 = 3003$)

35.2. Número de casos possíveis: 3003

Número de casos favoráveis:

$A \to C \quad C \to B$

${}^{7}C_5 \quad \times \quad {}^{7}C_3 = 21 \times 35 = 735$

$$P = \frac{735}{3003} = \frac{35}{143}$$

36. Número de casos possíveis: ${}^{9}C_3 = 84$

36.1.

Brancas	Pretas
4	5
2	1

Número de casos possíveis: ${}^{4}C_2 \times {}^{5}C_1 = 30$

$$P = \frac{30}{84} = \frac{5}{14}$$

36.2.

Brancas	Pretas
4	5
1	2
0	3

Número de casos possíveis: ${}^{4}C_1 {}^{5}C_2 + {}^{4}C_0 {}^{5}C_3 = 50$

$$P = \frac{50}{84} = \frac{25}{42}$$

36.3. Número de casos possíveis:

${}^{4}C_3 + {}^{5}C_3 = 14$ (3 brancas ou 3 pretas)

$$P = \frac{14}{84} = \frac{1}{6}$$

36.4. Pares Ímpares

Pares	Ímpares	
4	5	
0	3	$\leftarrow$ Soma ímpar
1	2	$\leftarrow$ Soma par
2	1	$\leftarrow$ Soma ímpar
3	0	$\leftarrow$ Soma par

Para que a soma seja par terão de ser retiradas:

1 bola par e 2 ímpares ou

3 bolas pares

Número de casos possíveis: ${}^{4}C_1 {}^{5}C_2 + {}^{4}C_3 = 44$

$$P = \frac{44}{84} = \frac{11}{21}$$

37.1. Número de casos possíveis: ${}^{10}C_4 = 210$

Número de casos favoráveis:

${}^{10}C_4 - {}^{6}C_4 = 195$

${}^{6}C_4$ → Comissões formadas só por mulheres

${}^{10}C_4$ → Todas as comissões.

$$P = \frac{195}{210} = \frac{13}{14}$$

37.2. Número de casos favoráveis

${}^{10}C_4 - {}^{4}C_4 - {}^{6}C_4 = 194$

${}^{6}C_4$ → Comissões formadas só por mulheres

${}^{4}C_4$ → Comissões formadas só por homens

${}^{10}C_4$ → Todas as comissões

$$P = \frac{194}{210} = \frac{97}{105}$$

38.

Preparados	Não preparados	Total
20	40	60
3	1	4

Número de casos possíveis: ${}^{60}C_4 = 487\ 635$

Número de casos favoráveis:

${}^{20}C_3 \times {}^{40}C_1 = 45\ 600$

$$P = \frac{45\ 600}{487\ 635} = \frac{160}{1711} \approx 9,4\%$$

Pág.96

39.

Falsas	Verdadeiras	Total
4	6	10
1	3	4
2	2	
3	1	
4	0	

Número de casos possíveis: ${}^{10}C_4 = 210$

Número de casos favoráveis:

${}^{4}C_1\,{}^{6}C_3 + {}^{4}C_2\,{}^{6}C_2 + {}^{4}C_3\,{}^{6}C_1 + {}^{4}C_4\,{}^{6}C_0 = 80 + 90 + 24 + 1 = 195$

ou ${}^{10}C_4 - {}^{6}C_4 = 195$

$$P = \frac{195}{210} = \frac{13}{14}$$

40.1. C/ defeito S/ defeito Total

C/ defeito	S/ defeito	Total
5	10	15

Número de casos possíveis: ${}^{15}C_4 = 1365$

Número de casos favoráveis: ${}^{15}C_4 - {}^{10}C_4 = 1155$

$$P = \frac{1155}{1365} = \frac{11}{13}$$

40.2. Número de casos possíveis: $15!$

Número de casos favoráveis:

