Unidade 2: Geometria

1. $ABF: x=2$; $ABC: z=-3$; $FBC: y=1$

1.1. $ABF: x=2$; $ABC: z=-3$

$AB: x=2 \wedge z=-3$

1.2 $ABF: x=2$; $FBC: y=1$

$BF: x=2 \wedge y=1$

1.3 $ABC: z=-3$; $FBC: y=1$

$CB: z=-3 \wedge y=1$

2.1. $A(x\ ,\ y)$

Se $y=4$ e $y=x$, então $x=4$.

Logo, o ponto *A* tem coordenadas $(4\ ,\ 4)$.

2.2. Raio da circunferência: $\overline{OA}=\sqrt{4^2+4^2}=\sqrt{32}$

Equação da circunferência: $(x-4)^2+(y-4)^2=32$.

2.3. $C(x\ ,\ 0)$, $x>0$

Como o ponto *C* pertence à circunferência, temos:

$(x-4)^2+(0-4)^2=32 \Leftrightarrow (x-4)^2+16=32 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-4)^2=16 \Leftrightarrow x-4=4 \vee x-4=-4 \Leftrightarrow x=8 \vee x=0$

Dado que $x>0$, vem $x=8$.

2.4. $A(4\ ,\ 4)$, $C(8\ ,\ 0)$ e $P(x\ ,\ y)$

Equação da reta *r*, mediatriz de [*AC*]:

$(x-4)^2+(y-4)^2=(x-8)^2+(y-0)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-8x+16+y^2-8y+16=x^2-16x+64+y^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -8y=-16x+8x+64-16-16 \Leftrightarrow -8y=-8x+32 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=x-4$

2.5. $A(4\ ,\ 4)$. Seja $P(x\ ,\ y)$ um ponto da reta *r*.

Como $y=x-4$, temos $P(x\ ,\ x-4)$.

$\overline{AP}=20 \Leftrightarrow \sqrt{(x-4)^2+(x-4-4)^2}=20 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-8x+16+x^2-16x+64=400 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2-24x-320=0 \Leftrightarrow x^2-12x-160=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{12\pm\sqrt{144+640}}{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{12\pm 28}{2} \Leftrightarrow x=20 \vee x=-8$

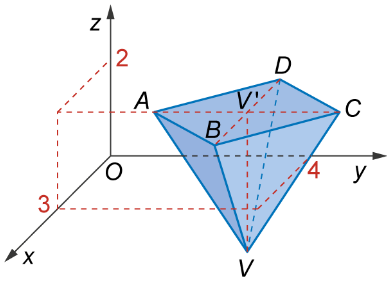
Como $x>0$, temos $P(20\ ,\ 16)$.

3. Volume = 8

$ABCD : z = 2$

$AC : x = 3 \wedge z = 2$

$BVD : y = 4$



3.1. $A(3\,,a\,,2)$

$V(3\,,4\,,-1)$ $\quad$ V tem abcissa igual à de A, ordenada 4 e cota igual a -1.

$V'(3\,,4\,,2)$

Altura da pirâmide: $\overline{VV'} = |2-(-1)| = 3$

Seja $\overline{AB} = x$.

$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \times x^2 \times 3$

$8 = x^2 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{8}$

$x^2 + x^2 = \overline{AC}^2$

$8 + 8 = \overline{AC}^2 \Leftrightarrow \overline{AC} = 4$

$\overline{V'A} = \overline{V'B} = \overline{V'C} = \overline{V'D} = 2$

Logo, $A(3\,,4-2\,,2)$ ou $A(3\,,2\,,2)$.

3.2. $V(3\,,4\,,-1)$, $A(3\,,2\,,2)$

$P(x\,,y\,,z)$

Equação do plano mediador de $[VA]$:

$(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z+1)^2 = (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^2 - 8y + 16 + z^2 + 2z + 1 = y^2 - 4y + 4 + z^2 - 4z + 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -8y + 4y + 2z + 4z + 17 - 8 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4y + 6z + 9 = 0 \Leftrightarrow 4y - 6z - 9 = 0$

3.3. $r = \overline{VB} = \overline{VA} = \sqrt{(3-3)^2 + (2-4)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{0+4+9} = \sqrt{13}$

$r^2 = 13$

$(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z+1)^2 = 13$

Pág. 22

4.1. $x^2 + 9y^2 = 9 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{9y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$

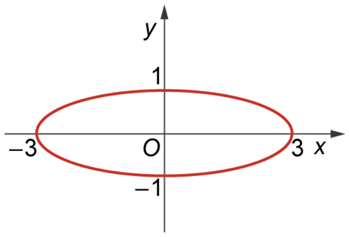
$a^2 = 9 \Leftrightarrow a = 3$

$b^2 = 1 \Leftrightarrow b = 1$

$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow 9 = 1 + c^2 \Leftrightarrow c^2 = 8 \Leftrightarrow c = \sqrt{8} \Leftrightarrow c = 2\sqrt{2}$

Vértices: $(-3\,,0)\,,\ (3\,,0)\,,\ (0\,,-1)\,,(0\,,1)$

Focos: $\left(-2\sqrt{2}\,,0\right),\ \left(2\sqrt{2}\,,0\right)$



4.2. $25y^2=16\left(1-x^2\right)\Leftrightarrow 25y^2=16-16x^2\Leftrightarrow 16x^2+25y^2=16\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\frac{16x^2}{16}+\frac{25y^2}{16}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{\frac{16}{25}}=1$$

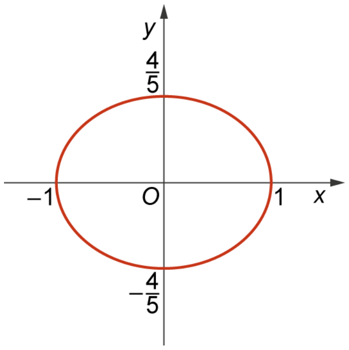
$a^2=1\Leftrightarrow a=1$

$b^2=\frac{16}{25}\Leftrightarrow b=\frac{4}{5}$

$a^2=b^2+c^2\Leftrightarrow 1=\frac{16}{25}+c^2\Leftrightarrow c^2=1-\frac{16}{25}\Leftrightarrow c^2=\frac{9}{25}\Leftrightarrow c=\frac{3}{5}$

Vértices: $(-1,0)\,,\ (1,0)\,,\ \left(0\,,-\frac{4}{5}\right),\left(0\,,\frac{4}{5}\right)$

Focos: $\left(-\frac{3}{5}\,,0\right),\ \left(\frac{3}{5}\,,0\right)$



4.3. $4x^2+1{,}44y^2=5{,}76\Leftrightarrow\frac{4x^2}{5{,}76}+\frac{1{,}44y^2}{5{,}76}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{\frac{5{,}76}{4}}+\frac{y^2}{\frac{5{,}76}{1{,}44}}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{1{,}44}+\frac{y^2}{4}=1$

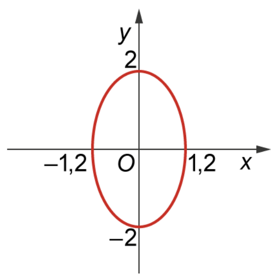
$a^2=1{,}44\Leftrightarrow a=1{,}2$

$b^2=4\Leftrightarrow b=2$

$b^2=a^2+c^2\Leftrightarrow 4=1{,}44+c^2\Leftrightarrow c^2=4-1{,}44\Leftrightarrow c^2=2{,}56\Leftrightarrow c=1{,}6$

Vértices: $(-1{,}2\,;0)\,,\ (1{,}2\,;0)\,,\ (0\,,-2)\,,(0\,,2)$

Focos: $(0\,;-1{,}6)\,,\ (0\,;1{,}6)$



Pág. 23

5.1. $2a = 10 \Leftrightarrow a = 5\,;\ a^2 = 25$

$2b = 6 \Leftrightarrow b = 3\,;\ b^2 = 9$

$\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

5.2. $2c = 6 \Leftrightarrow c = 3$

A distância focal só pode ser igual ao eixo menor:

$2b = 6 \Leftrightarrow b = 3:\ b^2 = 9$

$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 = 3^2 + 3^2 \Leftrightarrow a^2 = 18$

$\dfrac{x^2}{18} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

6.1. $E(-c\,,0)$

$C(a\,,0)$

Como $\overline{EF} = \overline{BD}$, vem $b = c$ e $[EBFD]$ é um quadrado de lado a, pelo que $a^2 = 18$.

