Teste de Matemática A

2016 / 2017

Teste N.º 4

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

10.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ______________________________________ N.º: ____ Turma: ____

Grupo I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais **só uma** está correta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à alternativa que selecionar para responder a esse item.
- Se apresentar mais do que uma alternativa, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos nem justificações.**

1. Qual das seguintes proposições é verdadeira?

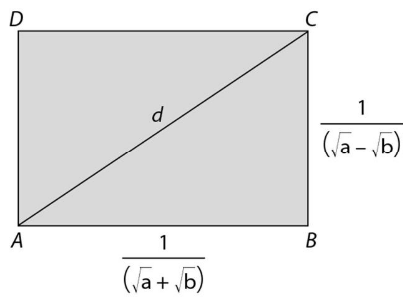
(A) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$

(B) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$

(C) $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 2 \Rightarrow x^2 \neq 4$

(D) $\forall x \in \mathbb{R}, x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$

2. Considere o retângulo $[ABCD]$ representado na figura.



Sabe-se que $\overline{AB} = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ e que $\overline{BC} = \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$, sendo $a, b \in \mathbb{N}$ e $a > b$. Seja d a medida da diagonal do retângulo. Qual das seguintes expressões representa d^2?

(A) $\frac{2(a+b)}{(a-b)^2}$

(B) $\frac{2}{a^2+b^2}$

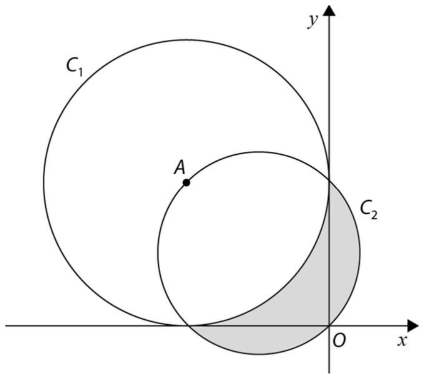
(C) $\frac{a+b}{a^2+b^2}$

(D) $\frac{a+b}{(a-b)^2}$

3. Na figura estão representadas, num referencial o.n. xOy, duas circunferências C_1 e C_2.

Sabe-se que:

- a circunferência C_1 tem centro no ponto $A(-3,3)$ e é tangente aos eixos coordenados;
- a circunferência C_2 tem centro no ponto médio de $[OA]$ e contém a origem do referencial.



Qual das seguintes condições define a região a sombreado?

(A) $(x-3)^2+(y+3)^2 \geq 9 \wedge \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{2}$

(B) $(x+3)^2+(y-3)^2 \leq 9 \wedge \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2 \geq \frac{9}{2}$

(C) $(x+3)^2+(y-3)^2 \geq 9 \wedge \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{2}$

(D) $(x+3)^2+(y-3)^2 \geq 3 \wedge \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2 \leq \frac{3}{2}$

4. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, um ponto $A(1,-2,-3)$. Quais são as coordenadas da projeção ortogonal de A sobre o plano xOy?

(A) (0, –2, –3)

(B) (1, 0, –3)

(C) (1, –2, 0)

(D) (0, 0, –3)

5. Considere a superfície esférica definida por $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=24$ e a reta definida por $(x,y,z)=(2,-1,1)+k(1,-1,2), k \in \mathbb{R}$.

Sejam A e B os pontos de interseção desta superfície esférica com esta reta.

Qual é o valor de $\overline{AB}$?

(A) $4\sqrt{6}$

(B) $2\sqrt{5}$

(C) $\sqrt{10}$

(D) $\sqrt{6}$

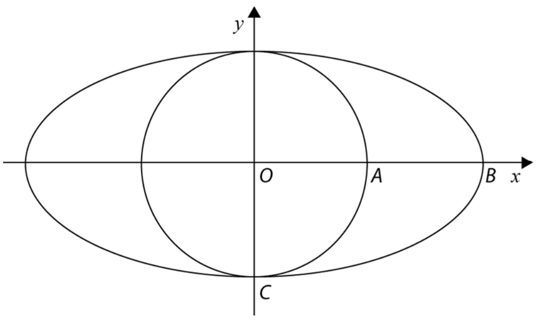
Grupo II

> Nas respostas aos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efetuar e **todas as justificações** necessárias.
>
> **Atenção:** Quando para um resultado não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exato**.

1. Sejam p e q duas proposições quaisquer. Utilizando as propriedades das operações lógicas, mostre que a negação da proposição $(\sim p \vee q \Rightarrow p) \wedge \sim q$ é equivalente a $\sim p \vee q$.

2. A expressão $P(x) = (x-2)^{n^2+1} + mx^2 - mx + 2$ representa um polinómio em x para qualquer valor de $n \in \mathbb{N}$ e qualquer valor de $m \in \mathbb{R}$. Determine m de modo que o resto da divisão de $P(x)$ por $x-2$ seja -3.

3. Na figura estão representadas, num plano munido de um referencial o.n. xOy, uma circunferência de equação $x^2 + y^2 = 36$ e uma elipse.