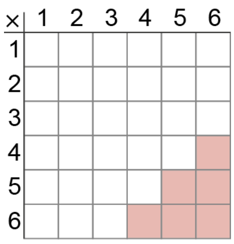
$5! \times 10! \times 11$

→ Número de posições que o grupo das lâmpadas defeituosas pode ocupar (no início da fila, no fim da fila ou entre as restantes dez lâmpadas)

$$P = \frac{5! \times 10! \times 11}{15!} = \frac{1}{273}$$

41. Na tabela ao lado são assinalados os casos favoráveis entre os 36 possíveis.

$$P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$



42. $\#F = 8$

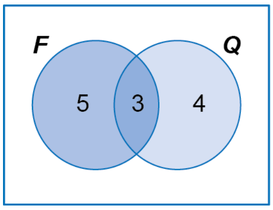
$\#Q = 7$

$\#F \cup Q = 12$

$\#(F \cup Q) = \#F + \#Q - \#(F \cap Q)$

$12 = 8 + 7 - \#(F \cap Q)$

$\#(F \cap Q) = 3$



Número de casos possíveis: ${}^{12}C_2 = 66$

Número de casos favoráveis:

${}^{12}C_2 - 5 \times 4 = 46$

(Todos os pares exceto os formados por um professor que só lecione Física e um que só lecione Química).

$$P = \frac{46}{66} = \frac{23}{33}$$

43. 1 , 2 , 3 , 4 , 5

Número de casos possíveis

1.º A	1.º A	1.º A	1.º A
2	5	5	5

$2\times 5^3=250$

Número de casos favoráveis:

1.º A	1.º A	1.º A	1.º A	
1	3	2	1	Terminados em 2
2	3	2	1	Terminados em 4

$3\times 2+2\times 3\times 2=6+12=18$

$$P=\frac{18}{250}=\frac{9}{125}$$

44.

Raparigas	Rapazes	Total
12	8	20
2	2	4
3	1	

Número de casos possíveis: ${}^{20}C_4=4845$

Número de casos favoráveis:

$${}^{12}C_2\,{}^{8}C_2+{}^{12}C_3\,{}^{8}C_1=1848+1760=3608$$

3 raparigas e 1 rapaz

2 raparigas e 2 rapazes

$$P=\frac{3608}{4845}\approx 74{,}5\%$$

45. Número de casos possíveis:

$${}^{4}A_2\times{}^{8}A'_2=4\times 3\times 8^2=768$$

Sequência dos restantes dois algarismos, escolhidos entre os restantes oito

Número de possíveis posições que o zero e o nove podem ocupar

$$P=\frac{1}{768}$$

46.1. ${}^{26}A'_3\times{}^{10}A'_3=26^3\times 10^3$

46.2. Número de casos possíveis: $26^3\times 10^3$

Número de casos favoráveis:

$$5\times{}^{26}A'_2\times{}^{10}C_3=405\ 600$$

Subconjuntos de três algarismos (por ordem crescente)

Sequências de duas letras quaisquer

Há cinco vogais

$$P=\frac{405\ 600}{26^3\times 10^3}=\frac{3}{130}$$

47. Número de casos possíveis:

1.º C	2.º C	3.º C	4.º C
3	3	3	3

$3^4 = 81$

Número de casos favoráveis ao acontecimento contrário: 3 (recebem todos o prémio A ou o B ou o C)

$$P = 1 - \frac{3}{81} = \frac{26}{27}$$

Pág. 97

48. Brancas: 4

Amarelas: 2

Pretas: n

Total $n + 6$

O acontecimento contrário de "sair pelo menos uma branca" é "não sair nenhuma bola branca"

Equação que traduz o problema:

$$1 - \underbrace{\frac{n+2}{n+6}}_{\text{Probabilidade de a 1.ª bola não ser branca}} \times \underbrace{\frac{n+1}{n+5}}_{\text{Probabilidade de a 2.ª bola não ser branca sabendo que a primeira não é branca}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n+2}{n+6} \times \frac{n+1}{n+5} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(n+2)\ (n+1) = (n+6)\ (n+5) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\left(n^2 + n + 2n + 2\right) = n^2 + 5n + 6n + 30 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3n^2 + 9n + 6 = n^2 + 11\,n + 30 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2n^2 - 2n - 24 = 0 \overset{n \in \mathbb{N}}{\Leftrightarrow} n = 4$$

$$2n^2 - 2n - 24 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow n^2 - n - 12 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm 7}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow n = -3 \vee n = 4$$

Foram introduzidas quatro bolas pretas no saco.

49.