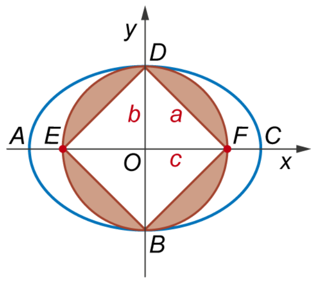
$a^2 = b^2 + c^2$

$18 = b^2 + b^2 \Leftrightarrow b^2 = 9$

$b = c = 3$

$a = \sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}$

$E(-3\,,0)$ e $C\left(3\sqrt{2}\,,0\right)$



6.2. $\dfrac{x^2}{18} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow 9x^2 + 18y^2 = 18 \times 9 \Leftrightarrow 9x^2 + 18y^2 = 162$

6.3. $A_{\text{sombreada}} = A_{\text{círculo}} - A_{\text{quadrado}} = \pi \times 3^2 - 18 = 9\pi - 18$

Pág. 25

7.1. **a)** $\ldots + \overrightarrow{FH} = \overrightarrow{BG}$

$\boldsymbol{\overrightarrow{AF}} + \overrightarrow{FH} = \overrightarrow{AH}$

b) $E + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{BO} = E + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} =$

$= E + \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OB} = E + \overrightarrow{EB} = B$

c) $B + 2\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{FG} = B + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GF} =$

$= B + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HE} = B + \overrightarrow{AE} = B + \overrightarrow{BF} = F$

7.2. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AH}$ $\qquad\qquad \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BG}$

$\mathbf{1}\overrightarrow{AB} + \mathbf{2}\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{BG}$

$a = 1$ e $b = 2$

8.1. $A(-3\ ,\ 2)$, $B(-1\ ,\ -2)$, $C(5\ ,\ 1)$

$\overrightarrow{BC} = C - B = (5\ ,\ 1) - (-1\ ,\ -2) = (6\ ,\ 3)$

$D = A + \overrightarrow{BC} = (-3\ ,\ 2) + (6\ ,\ 3) = (3\ ,\ 5)$

O ponto D tem coordenadas $(3\ ,\ 5)$.

8.2. $\overrightarrow{AB} = B - A = (-1\ ,\ -2) - (-3\ ,\ 2) = (-1+3\ ,\ -2-2) = (2\ ,\ -4)$

$\left\|\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\right\| = \left\|(2\ ,\ -4) - \frac{1}{3}(6\ ,\ 3)\right\| = \|(2\ ,\ -4) - (2\ ,\ 1)\| =$

$= \|(0\ ,\ -5)\| = \sqrt{0^2 + (-5)^2} = 5$

8.3. $A(-3\ ,\ 2)$, $C(5\ ,\ 1)$

Designemos por M o centro da circunferência que é o ponto médio de $[AC]$.

$M\left(\frac{-3+5}{2}\ ,\ \frac{2+1}{2}\right)$; $M\left(1\ ,\ \frac{3}{2}\right)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (5\ ,\ 1) - (-3\ ,\ 2) = (8\ ,\ -1)$

$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{8^2 + (-1)^2} = \sqrt{65}$

$r = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \frac{\sqrt{65}}{2}$; $r^2 = \frac{65}{4}$

Equação da circunferência: $(x-1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{65}{4}$

8.4. As diagonais de um retângulo são iguais e bissetam-se. Logo, se $[AC]$ é um diâmetro da circunferência, $[BD]$ também é.

8.5. $P(0\ ,\ y)$, $A(-3\ ,\ 2)$, $B(-1\ ,\ -2)$

a) $\overrightarrow{AP} = P - A = (0\ ,\ y) - (-3\ ,\ 2) = (3\ ,\ y-2)$

$\left\|\overrightarrow{AP}\right\| = 5 \Leftrightarrow \sqrt{3^2 + (y-2)^2} = 5 \Leftrightarrow 9 + (y-2)^2 = 25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (y-2)^2 = 16 \Leftrightarrow y - 2 = -4 \vee y - 2 = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = -2 \vee y = 6$

Portanto, $P(0\ ,\ -2)$ ou $P(0\ ,\ 6)$.

b) $\overline{AP} = \overline{BP} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{(0+3)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(0+1)^2 + (y+2)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9 + y^2 - 4y + 4 = 1 + y^2 + 4y + 4 \Leftrightarrow 8y = 8 \Leftrightarrow y = 1$

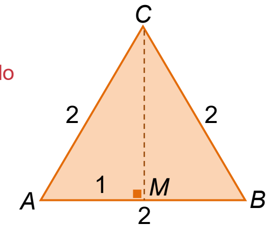
Logo, $P(0\ ,\ 1)$.

9.1. **a)** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$

$= \overline{AB} \times \overline{AM} =$

$= 2 \times 1 = 2$

O ponto M é a projeção ortogonal do ponto C na reta AB.



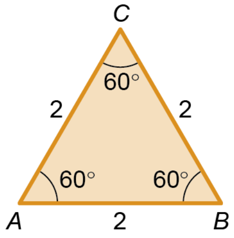
ou

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$

$= \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\, \overrightarrow{AC}}\right) =$

$= 2 \times 2 \times \cos 60^{\circ} =$

$= 4 \times \dfrac{1}{2} = 2$

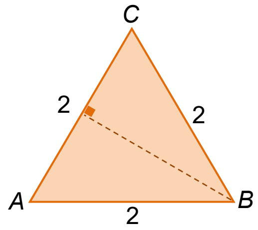


b) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} =$

$= -\,\overline{CA} \times \overline{CN} =$

$= -2 \times 1 = -2$

O ponto N é a projeção ortogonal do ponto B na reta AC.



ou

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} =$

$= -\left\|\overrightarrow{CA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{CB}\right\| \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right) =$

$= -2 \times 2 \times \cos 60^{\circ} =$

$= -4 \times \dfrac{1}{2} = -2$

9.2. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}\right) =$

$= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BM}\right) =$

$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BM} =$

$= 0 + 0 + 0 + \left\|\overrightarrow{BM}\right\|^2 =$ $\quad$ $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{AD}$

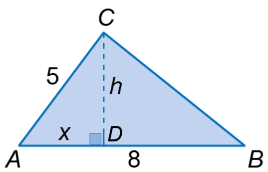
$= \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2}{4}$

9.3. **a)** $A_{[ABC]} = 16 \Leftrightarrow \dfrac{8h}{2} = 16 \Leftrightarrow h = 4$

$x^2 + h^2 = 5^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 16 = 25 \Leftrightarrow x^2 = 9 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x = 3$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\, \overrightarrow{AC}}\right) = 8 \times 5 \times \dfrac{3}{5} = 24$



ou

$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \times \overline{AD} = 8 \times 3 = 24$

O ponto D é a projeção ortogonal do ponto C na reta AB .

b) $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = \frac{3}{5} \Rightarrow \widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}} \approx 53{,}1^{\circ}$

9.4. $\vec{u}(-1\ ,\ 2)$, $\vec{v}(2\ ,\ -3)$, $\vec{w}(-1\ ,\ -1)$

a) $2\vec{v} \cdot (\vec{u} - \vec{w}) = 2(2\ ,\ -3) \cdot [(-1\ ,\ 2) - (-1\ ,\ -1)] =$

$= (4\ ,\ -6) \cdot (0\ ,\ 3) = 4 \times 0 - 6 \times 3 = -18$

b) $\cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{w}}\right) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{w}\|} = \frac{(-1\ ,\ 2) \cdot (-1\ ,\ -1)}{\sqrt{1+4} \times \sqrt{1+1}} =$

$= \frac{1-2}{\sqrt{5} \times \sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{10}}$

$\cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{w}}\right) = \frac{-1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \widehat{\vec{u}, \vec{w}} \approx 108{,}4^{\circ}$

9.5. $\vec{u}(-2k\ ,\ k\ ,\ 2)$, $\vec{v}(-8\ ,\ 4\ ,\ 1)$

a) $\|\vec{u}\| = \|2\vec{v}\| \Leftrightarrow \|(-2k\ ,\ k\ ,\ 2)\| = \|2(-8\ ,\ 4\ ,\ 1)\| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{(-2k)^2 + k^2 + 4} = \|(-16\ ,\ 8\ ,\ 2)\| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{4k^2 + k^2 + 4} = \sqrt{(-16)^2 + 64 + 4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5k^2 + 4 = 256 + 64 + 4 \Leftrightarrow 5k^2 = 320 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k^2 = 64 \Leftrightarrow k = 8 \vee k = -8$

Se $k = 8$, $\vec{u} = (-16\ ,\ 8\ ,\ 2)$.

Se $k = -8$, $\vec{u} = (16\ ,\ -8\ ,\ -2)$.

b) $\vec{u} = \lambda\vec{v}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(-2k\ ,\ k\ ,\ 2) = \lambda(-8\ ,\ 4\ ,\ 1) \Leftrightarrow \begin{cases} -2k = -8\lambda \\ k = 4\lambda \\ 2 = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -16 = -16 \\ k = 8 \\ 2 = \lambda \end{cases} \Rightarrow k = 8$$

c) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (-2k\ ,\ k\ ,\ 2) \cdot (-8\ ,\ 4\ ,\ 1) = 0 \Leftrightarrow$

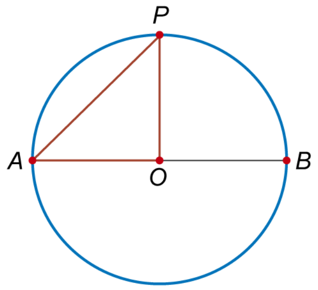
$\Leftrightarrow 16k + 4k + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 20k = -2 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{10}$

10. $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=\overline{AO}\times\overline{AB}=$ | Definição de produto escalar

$=2\times 4=8$

Resposta: (C)



11.1. $A(-3\ ,\ -1)$ e $B(6\ ,\ -4)$

a) $m=\dfrac{-4+1}{6+3}=\dfrac{-3}{9}=-\dfrac{1}{3}$

$y+1=-\dfrac{1}{3}(x+3)\Leftrightarrow y=-\dfrac{1}{3}x-1-1\Leftrightarrow y=-\dfrac{1}{3}x-2$

b) $m'=-\dfrac{1}{m}=3$

$\vec{s}(1\ ,\ 3)$ é um vetor diretor da reta s.