Sabe-se que a circunferência e a elipse se intersetam em dois pontos pertencentes ao eixo Oy, sendo C um desses pontos. O ponto A pertence à circunferência. O ponto B pertence à elipse.
Os pontos A e B pertencem ao eixo Ox.

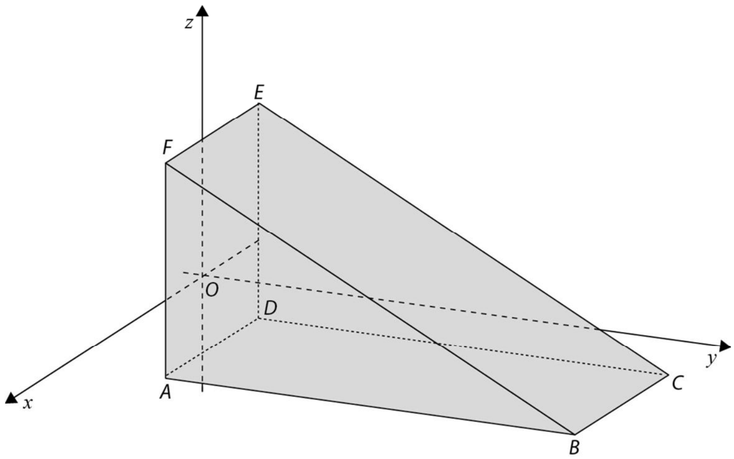
3.1. Sabendo que $\overline{OB} = 2\overline{OA}$, escreva a equação reduzida da elipse.

3.2. Escreva um sistema de equações paramétricas que defina a mediatriz de $[AC]$.

3.3. Escreva uma condição que determine o semiplano fechado definido pela reta BC e que contém o ponto A.

3.4. Determine as coordenadas do vetor $\vec{u}$, de norma 12, colinear com $\overrightarrow{AC}$ e que tenha sentido contrário ao de $\overrightarrow{AC}$.

4. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um prisma triangular $[ABCDEF]$.



Sabe-se que:

- $[ABF]$ e $[DCE]$ são triângulos retângulos;
- $[ADEF]$ é um quadrado de lado 4 e está contido no plano de equação $y = 2$;
- $[ABCD]$ está contido no plano xOy;
- o vértice C tem coordenadas (2, 10, 0).

4.1. Determine as coordenadas dos restantes vértices do prisma.

4.2. Recorrendo às letras da figura, calcule:

4.2.1. $C + \overrightarrow{BF}$

4.2.2. $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{FA}$

4.3. Defina por uma equação o plano que contém os pontos F e E e é paralelo a xOy.

4.4. Determine uma equação do plano mediador de $[EC]$. Apresente a sua resposta na forma $ax + by + cz + d = 0,\ a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

4.5. Defina por uma condição a esfera com centro no ponto médio de $[AC]$ e que é tangente ao plano xOz.

– FIM –

COTAÇÕES

Grupo I 50

Cada resposta certa 10
Cada resposta errada.. 0
Cada questão não respondida ou anulada............................. 0

Grupo II 150

1. 15
2. 10
3. 60
   - 3.1. 15
   - 3.2. 15
   - 3.3. 15
   - 3.4. 15
4. 65
   - 4.1. 15
   - 4.2. 10
   - 4.3. 10
   - 4.4. 15
   - 4.5. 15

TOTAL 200

TESTE N.º 4 – Proposta de resolução

Grupo I

1. Opção (D)

As opções (A), (B) e (C) são falsas, uma vez que, em todas, para a concretização -2 da variável, a primeira condição transforma-se numa proposição verdadeira e a segunda numa proposição falsa, ou seja, obtém-se uma proposição falsa.

A opção (D) é verdadeira, já que, para a concretização 2 da variável, a primeira condição transforma-se numa proposição verdadeira e a segunda também e para todas as outras concretizações possíveis a primeira condição transforma-se numa proposição falsa, pelo que, independentemente do valor lógico da segunda condição, se obtém sempre uma proposição verdadeira.

2. Opção (A)

$$d^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^2 \Leftrightarrow d^2 = \frac{1}{a+2\sqrt{ab}+b} + \frac{1}{a-2\sqrt{ab}+b} \Leftrightarrow d^2 = \frac{a+b-2\sqrt{ab}+a+b+2\sqrt{ab}}{(a+b+2\sqrt{ab})(a+b-2\sqrt{ab})}$$

$$\Leftrightarrow d^2 = \frac{2a+2b}{(a+b)^2-4ab}$$

$$\Leftrightarrow d^2 = \frac{2(a+b)}{a^2+2ab+b^2-4ab}$$

$$\Leftrightarrow d^2 = \frac{2(a+b)}{a^2-2ab+b^2}$$

$$\Leftrightarrow d^2 = \frac{2(a+b)}{(a-b)^2}$$

3. Opção (C)

$C_1\colon (x+3)^2 + (y-3)^2 = 9$

$\left(\frac{-3+0}{2}, \frac{3+0}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ são as coordenadas do centro de C_2.