Pretas	Brancas	Amarelas
5	5	1

Número de casos possíveis: ${}^{11}C_2 = 55$

Número de casos favoráveis (a que as duas bolas sejam da mesma cor):

${}^{5}C_2 + {}^{5}C_2 = 20$

$$P = 1 - \frac{20}{55} = \frac{7}{11}$$

50.

Brancas	Pretas	Verdes
3	4	5

$$P = \frac{{}^{3}C_2 + {}^{4}C_2 + {}^{3}C_2}{{}^{12}C_2} = \frac{19}{66}$$

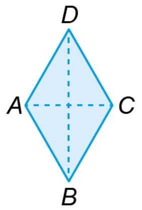
51. Número de casos possíveis:

${}^{15}C_5$: é o número de maneiras de nos 20 lugares da fila escolher os lugares dos livros de Matemática A

Número de casos favoráveis ao acontecimento contrário:

${}^{11}C_5$: é o número de maneiras de intercalar os 5 livros de Matemática A entre os restantes 10 sem que fiquem dois seguidos. Entre os 10 livros, incluindo o início e o fim da fila há 11 lugares entre os quais se escolhem cinco.

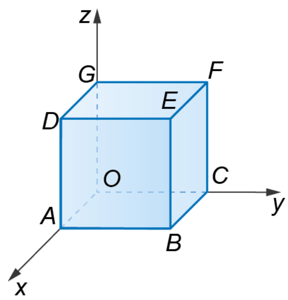
$$P = 1 - \frac{{}^{11}C_5}{{}^{15}C_5} = 1 - \frac{462}{3003} = \frac{11}{13}$$



52. Quaisquer que sejam os três vértices escolhidos, pertencem todos a uma das faces. Trata-se de um acontecimento certo.

$P = 1$.

53. Número de casos possíveis: ${}^{8}C_2 = 28$



53.1. Para que a reta definida por dois vértices seja paralela ao plano de equação $z = 2$ tem de estar contida no plano de equação $z = 0$ ou no plano de equação $z = 4$.

Há, portanto, ${}^{4}C_2 + {}^{4}C_2 = 12$ casos favoráveis.

$$P = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}$$

53.2. Pertencem ao plano de equação $x = y$ quatro vértices do cubo: *O*, *B*, *E* e *G*

Número de casos favoráveis: ${}^{4}C_2 = 6$

$$P = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$$

53.3. Há quatro retas que a considerar: *AF*; *BG*; *CD* e *OE*

$$P = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}$$

54. $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$P(\{1\}) = 2P(\{2\})$; $P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\})$

54.1. $P(S) = 1$

$$P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) = 1$$

$$2P(\{2\}) + 5P(\{2\}) = 1 \Leftrightarrow 7P(\{2\}) = 1 \Leftrightarrow P(\{2\}) = \frac{1}{7}$$

$$P(\{1\}) = 2P(\{2\}) = 2 \times \frac{1}{7} = \frac{2}{7}$$

$$P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{7}$$

54.2. $A = \{3,\ 6\}$; $B = \{2,\ 4,\ 6\}$

a) $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$P(A \cap B) = P(\{6\}) = \dfrac{1}{7}$

$P(B) = P(\{2,\ 4,\ 6\}) = \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{7} = \dfrac{3}{7}$

$P(A|B) = \dfrac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{7}} = \dfrac{1}{3}$

b) $P(A) = P(\{3,\ 6\}) = \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{7} = \dfrac{2}{7}$

$P(A|B) \neq P(A)$, logo, A e B não são independentes.

55.

	A_1	A_2	A_3	
Masculino: M	240	100	60	400
Feminino: F	270	210	120	600
	510	310	180	1000

$0{,}4 \times 1000 = 400$; $0{,}45 \times 600 = 270$;

$0{,}6 \times 400 = 240$; $0{,}35 \times 600 = 210$;

$0{,}25 \times 400 = 100$

55.1. $P(F|A_1) = \dfrac{270}{510} = \dfrac{9}{17}$

55.2. $P(F) = \dfrac{600}{1000} = 0{,}6$; $P(A_3) = \dfrac{180}{1000} = 0{,}18$

$P(F \cap A_3) = \dfrac{120}{1000} = 0{,}12$

$P(F) \times P(A_3) = 0{,}6 \times 0{,}18 = 0{,}108$

Como $P(F \cap A_3) \neq P(F) \times P(A_3)$, F e A_3 não são independentes.