$s:\ (x\ ,\ y)=(-3\ ,\ -1)+k(1\ ,\ 3)\ ,\ k\in\mathbb{R}$

c) $\overrightarrow{AB}=B-A=(6\ ,\ -4)-(-3\ ,\ -1)=(9\ ,-3)$

$\overrightarrow{OA}=A-O=(-3\ ,\ -1)$

Seja α o ângulo dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{OA}$.

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OA}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{OA}\right\|}=\frac{(9\ ,-3)\cdot(-3,-1)}{\sqrt{81+9}\times\sqrt{9+1}}=\frac{-27+3}{\sqrt{90}\times\sqrt{10}}=\frac{-24}{\sqrt{900}}=-\frac{24}{30}=-\frac{4}{5}$$

Se $\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$ então $\alpha\approx 143{,}1^{\circ}$.

11.2. $A(8\ ,\ 4\ ,\ 0)$, $B=(6\ ,\ 10\ ,\ 3)$ e $H(5\ ,\ -1\ ,\ 8)$

a) $G=H+\overrightarrow{HG}=H+\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB}=B-A=(6-8\ ,\ 10-4\ ,\ 3-0)=(-2\ ,\ 6\ ,\ 3)$

$G=(5\ ,\ -1\ ,\ 8)+(-2\ ,\ 6\ ,\ 3)=(3\ ,\ 5\ ,\ 11)$

$G(3\ ,\ 5\ ,\ 11)$

b) $AB:\ (x\ ,\ y\ ,\ z)=(8\ ,\ 4\ ,\ 0)+k(-2\ ,\ 6\ ,\ 3)\ ,\ k\in\mathbb{R}$

c) $yOz:\ x=0$

$(0\ ,\ y\ ,\ z)=(8\ ,\ 4\ ,\ 0)+k(-2\ ,\ 6\ ,\ 3)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(0\ ,\ y\ ,\ z)=(8-2k\ ,\ 4+6k\ ,\ 3k)$

$(8-2k\ ,\ 4+6k\ ,\ 3k)\ ,\ k\in\mathbb{R}$ é um ponto genérico da reta AB. Este ponto pertence ao plano $yOz: x=0$ se $8-2k=0$.

$8-2k=0\Leftrightarrow 2k=8\Leftrightarrow k=4$

Para $k = 4$ vem $8 - 2k = 0$, $4 + 6k = 4 + 6 \times 4 = 28$ e $3k = 3 \times 4 = 12$

As coordenadas do ponto pedido são $(0\ ,\ 28\ ,\ 12)$.

d) $A(8\ ,\ 4\ ,\ 0)$, $G = (3\ ,\ 5\ ,\ 11)$

$\overrightarrow{AG} = G - A = (-5\ ,\ 1\ ,\ 11)$

$$AG: \begin{cases} x = 8 - 5k \\ y = 4 + k \\ x = 11k \end{cases},\ k \in \mathbb{R}$$

e) $$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AG}\right\|} = \frac{(-2\ ,\ 6\ ,\ 3) \cdot (-5\ ,\ 1\ ,\ 11)}{\sqrt{4+36+9} \times \sqrt{25+1+121}} =$$

$$= \frac{10+6+33}{7 \times \sqrt{147}} = \frac{49}{7 \times \sqrt{147}} = \frac{7}{\sqrt{147}}$$

Se $\cos\alpha = \dfrac{7}{\sqrt{147}}$, $\alpha \approx 54{,}7^\circ$.

f) A secção produzida no cubo pelo plano [*PBC*] é um retângulo cuja área é dada por $\overline{PB} \times \overline{BC}$.

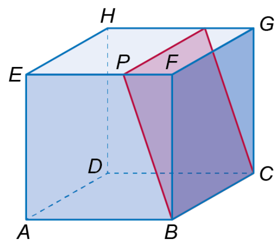
A aresta do cubo é:

$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{4+36+9} = 7$

$\overline{PB}^2 = \overline{PF}^2 + \overline{FB}^2$

$\overline{PB}^2 = 2{,}4^2 + 7^2 \Leftrightarrow \overline{PB}^2 = 54{,}76 \overset{\overline{PB}>0}{\Leftrightarrow} \overline{PB} = 7{,}4$

$A_{\text{secção}} = \overline{PB} \times \overline{BC} = 7{,}4 \times 7 = 51{,}8$ u.a.



Pág. 35

12.1. $A(1\ ,\ 1\ ,\ 1)$, $B(0\ ,\ 2\ ,\ 2)$, $C(-1\ ,\ -1\ ,\ 1)$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1\ ,\ 1\ ,\ 1)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (-2\ ,\ -2\ ,\ 0)$

Equação vetorial

$(x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(-1, 1, 1) + k(-2\ , -2\ , 0)$, $\lambda, k \in \mathbb{R}$

Seja α o plano *ABC* e seja $\vec{n}(a\ ,\ b\ ,\ c)$ um vetor perpendicular a α.

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a\ ,\ b\ ,\ c) \cdot (-2\ ,\ -2\ ,\ 0) = 0 \\ (a\ ,\ b\ ,\ c) \cdot (-1\ ,\ 1\ ,\ 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a - 2b = 0 \\ -a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ b + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ c = -2b \end{cases}$$

$\vec{n}(-b\ ,\ b\ ,\ -2b)$

Para $b=-1$, $\vec{n}=(1\ ,\ -1\ ,\ 2)$.

$\alpha:\ x-y+2z+d=0$

Como $A(1\ ,\ 1\ ,\ 1)$ pertence a α, temos: $1-1+2+d=0 \Leftrightarrow d=-2$

$\alpha:\ x-y+2z-2=0$

12.2. $r:\ \begin{cases} x=1+4k \\ y=1-k \\ z=2+7k \end{cases}\ ,\ k\in\mathbb{R}$

$s:\ (x\ ,\ y\ ,\ z)=(2\ ,\ 0\ ,\ 3)+k(-4\ ,\ 1\ ,\ -7)\ ,\ k\in\mathbb{R}$

a) $\vec{r}(4\ ,\ -1\ ,\ 7)$ é um vetor diretor da reta *r*.

$\vec{s}(-4\ ,\ 1\ ,\ -7)$ é um vetor diretor da reta *s*.

$\vec{r}=-1\times\vec{s}$. Logo, $\vec{r}$ e $\vec{s}$ são colineares pelo que $r\,//\,s$.

O ponto $D(2\ ,\ 0\ ,\ 3)$ pertence à reta *s*. Verifiquemos se este ponto pertence à reta *r*.

$$\begin{cases} 2=1+4k \\ 0=1-k \\ 3=2+7k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2=5 \\ k=1 \\ 3=9 \end{cases} \quad \text{(falso)}$$

Logo, o ponto *D* não pertence à reta *r*.
Portanto, as retas *r* e *s* são paralelas mas não coincidentes, ou seja, são estritamente paralelas.

b) $D(2\ ,\ 0\ ,\ 3)\in s\ ,\ E(1\ ,\ 1\ ,\ 2)\in r$

$\overrightarrow{DE}=E-D=(-1\ ,\ 1\ ,\ -1)$

$\vec{s}=(-4\ ,\ 1\ ,\ -7)$

Seja $\vec{n}(a\ ,\ b\ ,\ c)$ um vetor perpendicular a β.

$$\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0 \\ \vec{n}\cdot\vec{s}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a\ ,\ b\ ,\ c)\cdot(-1\ ,\ 1\ ,\ -1)=0 \\ (a\ ,\ b\ ,\ c)\cdot(-4\ ,\ 1\ ,\ -7)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+b-c=0 \\ -4a+b-7c=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=a+c \\ -4a+a+c-7c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=a+c \\ -3a-6c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2c+c \\ a=-2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-c \\ a=-2c \end{cases}$$

$\vec{n}(-2c\ ,\ -c\ ,\ c)$

Para $c=-1$, $\vec{n}(2\ ,\ 1\ ,\ -1)$.

$\beta:\ 2x+y-z+d=0$

Como $D(2\ ,\ 0\ ,\ 3)$ pertence a β, temos:

$4+0-3+d=0 \Leftrightarrow d=-1$

$\beta:\ 2x+y-z-1=0$

Pág. 36

13.1. $\alpha:\ x-2y-3z-1=0$; $\quad \vec{n}_\alpha=(1\ ,\ -2\ ,\ -3)\ ,\ \vec{n}_\alpha\perp\alpha$

$\beta:\ 2x-4y-6z-3=0$: $\ \vec{n}_\beta=(2\ ,\ -4\ ,\ -6)\ ,\ \vec{n}_\beta\perp\beta$

Dado que $\frac{2}{1} = \frac{-4}{-2} = \frac{-6}{-3} = 2$, podemos concluir que $\vec{n}_\beta = 2\vec{n}_\alpha$

Portanto, como $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\beta$ são colineares, os planos α e β são paralelos.