O raio de C_2 é dado por:

$\sqrt{\left(-3+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(3-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{9}{2}}$

Assim, $C_2\colon \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}$.

Logo, a condição pedida é $(x+3)^2 + (y-3)^2 \geq 9 \wedge \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{2}$.

4. Opção (C)

As coordenadas da projeção ortogonal de A sobre o plano xOy são (1, –2, 0).

5. Opção (A)

Qualquer ponto da reta é da forma $(2+k, -1-k, 1+2k), k \in \mathbb{R}$.

Substituindo na equação da superfície esférica:

$$(2+k-2)^2+(-1-k+1)^2+(1+2k-1)^2=24 \Leftrightarrow k^2+k^2+4k^2=24$$
$$\Leftrightarrow k^2=4$$
$$\Leftrightarrow k=2 \vee k=-2$$

Assim, A (4, –3, 5) e B (0, 1, –3).

Logo, $\overline{AB}=\sqrt{(4-0)^2+(-3-1)^2+(5+3)^2}=\sqrt{16+16+64}=\sqrt{96}=4\sqrt{6}$.

Grupo II

1. $\sim\big((\sim p \vee q \Rightarrow p) \wedge \sim q\big) \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee q \Rightarrow p) \vee q$

$$\Leftrightarrow \sim(\sim(\sim p \vee q) \vee p) \vee q$$
$$\Leftrightarrow \big((\sim p \vee q) \wedge \sim p\big) \vee q$$
$$\Leftrightarrow \big((\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee \mathrm{F})\big) \vee q$$
$$\Leftrightarrow \big(\sim p \vee (q \wedge \mathrm{F})\big) \vee q$$
$$\Leftrightarrow (\sim p \vee \mathrm{F}) \vee q$$
$$\Leftrightarrow \sim p \vee q$$

2. $P(2)=-3 \Leftrightarrow (2-2)^{n^2+1}+4m-2m+2=-3$

$$\Leftrightarrow 2m=-5$$
$$\Leftrightarrow m=-\frac{5}{2}$$

3.

3.1. $A(x,0), x>0$

O raio da circunferência é 6, logo $A(6,0)$.

Como $\overline{OB}=2\overline{OA}$ e B pertence ao eixo Ox, então $B(12,0)$.

Então, o semieixo maior da elipse é 12.

$C(0,y), y<0$

Sabemos que o raio da circunferência é 6, logo $C(0, -6)$.

Assim, o semieixo menor da elipse é 6.

Então, a equação reduzida da elipse é $\frac{x^2}{12^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{36} = 1$.

3.2. A mediatriz de $[AC]$ é a bissetriz dos quadrantes pares, que tem o vetor (1, −1) como vetor diretor, por exemplo, e passa na origem do referencial.

Logo, um sistema de equações paramétricas que define a mediatriz de $[AC]$ é:

$\begin{cases} x = k \\ y = -k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

3.3. $B(12, 0)$

$C(0, -6)$

$\overrightarrow{BC}(-12, -6)$

$m_{BC} = \frac{-6}{-12} = \frac{1}{2}$

A equação reduzida da reta BC é, então, $y = \frac{1}{2}x - 6$.

A condição pedida é $y \geq \frac{1}{2}x - 6$.

3.4. $A(6, 0)$

$C(0, -6)$

$\overrightarrow{AC}(-6, -6)$

$\vec{u}(-6k, -6k)$

$\|\vec{u}\| = 12 \Leftrightarrow \sqrt{(-6k)^2 + (-6k)^2} = 12$

$\Leftrightarrow 36k^2 + 36k^2 = 144$

$\Leftrightarrow k^2 = 2$

$\Leftrightarrow k = \sqrt{2} \vee k = -\sqrt{2}$

Como $\vec{u}$ tem sentido contrário ao de $\overrightarrow{AC}$, então $\vec{u}(6\sqrt{2}, 6\sqrt{2})$.

4.

4.1. $C(2, 10, 0); A(6, 2, 0); B(6, 10, 0); D(2, 2, 0); E(2, 2, 4); F(6, 2, 4)$

4.2.

4.2.1. $C + \overrightarrow{BF} = C + \overrightarrow{CE} = E$

4.2.2. $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CE}$

4.3. $z = 4$

4.4. $E(2, 2, 4)$

$C(2, 10, 0)$

$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = (x-2)^2 + (y-10)^2 + (z-0)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^2 - 4y + 4 + z^2 - 8z + 16 = y^2 - 20y + 100 + z^2$

$\Leftrightarrow 16y - 8z - 80 = 0$

$\Leftrightarrow 2y - z - 10 = 0$

4.5. $C(2, 10, 0)$

$A(6, 2, 0)$

Seja M o ponto médio de $[AC]$.

$M(4, 6, 0)$

Se a esfera é tangente ao plano xOz e tem centro em M, então o seu raio é 6.

Assim, a condição pedida é $(x-4)^2 + (y-6)^2 + z^2 \leq 36$.