Pág. 98

56. Sejam os acontecimentos

D: "A lâmpada é defeituosa"

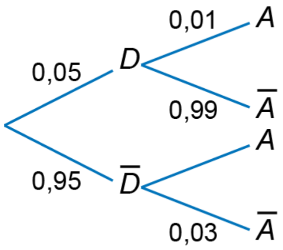
A: "A lâmpada é aprovada"

$P(D) = 0{,}05$

$P(A|D) = 0{,}01$

$P(\bar{A}|\bar{D}) = 0{,}03$

56.1.



$P(\overline{A}|D) = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$

$P(\overline{D}) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$

$$P(D|\overline{A}) = \frac{P(D \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{P(D) \times P(\overline{A}|D)}{P(D \cap \overline{A}) + P(\overline{D} \cap \overline{A})} =$$

$$= \frac{0{,}05 \times 0{,}99}{0{,}05 \times 0{,}99 + 0{,}95 \times 0{,}03} = \frac{0{,}0495}{0{,}0495 + 0{,}0285} = \frac{33}{52} \approx 63{,}5\%$$

56.2. $P(\overline{A}) = 0{,}0495 + 0{,}0285 = 0{,}078$

$0{,}078 \times 10^6 = 78\ 000$

57.

	A	B	
Rapazes: M	10	10	20
Raparigas: F	15	20	35
	25	30	55

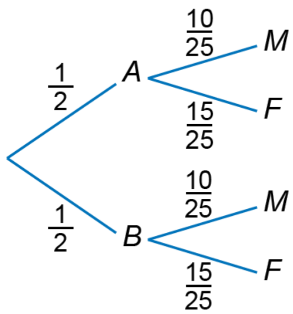
$$P(B|F) = \frac{P(B \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{20}{55}}{\frac{35}{55}} = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}$$

58.

	A	B	
Rapazes: M	10	10	20
Raparigas: F	15	20	35
	25	30	55

$$P(B|F) = \frac{P(B \cap F)}{P(F)} = \frac{P(B)P(F|B)}{P(A \cap F) + P(B \cap F)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{20}{30}}{\frac{1}{2} \times \frac{15}{25} + \frac{1}{2} \times \frac{20}{30}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{19}{30}} = \frac{10}{19}$$

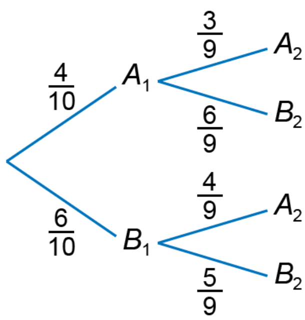


59. Brancas: 6
Azuis: $\underline{\quad\quad 4}$
10

59.1. Número de casos possíveis: 10!
Número de casos favoráveis:
$4! \times 6! \times 7$ → Número de posições que o grupo das bolas cor de laranja pode ocupar

$$P = \frac{4! \times 6! \times 7}{10!} = \frac{1}{30}$$

59.2.
$$P\left(A_1 \middle| B_2\right) = \frac{P(A_1 \cap B_2)}{P(B_2)} =$$
$$= \frac{P(A_1) \times P\left(B_2 \middle| A_1\right)}{P(A_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap B_2)} =$$
$$= \frac{\frac{4}{10} \times \frac{6}{9}}{\frac{4}{10} \times \frac{6}{9} + \frac{6}{10} \times \frac{5}{9}} = \frac{\frac{24}{90}}{\frac{24}{90} + \frac{30}{90}} = \frac{4}{9}$$



60. Sejam os acontecimentos:
D: "O parafuso produzido é defeituoso"
A: "O parafuso é produzido pela máquina A"
B: "O parafuso é produzido pela máquina B"