13.2. $\pi :\ 4x - ky - 2kz = 0$

$\vec{n}_\gamma(4\ ,\ -k\ ,\ -2k)\ ,\ \vec{n}_\gamma \perp \pi$

$\vec{n}_\alpha(1\ ,\ -2\ ,\ -3)\ ,\ \vec{n}_\alpha \perp \alpha$

$\vec{n}_\gamma \cdot \vec{n}_\alpha = 0 \Leftrightarrow (4\ ,\ -k\ ,\ -2k)\cdot(1\ ,\ -2\ ,\ 3) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 + 2k + 6k = 0 \Leftrightarrow 8k = -4 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}$

13.3. $r : \begin{cases} x = k \\ y = 1 - 2k \\ z = -3k \end{cases}\ ,\ k \in \mathbb{R}$

$\vec{r}(1\ ,\ -2\ ,\ -3)$ é um vetor diretor da reta *r*.

$\vec{n}_\beta(2\ ,\ -4\ ,\ -6)\ ,\ \vec{n}_\beta \perp \beta$

Como $\frac{2}{1} = \frac{-4}{-2} = \frac{-6}{-3} = 2$, os vetores $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\beta$ são colineares sendo $\vec{n}_\beta = 2\vec{n}_\alpha$. Portanto, $r \perp \beta$.

13.4. $R(k\ ,\ 1 - 2k\ ,\ -3k)$ é um ponto genérico da reta *r*.

$\alpha :\ x - 2y - 3z - 1 = 0$

$R \in \alpha \Leftrightarrow k - 2\times(1 - 2k) - 3\times(-3k) - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k - 2 + 4k + 9k - 1 = 0 \Leftrightarrow 14k = 3 \Leftrightarrow k = \frac{3}{14}$

O ponto *I* de interseção da reta *r* com o plano α obtém-se substituindo, em *R*, *k* por $\frac{3}{14}$.

$I\left(\frac{3}{14}\ ,\ 1 - \frac{6}{14}\ ,\ -\frac{9}{14}\right);\ I\left(\frac{3}{14}\ ,\ \frac{4}{7}\ ,\ -\frac{9}{14}\right)$

Pág. 37

14. $r : (x\ ,y\ ,z) = (m\ ,1\ ,-1) + k(1\ ,m\ ,-1)\ ,\ k \in \mathbb{R}$

$\alpha :\ 2x + 4y - mz + 1 = 0$

O vetor $\vec{r}(1, m, -1)$ é um vetor diretor da reta r e o vetor $\vec{u}(2\ ,4\ ,-m)$ é um vetor normal ao plano α .

Como a reta r é paralela ao plano α , o vetor $\vec{r}$ é perpendicular ao vetor $\vec{u}$ e, portanto, $\vec{r}\cdot\vec{u} = 0$

$\vec{r}\cdot\vec{u} = 0 \Leftrightarrow (1\ ,m\ ,-1)\cdot(2\ ,4\ ,-m) = 0 \Leftrightarrow 2 + 4m + m = 0 \Leftrightarrow 5m = -2 \Leftrightarrow m = -\frac{2}{5}$

Resposta: (B)

Pág. 38

15. $A(2\ ,4\ ,0)\ ;\ \overrightarrow{BC}(2\ ,6\ ,3)$

15.1. Como $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$, temos

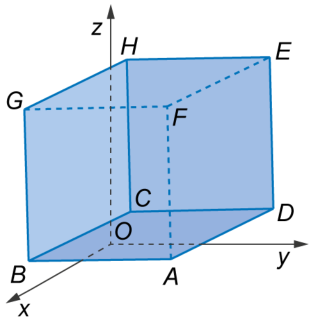
$$D=A+\overrightarrow{AD}=A+\overrightarrow{BC}=$$
$$=(2,4,0)+(2,6,3)=(4,10,3)$$

Portanto, D tem coordenadas $(4,10,3)$.

15.2. $\overrightarrow{AO}=O-A=(0,0,0)-(2,4,0)=(-2,-4,0)$

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=(2,6,3)$

$$\cos\left(O\hat{A}D\right)=\cos\left(\overrightarrow{AO}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AD}\right)=\frac{\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AD}}{\left\|\overrightarrow{AO}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AD}\right\|}=$$
$$=\frac{(-2,-4,0)\cdot(2,6,3)}{\left\|(-2,-4,0)\right\|\times\left\|(2,6,3)\right\|}=$$
$$=\frac{-4-24+0}{\sqrt{4+16+0}\times\sqrt{4+36+9}}=$$
$$=\frac{-28}{\sqrt{20}\times\sqrt{49}}=\frac{-28}{\sqrt{20}\times 7}=-\frac{4}{\sqrt{20}}$$



Se $\cos\left(O\hat{A}D\right)=-\frac{4}{\sqrt{20}}$ então $O\hat{A}D\approx 153^\circ$

15.3. Centro; $A(2,4,0)$

Raio: $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|$

$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2$$
$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\left\|\overrightarrow{BC}\right\|=\left\|(2,6,3)\right\|=\sqrt{4+36+9}=7$$
$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2=7^2+7^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2=49+49\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2=98$$

Equação da superfície esférica:

$$(x-2)^2+(y-4)^2+z^2=98$$

15.4. O vetor $\overrightarrow{BC}=(2,6,3)$ é perpendicular ao plano ABG. Logo, uma equação do plano ABG é da forma $2x+6y+3z+d=0$.

Como o ponto A tem coordenadas $(2,4,0)$ e pertence ao plano ABG, tem-se

$$2\times 2+6\times 4+3\times 0+d=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4+24+d=0\Leftrightarrow d=-28$$

Uma equação do plano ABG é $2x+6y+3z-28=0$.

15.5. GHE : $3x+2y-6z+35=0$.

O ponto F é o ponto de interseção da reta AF com o plano GHE.

Como a reta AF é perpendicular ao plano GHE, definido por $3x+2y-6z+35=0$, uma equação vetorial desta reta é $(x,y,z)=(2,4,0)+k(3,2,-6)\ ,\ k\in\mathbb{R}$

Como $(x,y,z)=(2,4,0)+k(3,2,-6)\ ,\ k\in\mathbb{R} \Leftrightarrow x=2+3k \wedge y=4+2k \wedge z=-6k\ ,\ k\in\mathbb{R}$, qualquer ponto da reta AF é da forma $(2+3k\ ,4+2k\ ,-6k)\ ,\ k\in\mathbb{R}$.

O ponto F é o ponto da reta AF que pertence ao plano GHE. Logo, as suas coordenadas satisfazem a equação $3x+2y-6z+35=0$, ou seja:

$$3\times(2+3k)+2\times(4+2k)-6\times(-6k)+35=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6+9k+8+4k+36k+35=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 49k+49=0 \Leftrightarrow k=-1$$

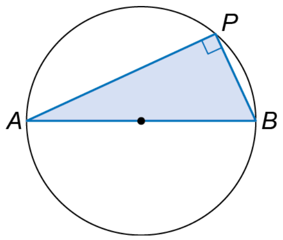
Portanto, o ponto F tem coordenadas $(2+3\times(-1)\ ,4+2\times(-1),-6\times(-1))=(-1\ ,2\ ,6)$

Pág. 40

16.1. $A(-1\ ,\ 0)$, $B(7\ ,\ 6)$ e $C(7\ ,\ 0)$

a) $P(x\ ,\ y)$

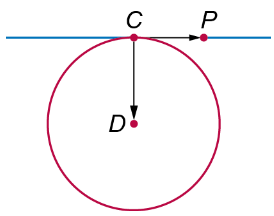
$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+1\ ,\ y-0)\cdot(x-7\ ,\ y-6)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+1)(x-7)+y(y-6)=0$$
$$\Leftrightarrow x^2-7x+x-7+y^2-6y=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x^2-6x)+(y^2-6y)-7=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x^2-6x+9)-9+(y^2-6y+9)-9-7=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y-3)^2=25$$



b) $(7-3)^2+(0-3)^2=25 \Leftrightarrow 16+9=25 \Leftrightarrow 25=25$

Dado que a igualdade é verdadeira, o ponto C pertence à circunferência.

c) Centro da circunferência: $D(3\ ,\ 3)$



$C(7\ ,\ 0)$, $P(x\ ,\ y)$

A reta tangente à circunferência no ponto C é definida pela condição:

$$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CD}=0 \Leftrightarrow (x-7\ ,\ y)\cdot(-4\ ,\ 3)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -4x+28+3y=0 \Leftrightarrow 3y=4x-28 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{4}{3}x-\frac{28}{3}$$

16.2. $A(3\ ,\ 0\ ,\ 0)$ e $B(1\ ,\ -2\ ,\ -2)$

a) Seja M o ponto médio de [AB].

$$M\left(\frac{3+1}{2}\ ,\ \frac{0-2}{2}\ ,\ \frac{0-2}{2}\right)$$

$M(2\,,\ -1\,,\ -1)$

Seja $P(x\,,\ y\,,\ z)$ um ponto do plano mediador de [*AB*]. Então,

$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \Leftrightarrow (x-2\,,\ y+1\,,\ z+1)\cdot(-2\,,\ -2\,,\ -2)=0 \Leftrightarrow$

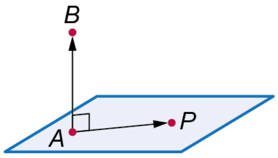
$\Leftrightarrow -2(x-2)-2(y+1)-2(z+1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x+4-2y-2-2z-2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x-2y-2z=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+y+z=0$

c) A condição $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$ define o plano que passa no ponto A e é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{AB}$.



17. O lugar geométrico dos pontos $P(x\,,y)$ do plano tais que $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ é a reta perpendicular a AB no ponto A.

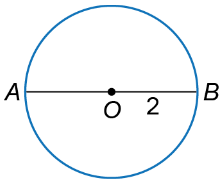
Resposta: (D)

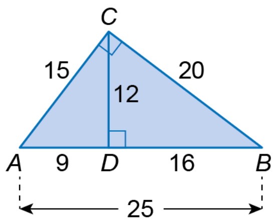
Pág. 41

18. $\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BA}=\|\overrightarrow{BO}\|\times\|\overrightarrow{BA}\|\times\cos\left(\widehat{\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BA}}\right)$

$=2\times4\times\cos 0=8$

Resposta: (C)





19.1. $C\hat{D}A=A\hat{C}D=90º$

$A\hat{C}D=C\hat{B}A$ por serem ângulos agudos de lados perpendiculares.

Logo, pelo critério AA, os triângulos [*ADC*] e [*ABC*] são semelhantes.

19.2. $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$

$25^2=15^2+\overline{BC}^2 \underset{}{\overset{\overline{BC}>0}{\Leftrightarrow}} \overline{BC}=\sqrt{625-225} \Leftrightarrow \overline{BC}=20$

Como os triângulos [*ADC*] e [*ABC*] são semelhantes temos:

$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{CD}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AD}}$

$\dfrac{25}{15}=\dfrac{20}{\overline{CD}}=\dfrac{15}{\overline{AD}} \Rightarrow \dfrac{20}{\overline{CD}}=\dfrac{5}{3} \Leftrightarrow 60=5\overline{CD} \Leftrightarrow \overline{CD}=12$

19.3. $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CB}=\overline{CD}\times\overline{CD}=12\times12=144$

O ponto D é a projeção ortogonal do ponto *B* na reta CD.

20. O vetor $\vec{i}\,(1\,,0\,,0)$ tem a direção de Ox.

O vetor $\vec{i}$ é um vetor diretor da reta definida por $y=0\wedge z=1$. Logo, esta reta é paralela ao eixo Ox.

Resposta: (C)

21. O vetor $\vec{j}(0,1,0)$ tem a direção de Oy.

$r:(x\,,y\,,z)=(0\,,0\,,1)+k(1\,,0\,,2), k\in\mathbb{R}$

$\vec{r}(1,0,2)$ é um vetor diretor de *r*.

$\vec{r}\cdot\vec{j}=(1,0,2)\cdot(0,1,0)=0 \Rightarrow \vec{r}\perp\vec{j} \Rightarrow$ a reta *r* é perpendicular ao eixo Oy.

Resposta: (A)

22. $\alpha: x+y-z=1$; $\beta: 2x-5y-2z=2$

$A(2,-1,0)$

2 – 1 – 0 = 1 ; $A\in\alpha$

4 + 5 – 0 = 0 (F); $A\notin\beta$

$B(0,0,-1)$

0 + 0 + 1 = 1 ; $B\in\alpha$

0 + 0 + 2 = 2 ; $B\in\beta$

Resposta: (B)

Pág. 42

23. $r:(x,y,z)=(1,2,1)+k(1,0,-1), k\in\mathbb{R}$

$\vec{r}(1,0,-1)$ é um vetor diretor de r.

$\alpha: x-z=3$; $\vec{u}=(1,0,-1)=\vec{r}$

Como $\vec{r}=\vec{u}$, $\vec{r}$ é perpendicular a α. Logo, o plano é perpendicular à reta *r*.

Resposta: (A)

24. $A(0,0,1)$ e $B(2,1,1)$;

$\overrightarrow{AB}(2,1,0)$

$AB:(x,y,z)=(0,0,1)+k(2,1,0), k\in\mathbb{R}$

Ponto genérico de r: $(2k,k,1)$

$P\in r$; $P(2y,y,1)$

$\vec{u}(1,3,5)$

$\overrightarrow{OP}(2y,y,1)$

$\overrightarrow{OP}\cdot\vec{u}=0 \Leftrightarrow 2y+3y+5=0 \Leftrightarrow 5y=-5 \Leftrightarrow y=-1$, logo $P(-2,-1,1)$

Resposta: (A)

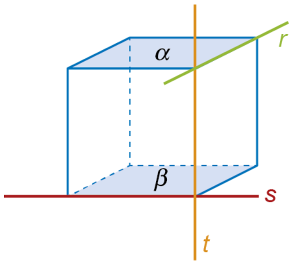
25. $E:(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=9$, logo o centro da esfera: $C(1,1,0)$

$r:(x,y,z)=(1,1,0)+k(1,-2,0), k\in\mathbb{R}$, logo *C* pertence à reta *r*.

Como a reta *r* passa no centro da esfera *E*, a interseção é um segmento de reta de comprimento:
2 × raio = 2 × 3 = 6

Resposta: (B)

26. Consideremos o exemplo da figura seguinte onde cada uma das retas r, s e t contém uma aresta de um cubo:



Verifica-se que, relativamente à situação apresentada, apenas a afirmação (D) é verdadeira.

Resposta: (D)

Pág. 43

27. $A(1,2,1)$; $B(4,2,1)$; $P(x,y,z)$

$\overrightarrow{AP} = P - A = (x-1\,,\, y-2\,,\, z-1)$

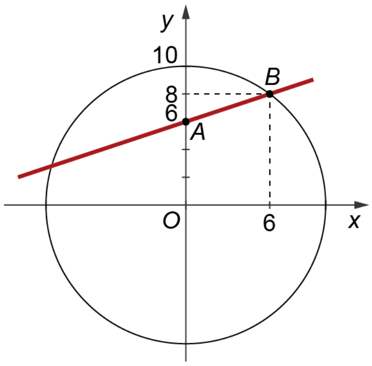
$\overrightarrow{PB} = B - P = (4-x\,,\, 2-y\,,\, 1-z)$

$$\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PB} \Leftrightarrow (x-1, y-2, z-1) = 2(4-x, 2-y, 1-z) \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 8-2x \\ y-2 = 4-2y \\ z-1 = 2-2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 9 \\ 3y = 6 \\ 3z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

$P(3,2,1)$

28.1. $A(0,6)$

B é o ponto de interseção da reta AB com a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 100$ tal que a abcissa de B é positiva.



Reta $AB: y = \frac{1}{3}x + 6$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + 6 \\ x^2 + y^2 = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{3}x + 6 \\ x^2 + \left(\frac{1}{3}x + 6\right)^2 = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{3}x + 6 \\ x^2 + \frac{1}{9}x^2 + 4x + 36 - 100 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{3}x + 6 \\ \frac{10}{9}x^2 + 4x - 64 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{3}x + 6 \\ 10x^2 + 36x - 576 = 0 \end{cases} \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y = 8 \\ x = 6 \end{cases} \; ; \; B(6,8)$$

Cálculo auxiliar

$$10x^2 + 36x - 576 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-36 \pm \sqrt{36^2 + 40 \times 576}}{20} \Leftrightarrow x = 6 \vee x = -\frac{48}{5}$$

28.2. $\overrightarrow{OB}(6,8)$

Seja $P(x,y)$ um ponto da reta t

$\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow (x-6\,,\,y-8)\cdot(6,8) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6x - 36 + 8y - 64 = 0 \Leftrightarrow 8y = -6x + 100 \Leftrightarrow y = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{25}{2}$

Ou

Declive de t: $-\dfrac{6}{8} = -\dfrac{3}{4}$; $B(6,8) \in t$

$t:\ y - 8 = -\dfrac{3}{4}(x-6) \Leftrightarrow y = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{25}{2}$

28.3. $\vec{u}(3,1)$

$\vec{v}(4,-3)$

$\cos\alpha = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|} = \dfrac{(3,1)\cdot(4,-3)}{\sqrt{9+1}\times\sqrt{16+9}} = \dfrac{12-3}{\sqrt{10}\times 5} = \dfrac{9}{5\sqrt{10}}$

$1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

$1 + \tan^2\alpha = \left(\dfrac{5\sqrt{10}}{9}\right)^2 \Leftrightarrow 1 + \tan^2\alpha = \dfrac{250}{81} \Leftrightarrow \tan^2\alpha = \dfrac{250}{81} - 1 \Leftrightarrow \tan^2\alpha = \dfrac{169}{81}$

Como $\alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, temos:

$\tan\alpha = \sqrt{\dfrac{169}{81}} = \dfrac{13}{9}$

29. $A(8,-3,6)$

$B(8,5,0)$

$C(-2,5,0)$

$BCV: 11y - 2z = 55$

29.1. $D = A + \overrightarrow{AD}$

$D = A + \overrightarrow{BC}$ porque $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{BC} = C - B = (-10,0,0)$

$D = (8,-3,6) + (-10,0,0) = (-2,-3,6)$

$D = (-2,-3,6)$

29.2. $\overrightarrow{AB} = B - A = (0,8,-6)$

$\overrightarrow{BC}(-10,0,0)$

Seja $\vec{n}(a,b,c)$ um vetor perpendicular a ABC.