$P\left(D \middle| A\right) = 0{,}003$

$P\left(D \middle| B\right) = 0{,}005$

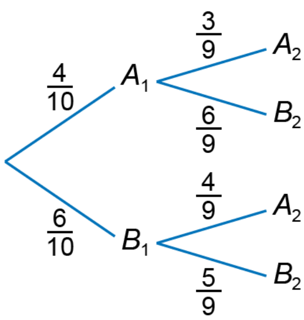
$P(A) = 0{,}6$ e $P(B) = 0{,}4$

60.1.
$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = P(A) \times P\left(D \middle| A\right) + P(B) \times P\left(D \middle| B\right) =$$
$$= 0{,}6 \times 0{,}003 + 0{,}4 \times 0{,}005 = 0{,}0038 = 0{,}38\%$$

60.2.
$$P\left(B \middle| D\right) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}4 \times 0{,}005}{0{,}0038} = \frac{0{,}002}{0{,}0038} = \frac{10}{19}$$

61. Brancas: 4
Azuis: $\underline{\quad\quad 6}$
10

Sejam os acontecimentos:
A_1: "a primeira bola extraída é azul"
B_1: "a primeira bola extraída é brancal"
A_2: "a segunda bola extraída é azul"
B_2: "a segunda bola extraída é brancal
D: "as bolas extraídas têm cores diferentes"



$$P\left(B_1 | D\right) = \frac{P(B_1 \cap D)}{P(D)} = \frac{P(B_1 \cap A_2)}{P(B_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap B_2)} =$$

$$= \frac{\frac{4}{10} \times \frac{6}{9}}{\frac{4}{10} \times \frac{6}{9} + \frac{6}{10} \times \frac{4}{9}} = \frac{24}{48} = \frac{1}{2}$$

62. Brancas: 4
Pretas: 6

Pág. 99

62.1. Número de casos possíveis: $P_{10} = 10!$

Número de casos favoráveis:

$P_4 \times P_6 \times \underbrace{2}_{\text{No princípio ou no fim da fila}} = 4! \times 6! \times 2$

$$P = \frac{4! \times 6! \times 2}{10!} = \frac{1}{105}$$

62.2. $P\left(A|B\right)$ é a probabilidade de as bolas brancas ficarem no início ou no fim da fila sabendo que as bolas pretas ficaram seguidas no início da fila.

Se as bolas pretas ficam seguidas no início da fila, então é certo que as bolas brancas ficam seguidas no fim da fila. Assim: $P\left(A|B\right) = 1$

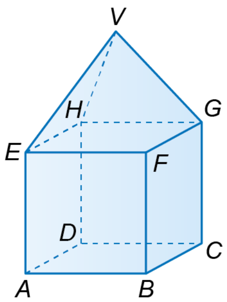
$P\left(B|A\right)$ é a probabilidade de as bolas pretas ficarem seguidas no início da fila sabendo que as bolas brancas ficam seguidas no princípio ou no fim da fila.

Se as bolas brancas ficam seguidas no início ou no fim da fila com igual probabilidade, então a probabilidade de ficarem no início da fila é $\frac{1}{2}$.

Assim, $P\left(B|A\right) = \frac{1}{2}$.

63. Número de casos possíveis:

${}^9C_3 = 84$



63.1. Número de casos favoráveis:

${}^4C_3 \times 6 = 24$

$$P = \frac{24}{84} = \frac{2}{7}$$

63.2. Sabe-se que os pontos escolhidos são vértices da pirâmide. São, portanto, três pontos escolhidos entre os cinco pontos: *E*, *F*, *G*, *H*, *V*

Número de casos possíveis: ${}^5C_3 = 10$

Pretende-se a probabilidade de os três pontos escolhidos serem vértices do cubo: *E*, *F*, *G*, *H*

Número de casos favoráveis: ${}^4C_3 = 4$

$$P(A|B) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

64.1. $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap (B \cup \overline{B}) = A \cap E = A$

$(A \cap B) \cap (A \cap \overline{B}) = A \cap (B \cap \overline{B}) = A \cap \varnothing = \varnothing$

Logo, $P\left[(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})\right] = P(A) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) \Leftrightarrow$ | Definição de função probabilidade

$\Leftrightarrow P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

64.2. Sabe-se que $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$.

Se $B \subset A$, $A \cap B = B$.

Então, se $B \subset A$, $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(B)$.