$\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8b - 6c = 0 \\ -10a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{3}{4}c \\ a = 0 \end{cases}$

$n\left(0, \frac{3}{4}c, c\right)$

Para $c = 4$ temos $\vec{n}(0,3,4)$.

Uma equação do plano *ABC* é do tipo $3y + 4z = d$

Substituindo *y* e *z* pelas coordenadas de *C*, temos: $15 + 0 = d \Leftrightarrow d = 15$

Portanto, $3x + 4z = 15$ é uma equação do plano *ABC*.

29.3. *V* é o ponto de interseção da reta *EV* com o plano *BCV*.

Ponto *E* (ponto médio de [*AC*]):

$$E\left(\frac{8+(-2)}{2}, \frac{-3+5}{2}, \frac{6+0}{2}\right)$$

$$E(3,1,3)$$

O vetor $\vec{n}(0,3,4)$, perpendicular ao plano *ABC*, é um vetor diretor da reta *EV*.

$$EV: (x,y,z) = (3,1,3) + k(0,3,4),\ k \in \mathbb{R}$$

Qualquer ponto da reta *EV* é da forma $(3, 1+3k, 3+4k),\ k \in \mathbb{R}$

Substituindo estas coordenadas na equação $11y - 2z = 55$ do plano *BCV*, obtemos o valor de *k* que permite determinar o ponto *V*:

$$11(1+3k) - 2(3+4k) = 55 \Leftrightarrow 11 + 33k - 6 - 8k = 55 \Leftrightarrow 25k = 50 \Leftrightarrow k = 2$$

$$(3, 1+3\times 2, 3+4\times 2) = (3,7,11)$$

Portanto, o ponto *V* tem coordenadas $(3,7,11)$.

29.4. $B(8,5,0)$; $V(3,7,11)$ e $A(8,-3,6)$

$\overrightarrow{VA}(5,-10,-5)$ e $\overrightarrow{VB}(5,-2,-11)$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{VB}\cdot\overrightarrow{VA}}{\|\overrightarrow{VB}\|\times\|\overrightarrow{VA}\|} = \frac{(5,-10,-5)\cdot(5,-2,-11)}{\sqrt{25+100+25}\times\sqrt{25+4+121}} = \frac{25+20+55}{\sqrt{150}\times\sqrt{150}} = \frac{100}{150} = \frac{2}{3}$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

Pág. 44

30. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 15 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = 15 \Leftrightarrow 5\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\frac{3}{5} = 15 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AC}\| = 5$

$\overline{AB} = \overline{AC} = 5$

Como $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = \frac{3}{5}$, o triângulo não é equilátero. Se o triângulo fosse equilátero seria

$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = \cos 60° = \frac{1}{2}$.

O triângulo [*ABC*] é isósceles não equilátero.

Resposta: (C)

31. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} \right) =$

$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CG} =$

$= \left\| \overrightarrow{AB} \right\|^2 + 0 + 0 = a^2$

ou

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = \overline{AB} \times \overline{AB} = a^2$

O ponto B é a projeção ortogonal do ponto G na reta AB .

Resposta: (B)

32. Seja a a aresta do cubo.

G tem coordenadas (0 , a , a)

Como o ponto G pertence à reta definida por:

$r: \ (x, y, z) = (0, 0, 3) + k(0, -2, 1), \ k \in \mathbb{R}$

temos $\begin{cases} 0 = 0 + 0 \times k \\ a = 0 - 2k \\ a = 3 + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2k \\ -2k = 3 + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2k \\ -3k = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ k = -1 \end{cases}$

Logo, $a = 2$

Resposta: (B)

33. $r: \ (x, y, z) = (2m, 4, -1) + k(1, m, -1), \ k \in \mathbb{R}$

$\alpha: \ 2x + 4y - mz = 0$

$\vec{r}(1, m, -1)$ é um vetor diretor da reta r

$\vec{u}(2, 4, -m)$ é um vetor perpendicular ao plano α .

$r // \alpha \Leftrightarrow \vec{r} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \vec{r} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 2 + 4m + m = 0 \Leftrightarrow 5m = -2 \Leftrightarrow m = -\frac{2}{5}$

Resposta: (C)

34. $r: \ 4x + 3y = 25$

$f(x) = \frac{5}{3}\sqrt{x^2 - 8x + 25}$

34.1. $4x + 3y = 25 \Leftrightarrow 3y = -4x + 25 \Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{25}{3}$

$P\left(x, -\frac{4}{3}x + \frac{25}{3} \right)$ porque $P \in \mathbb{R}$

$\overline{OP} = \sqrt{x^2 + \left(-\frac{4}{3}x + \frac{25}{3} \right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{16x^2}{9} - \frac{200x}{9} + \frac{625}{9}} =$

$= \sqrt{\frac{25}{9}x^2 - \frac{200}{9}x + \frac{625}{9}} = \sqrt{\frac{25}{9}\left(x^2 - 8x + 25 \right)} = \frac{5}{3}\sqrt{x^2 - 8x + 25}$

Logo, $\overline{OP} = \frac{5}{3}\sqrt{x^2 - 8x + 25} = f(x)$.

34.2. $d(O,P)=5\sqrt{2} \Leftrightarrow f(x)=5\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{3}\sqrt{x^2-8x+25}=5\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-8x+25}=3\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-8x+25=\left(3\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-8x+25=18 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-8x+7=0=$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{8\pm\sqrt{64-28}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{8\pm 6}{2} \Leftrightarrow x=1 \vee x=7$$

Verificação

$$x=1: \frac{5}{3}\sqrt{1^2-8\times 1+25}=5\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{5}{3}\sqrt{18}=5\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{5}{3}\sqrt{9\times 2}=5\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{3}\times 3\sqrt{2}=5\sqrt{2} \Leftrightarrow 5\sqrt{2}=5\sqrt{2} \text{ (Verdadeiro)}$$

$$x=7: \frac{5}{3}\sqrt{7^2-8\times 7+25}=5\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{5}{3}\sqrt{18}=5\sqrt{2} \Leftrightarrow 5\sqrt{2}=5\sqrt{2} \text{ (Verdadeiro)}$$

Se $x=1$, $4x+3y=25 \Leftrightarrow 4+3y=25 \Leftrightarrow 3y=21 \Leftrightarrow y=7$

Se $x=7$, $4x+3y=25 \Leftrightarrow 28+3y=25 \Leftrightarrow 3y=-3 \Leftrightarrow y=-1$

$P(1,7)$ ou $P(7,-1)$

34.3. $f(x)=5 \Leftrightarrow \frac{5}{3}\sqrt{x^2-8x+25}=5 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-8x+25}=3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2-8x+25=9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-8x+16=0 \Leftrightarrow (x-4)^2=0 \Leftrightarrow x=4$$

Verificação:

$$x=4: \frac{5}{3}\sqrt{4^2-8\times 4+25}=5 \Leftrightarrow \frac{5}{3}\sqrt{9}=5 \Leftrightarrow 5=5 \text{ (verdadeiro)}$$

Se $x=4$, $4x+3y=25 \Leftrightarrow 16+3y=25 \Leftrightarrow 3y=9 \Leftrightarrow y=3$

Centro da circunferência: $C(4,3)$

Raio da circunferência: 5

$$(x-4)^2+(y-3)^2=25$$

35. $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}\right)=$

$$=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}=$$

| $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{DF}$ e $\overrightarrow{DE}\perp\overrightarrow{AD}$

$$=\left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2+0+0+\left\|\overrightarrow{DE}\right\|\times\left\|\overrightarrow{DF}\right\|\times\cos\left(\widehat{\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DF}}\right)=$$

$$=3^2+2\times 2\times\cos 60^\circ=9+4\times\frac{1}{2}=11$$

| O triângulo [*DEF*] é equilátero

36. $r: \begin{cases} x = 5 + k \\ y = 1 - 3k \\ z = 1 - 2k \end{cases}, \ k \in \mathbb{R}$; $\vec{r}(1, -3, -2)$ é um vetor diretor de *r*.

$s: (x, y, z) = (3, 0, -2) + k(-3, -2, -1), \ k \in \mathbb{R}$

$\vec{s}(-3, 2, -1)$ é um vetor diretor da reta *s*.

36.1. As retas *r* e *s* não são paralelas dado que os vetores $\vec{r}(1, -3, -2)$ e $\vec{s}(-3, 2, -1)$ não são colineares, pois $\frac{1}{-3} \neq \frac{-3}{2}$.

Vamos provar que as retas *r* e *s* são concorrentes.
Seja *R* um ponto genérico de *r*.
(5 , 1 , 1) é um ponto de *r*.

$r: (x, y, z) = (5, 1, 1) + \lambda(1, -3, -2), \ \lambda \in \mathbb{R}$

$R(5 + \lambda, 1 - 3\lambda, 1 - 2\lambda), \ \lambda \in \mathbb{R}$

Seja *S* um ponto genérico de *s*.

$S(3 - 3k, 2k, -2 - k), \ k \in \mathbb{R}$

O ponto de interseção das retas *r* e *s*, caso exista, terá de satisfazer a igualdade $R = S$:

$(5 + \lambda, 1 - 3\lambda, 1 - 2\lambda) = (3 - 3k, 2k, -2 - k) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 + \lambda = 3 - 3k \\ 1 - 3\lambda = 2k \\ 1 - 2\lambda = -2 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2 - 3k \\ 1 - 3(-2 - 3k) = 2k \\ 1 - 2(-2 - 3k) = -2 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2 - 3k \\ 1 + 6 + 9k - 2k = 0 \\ 1 + 4 + 6k + 2 + k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2 - 3k \\ 7k = -7 \\ 7k = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ k = -1 \end{cases}$$

Como o sistema é possível e determinado as retas *r* e *s* são concorrentes num ponto *I* que pode ser obtido substituindo *k* por – 1 em *S* (ou λ por 1 em *R*), ou seja, $I(6, -2, -1)$.

As retas *r* e *s* são concorrentes em *I*. Logo, as retas são complanares.

36.2. Plano β definido pelas retas *r* e *s* :

$I(6, -2, -1) \in \beta$

Seja $\vec{n}(a, b, c) \perp \beta$:

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{r} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{s} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (1, -3, -2) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-3, 2, -1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 3b - 2c = 0 \\ -3a + 2b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3b + 2c \\ -9b - 6c + 2b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3b + 2c \\ -3(3b + 2c) + 2b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3b + 2c \\ -7b - 7c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -3c + 2c \\ b = -c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -c \\ b = -c \end{cases}$$

$\vec{n}(-c\,,-c\,,c)$

Para $c = -1$, vem $\vec{n}(1,1,-1)$.

$\alpha:\ 2x - y + z = 0$

O vetor $\vec{u}(2\,,-1,1)$ é perpendicular a α e o vetor $\vec{n}(1,1,-1)$ é perpendicular a β.

$\vec{u}\cdot\vec{n} = (2\,,-1,1)\cdot(1,1,-1) = 2-1-1 = 0$

$\vec{u}\cdot\vec{n} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}\perp\vec{n} = 0 \Leftrightarrow \alpha\perp\beta$

36.3. Seja α o ângulo formado pelos vetores $\vec{r}$ e $\vec{s}$.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{r}\cdot\vec{s}}{\|\vec{r}\|\times\|\vec{s}\|} = \frac{(1,-3\,,2)\cdot(-3\,,2\,,-1)}{\sqrt{1+9+7}\times\sqrt{9+4+1}} = \frac{-3-6+2}{\sqrt{14}\times\sqrt{14}} = -\frac{7}{14} = -\frac{1}{2}$$

Se $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$, então $\alpha = 120°$.

Pág. 45

37. Seja a a aresta do cubo

$F(a\,,a\,,a)$

Como o ponto F pertence ao plano definido pela equação $x - 2y + 3z = 4$, temos:

$a - 2a + 3a = 4 \Leftrightarrow 2a = 4 \Leftrightarrow a = 2$

$$A_{[OBD]} = \frac{\overline{OB}\times\overline{OD}}{2}$$

$\overline{OD} = a = 2$

$\overline{OB} = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{AB}^2} = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$A_{[OBD]} = \frac{2\sqrt{2}\times 2}{2} = 2\sqrt{2}\text{ u.a.}$$

38.1. A é o ponto de interseção do eixo Oz com o plano ABC.

$$\begin{cases} 2x+y-2z+6=0 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0+0-2z+6=0 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=3 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

O ponto A tem coordenadas (0 , 0 , 3).

38.2. a) $V(7\,,8\,,-4)$

Como se trata de uma pirâmide regular e o ponto E é o centro da base, a reta VE é perpendicular ao plano ABC. Logo, $\vec{v}$ é um vetor diretor da reta VE.

Uma equação vetorial da reta VE é:

$(x\,,y\,,z) = (7\,,8\,,-4) + k(2\,,1\,,-2),\ k\in\mathbb{R}$

b) O ponto E é o ponto de interseção da reta VE com o plano ABC.

$(x\,,y\,,z) = (7\,,8\,,-4) + k(2\,,1\,,-2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 7+2k \wedge y = 8+k \wedge z = -4-2k$

Portanto, um ponto genérico da reta *VE* tem coordenadas

$$\left(7+2k\ ,\ 8+k\ ,\ -4-2k\right) \text{ com } k \in \mathbb{R}.$$

Dado que o ponto *E* é o ponto da reta *VE* que pertence ao plano *ABC*, de equação $2x+y-2z+6=0$, temos:

$$2(7+2k)+(8+k)-2(-4-2k)+6=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 14+4k+8+k+8+4k+6=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9k=-36 \Leftrightarrow k=-4$$

Substituindo:

$$\left(7+2\times(-4)\ ,\ 8-4\ ,\ -4-2\times(-4)\right)=(-1\ ,\ 4\ ,\ 4)$$

Portanto, o ponto *E* tem coordenadas $(-1\ ,\ 4\ ,\ 4)$.

38.3. $\overrightarrow{OV}(7\ ,8\ ,-4)$

Raio da superfície esférica:

$$\left\|\overrightarrow{OV}\right\|=\sqrt{7^2+8^2+(-4)^2}=\sqrt{129}$$

Centro da superfície esférica: $V(7\ ,\ 8\ ,-4)$

Equação da superfície esférica:

$$(x-7)^2+(x-8)^2+(x+4)^2=129$$

38.4. $A(0\ ,\ 0\ ,\ 3)$

Ponto X:

$$2x+y-2z+6=0 \wedge y=0 \wedge z=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x+0-0+6=0 \wedge y=0 \wedge z=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-3 \wedge y=0 \wedge z=0$$

$X(-3\ ,0\ ,0)$

Ponto Y:

$$2x+y-2z+6=0 \wedge x=0 \wedge z=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0+y-0+6=0 \wedge x=0 \wedge z=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=-6 \wedge x=0 \wedge z=0$$

$Y(0\ ,-6\ ,0)$

$$\overrightarrow{AX}=X-A=(-3\ ,0\ ,0)-(0\ ,0\ ,3)=(-3\ ,0\ ,-3)$$

$$\overrightarrow{AY}=Y-A=(0\ ,-6\ ,0)-(0\ ,0\ ,3)=(0\ ,-6\ ,-3)$$

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{AX}\cdot\overrightarrow{AY}}{\left\|\overrightarrow{AX}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AY}\right\|}=\frac{(-3\ ,0,-3)\cdot(0,-6,3)}{\sqrt{9+0+9}\times\sqrt{0+36+9}}=$$

$$=\frac{9}{\sqrt{18}\times\sqrt{45}}=\frac{9}{3\sqrt{2}\times3\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

Se $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$, então $\frac{1}{\cos\alpha}=\sqrt{10}$.

$1+\tan^2\alpha=\left(\sqrt{10}\right)^2 \Leftrightarrow \tan^2\alpha=10-1 \Leftrightarrow \tan^2\alpha=9$

Dado que $\alpha\in[0\,,\,\pi]$ e $\cos\alpha>0$, temos $\tan\alpha>0$.

Logo, $\tan\alpha=3$.

39. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG}\right)=$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CG}=$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+0=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ $\quad\quad |\ \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CG}$

Logo, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG}$ não depende de *h*.

40.1. $r:\ (x\,,y\,,z)=(0\,,0\,,12)+k(1\,,1\,,-1),\ k\in\mathbb{R}$

Como *P* pertence à reta definida r, as coordenadas de *P* em função de k são $P(k\,,k\,,12-k)$ ou $P(x\,,x\,,12-x)$ com $x\in\,]0\,,12[$.

O volume do prisma é dado por:

$V(x)=x\times x\times(12-x)=x^2(12-x)=12x^2-x^3$

$V(x)=12x^2-x^3$

40.2. $A(0\,,24\,,0)$

$r:\ (x\,,y\,,z)=(0\,,0\,,12)+k(1\,,1\,,-1),\ k\in\mathbb{R}$

$R(0\,,0\,,12)\in r$ e $\vec{r}(1\,,1\,,-1)$ é um vetor diretor da reta r

$\overrightarrow{AR}=(0\,,-24\,,12)=12(0\,,-2\,,1)$

Seja $\vec{n}(a\,,b\,,c)$ um vetor perpendicular a α:

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\vec{r}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AR}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b-c=0\\ -2b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b-2b=0\\ c=2b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b\\ c=2b\end{cases}$$

$\vec{n}(b\,,b\,,2b)$

Para $b=1$, temos $\vec{n}(1\,,1\,,2)$.

O plano α é definido por uma equação do tipo $x+y+2z=d$.

Como *R* pertence a α, vem:

$0+0+2\times12=d\Leftrightarrow d=24$

Logo, $x+y+2z=24$ é uma equação do plano α.

40.3. $\vec{s}(1\,,1\,,2)$ é um vetor diretor de *s*, dado que *s* é perpendicular a α.