64.3. Em **64.2.** provou-se que se $B \subset A$, $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(B)$.

Como $P(A \cap \overline{B}) \geq 0$ tem-se que:

se $B \subset A$, $P(A) - P(B) \geq 0$.

Logo, se $B \subset A$, $P(B) \leq P(A)$.

64.4. $P(A|B) + P(\overline{A}|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} + \dfrac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} =$

$= \dfrac{P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} =$ | $(A \cap \overline{B}) \cap (A \cap B) = \varnothing$

$= \dfrac{P\left[(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)\right]}{P(B)} = \dfrac{P\left[(A \cup \overline{A}) \cap B\right]}{P(B)} =$

$= \dfrac{P(S \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$

64.5. Hipótese: $P(A \cap B) = 0$

$$P(A|B) + P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0}{P(B)} + \frac{0}{P(A)} = 0$$

64.6. Hipótese: A e B são independentes, ou seja,

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$$

$$= P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) = \qquad \text{| Por hipótese}$$

$$= 1 - P\left(\overline{A}\right) + P(B)\left[1 - P(A)\right] =$$

$$= 1 - P\left(\overline{A}\right) + P(B) \times P\left(\overline{A}\right) =$$

$$= 1 - P\left(\overline{A}\right)\left[1 - P(B)\right] = 1 - P\left(\overline{A}\right) \times P\left(\overline{B}\right)$$

64.7. Hipótese: A e B são independentes, ou seja

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Pretende-se provar que $\overline{A}$ e $\overline{B}$ são independentes, ou seja, $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A}\right) \times P\left(\overline{B}\right)$

$$P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cup B}\right) = \qquad \text{| Leis de De Morgan}$$

$$= 1 - P(A \cup B) =$$

$$= 1 - \left[P(A) + P(B) - P(A \cap B)\right] =$$

$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A) \times P(B) = \qquad \text{| Por hipótese}$$

$$= P\left(\overline{A}\right) - P(B)\left[1 - P(A)\right] =$$

$$= P\left(\overline{A}\right) - P(B) \times P\left(\overline{A}\right) =$$

$$= P\left(\overline{A}\right)\left[1 - P(B)\right] = P\left(\overline{A}\right) \times P\left(\overline{B}\right)$$

65. Trata-se de determinar a probabilidade de as três primeiras bolas extraídas serem vermelhas.

65.1. $P = \frac{6}{9} \times \frac{6}{9} \times \frac{6}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$

65.2. $P = \frac{6}{9} \times \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{120}{504} = \frac{5}{21}$

66. Sejam os acontecimentos:

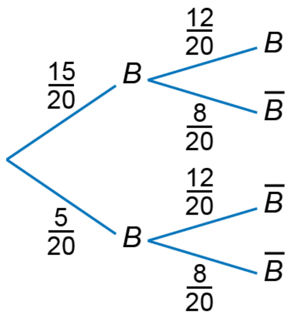
A: "A Ana é admitida"

B: "A Beatriz é admitida"

X: "É admitida apenas uma das candidatas"

Sabemos que $P(A) = \frac{15}{20}$ e $P(B) = \frac{12}{20}$.

Pretende-se determinar $P(A \mid X)$.



$$P(A\mid X)=\frac{P(A\cap X)}{P(X)}=$$

$$=\frac{P(A\cap \bar{B})}{P(A\cap \bar{B})+P(\bar{A}\cap B)}=$$

$$=\frac{\frac{15}{20}\times\frac{8}{20}}{\frac{15}{20}\times\frac{8}{20}+\frac{5}{20}\times\frac{12}{20}}=$$

$$=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{10}+\frac{3}{20}}=\frac{2}{3}$$

67. Número de casos possíveis:

${}^{20}C_5$ (é o número de maneiras de escolher os lugares dos 5 coelhos brancos na fila de 20)

Número de casos favoráveis (ao acontecimento contrário):

${}^{16}C_5$ (é o número de maneiras de escolher lugar para os 5 coelhos brancos entre os 15 coelhos pretos sem que fiquem dois seguidos – pode ser no início da fila, entre os coelhos pretos ou no fim da fila).

$$P=1-\frac{{}^{16}C_5}{{}^{20}C_5}=\frac{232}{323}\approx 72\%$$