$s:\ (x\,,y\,,z)=(0\,,0\,,0)+k(1\,,1\,,2),\ k\in\mathbb{R}\Leftrightarrow(x\,,y\,,z)=k(1\,,1\,,2),\ k\in\mathbb{R}$

40.4. Seja *S* um ponto da reta *s*. Então, *S* é da forma $(k\,,k\,,2k),\ k\in\mathbb{R}$.

Se *S* é um ponto de $\alpha:\ x+y+2z=24$, temos

$k+k+2\times2k=24\Leftrightarrow6k=24\Leftrightarrow k=4$

Portanto, *B* tem coordenadas $(4\,,4\,,2\times4)$ ou $B(4\,,4\,,8)$.

$r:\ (x\,,y\,,z)=(0\,,0\,,12)+k(1\,,1\,,-1),\ k\in\mathbb{R}$

Substituindo *x, y, z* pelas coordenadas do ponto *B*, vem:

$(4\,,4\,,8)=(0\,,0\,,12)+k(1\,,1\,,-1)\Leftrightarrow\ 4=k\wedge 4=k\wedge 8=12-k\Leftrightarrow k=4$

Logo, *B* pertence à reta *r*, obtendo-se para $k=4$

40.5. Se *P* tem coordenadas (4 , 4 , 8) o volume do prisma é $4\times4\times8=128$.

40.6. $V(x)=128\Leftrightarrow 12x^2-x^3=128\Leftrightarrow x^3-12x^2+128=0$

Sabemos que 4 é uma das soluções desta equação.
Usando a Regra de Ruffini:

	1	−12	0	128
4		4	−32	−120
	1	−8	−32	0

$V(x)=0\Leftrightarrow(x-4)(x^2-8x-32)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=4\vee x^2-8x-32=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=4\vee x=\dfrac{8\pm\sqrt{64+128}}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=4\vee x=-4\sqrt{3}+4\vee x=4\sqrt{3}+4$

Como $x\in\,]0\,,12[$, vem $V(x)=0\Leftrightarrow x=4\vee x=4\sqrt{3}+4$

Pág. 46

1. $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=$

$=(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA})=$

$=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DA}=$

$=0-\|\overrightarrow{DA}\|^2+\|\overrightarrow{AB}\|^2-0=$

$=-\left(\dfrac{3}{4}a\right)^2+a^2=$

$=a^2-\dfrac{9}{16}a^2=\dfrac{7}{16}a^2$

Resposta: (C)

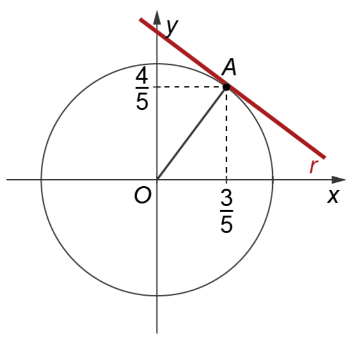
2. A circunferência de equação $x^2+y^2=1$ tem centro na origem do referencial e raio 1.

Seja $A\left(\dfrac{3}{5}\,,\dfrac{4}{5}\right)$.

$\overrightarrow{OA}=\left(\dfrac{3}{5}\,,\dfrac{4}{5}\right)=\dfrac{1}{5}(3\,,4)$, logo a reta *OA* tem declive $\dfrac{4}{3}$.

A reta *r* tem declive $-\dfrac{3}{4}$ e passa no ponto $A\left(\dfrac{3}{5}\,,\dfrac{4}{5}\right)$.

$r:\ y-\dfrac{4}{5}=-\dfrac{3}{4}\left(x-\dfrac{3}{5}\right)\Leftrightarrow y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{9}{20}+\dfrac{4}{5}\Leftrightarrow y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4}$



Resposta: (A)

3. $r: \begin{cases} x = k \\ y = 2k \\ z = 3k \end{cases}, \ k \in \mathbb{R}\,;\ \alpha:\ x + 2y + 3z = 14$

$\vec{r}(1, 2, 3)$ é um vetor diretor da reta r.

$\vec{u}(1, 2, 3)$ é um vetor perpendicular a α.

Como $\vec{r} = \vec{u}$, a reta r é perpendicular ao plano α.

Ponto genérico da reta r: $R(k, 2k, 3k)$

Interseção da reta r com o plano α: $x + 2y + 3z = 14$

$$k + 2\times(2k) + 3\times(3k) = 14 \Leftrightarrow k + 4k + 9k = 14 \Leftrightarrow 14k = 14 \Leftrightarrow k = 1$$

O ponto de interseção da reta r com o plano α é $R(1, 2, 3)$.

Resposta: (D)

4. $A(-2, 6)$; $B(-3, 3)$; $\vec{u}(4, -3)$

4.1. $\overrightarrow{AB} = B - A = (-1, -3)$

$$\cos\alpha = \frac{(4, -3)\cdot(-1, -3)}{\sqrt{16+9}\times\sqrt{1+9}} = \frac{-4+9}{5\times\sqrt{10}} = \frac{5}{5\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2} \Leftrightarrow 1 + \tan^2\alpha = 10 \Leftrightarrow \tan^2\alpha = 9$$

Como $0 \le \alpha \le \pi$ e $\cos\alpha > 0$ vem que $\tan\alpha > 0$

Logo, $\tan\alpha = 3$.

4.2. $\overrightarrow{AB} = (-1, -3)$

$C(x, 0)$; $A(-2, 6)$

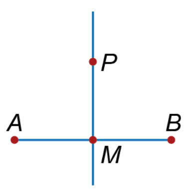
$\overrightarrow{AC} = (x+2, -6)$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (-1, -3)\cdot(x+2, -6) = 0 \Leftrightarrow -x - 2 + 18 = 0 \Leftrightarrow x = 16$$

$C(16, 0)$

4.3. $A(-2, 6)$ e $B(-3, 3)$

$$M\left(\frac{-2-3}{2}, \frac{6+3}{2}\right) = \left(-\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right)$$



$P(x, y)$

$\overrightarrow{MP}\left(x + \frac{5}{2}, y - \frac{9}{2}\right)$ e $\overrightarrow{AB}(-1, -3)$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MP} = 0 \Leftrightarrow (-1, -3)\cdot\left(x + \frac{5}{2}, y - \frac{9}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow -x - \frac{5}{2} - 3y + \frac{27}{2} = 0 \Leftrightarrow 3y = -x + 11 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$$

5. $ABV: 18x+30y+17z-90=0$

5.1. A é o ponto de interseção do plano ABV com o eixo Ox.

$18x+30y+17z-90=0 \wedge y=0 \wedge z=0 \Leftrightarrow 18x=90 \wedge y=0 \wedge z=0 \Leftrightarrow x=5 \wedge y=0 \wedge z=0$

$A(5\,,0\,,0)$

B é o ponto de interseção do plano ABV com o eixo Oy.

$18x+30y+17z-90=0 \wedge x=0 \wedge z=0 \Leftrightarrow 30y=90 \wedge x=0 \wedge z=0$

$y=3 \wedge x=0 \wedge z=0$

$B(0\,,3\,,0)$

5.2. $\overrightarrow{AB}=B-A=(-5\,,3\,,0)$

$D(x\,,y\,,0),\ y<0$

$\overrightarrow{AD}=D-A=(x-5\,,y\,,0),\ y<0$

$$\begin{cases}\|\overrightarrow{AD}\|=\|\overrightarrow{AB}\|\\ \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{(x-5)^2+y^2}=\sqrt{25+9}\\ -5(x-5)+3y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-5)^2+y^2=34\\ x-5=\frac{3}{5}y\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left(\frac{3}{5}y\right)^2+y^2=34\\ x=\frac{3}{5}y+5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{9}{25}y^2+y^2=34\\ x=\frac{3}{5}y+5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}9y^2+25y^2=25\times 34\\ x=\frac{3}{5}y+5\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}34y^2=34\times 25\\ x=\frac{3}{5}y+5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y^2=25\\ x=\frac{3}{5}y+5\end{cases} \underset{y<0}{\Leftrightarrow} \begin{cases}y=-5\\ x=2\end{cases}$$

Logo, D tem coordenadas (2 , –5 , 0).

5.3. A reta EV é perpendicular ao plano ADB.

Como o plano ABD é o plano de equação $z = 0$, o vetor $\vec{k}(0\,,0\,,1)$ é um vetor diretor da reta EV.

E é o ponto médio de [DB].

$E\left(\frac{2}{2}\,,\frac{3-5}{2}\,,\frac{0}{2}\right)$ ou seja, $E(1\,,-1\,,0)$.

Reta EV: $(x\,,y\,,z)=(1\,,-1\,,0)+k(0\,,0\,,1),\ k\in\mathbb{R}$

Ponto genérico de EV: $P(1\,,-1\,,k)$

V é a interseção da reta EV com o plano $ABV: 18x+30y+17z-90=0$

Substituindo as coordenadas de P, temos:

$18\times 1+30\times(-1)+17k-90=0 \Leftrightarrow 18-30+17k-90=0 \Leftrightarrow 17k=102 \Leftrightarrow k=6$

Logo, V tem coordenadas (0 , 0 , 6) e altura da pirâmide é igual a 6.