Proposta de teste de avaliação

Matemática A

10.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos **| Data:**

Grupo I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. Num referencial ortonormado *Oxyz*, a condição:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 \wedge (z = 0 \wedge y = 3)$$

define:

(A) um ponto

(B) um segmento de reta

(C) um círculo

(D) o conjunto vazio

2. De uma função f, de domínio $\mathbb{R}$ e bijetiva, sabe-se que $f(5) = 7$ e $f^{-1}(5) = 4$.

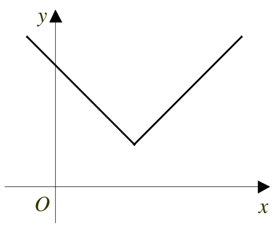
A solução da equação $2f^{-1}(x-2) - 6 = 4$ é:

(A) 5 **(B)** 6 **(C)** 7 **(D)** 9

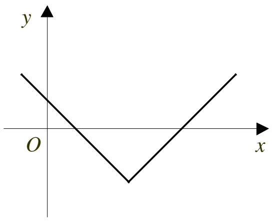
3. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x-a| + b$, em que a e b designam números reais.

Em qual das figuras seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f, sabendo que $a < 0 \wedge b > 0$?

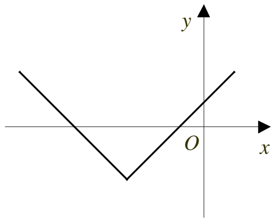
(A)



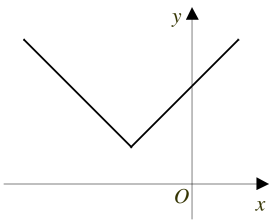
(B)



(C)



(D)



4. Se o domínio de uma função f é $[a, b]$, o domínio da função g definida por $g(x) = 1 + f(2x)$ é:

(A) $[2a, 2b]$ **(B)** $[2a+1, 2b+1]$

(C) $\left[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right]$ **(D)** $\left[\frac{a}{2}+1, \frac{b}{2}+1\right]$

5. Considere as funções f e g, de domínio $\mathbb{R}$, definidas por:

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = (x+3)^2 - k, \ k \in \mathbb{R}^+$$

Em qual das seguintes opções pode estar representado o conjunto dos zeros da função $f \times g$?

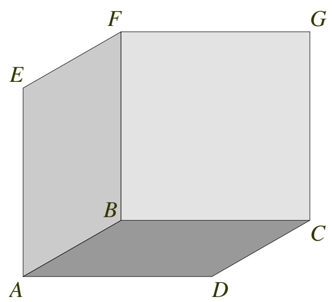
(A) $\{-4, -2\}$ **(B)** $\{-5, 0\}$

(C) $\{-6, 0\}$ **(D)** $\{-5, -2, 0\}$

Grupo II

Na resposta aos itens deste grupo apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

1. Fixado um referencial ortonormado do espaço, os pontos $A(1, -6, 2)$, $B(3, 0, 5)$ e $C(-3, 3, 3)$ são três dos vértices de uma das faces do cubo $[ABCDEFGH]$, representado na figura (o vértice H não é visível).



1.1. Mostre que o ponto D tem coordenadas $(-5, -3, 0)$.

1.2. Mostre que a origem do referencial pertence ao plano ACG.

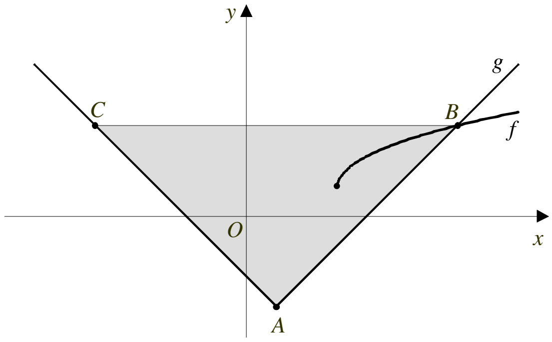
1.3. Determine as coordenadas do ponto de interseção da reta AC com o plano xOy.

2. Considere as funções f e g definidas por $f(x)=\sqrt{x-3}+1$ e $g(x)=|x-1|-3$.

2.1. Determine o domínio e o contradomínio da função f.

2.2. Sabendo que f é bijetiva, caracterize f^{-1}, função inversa de f.

2.3. Na figura estão parcialmente representados os gráficos das funções f e g.

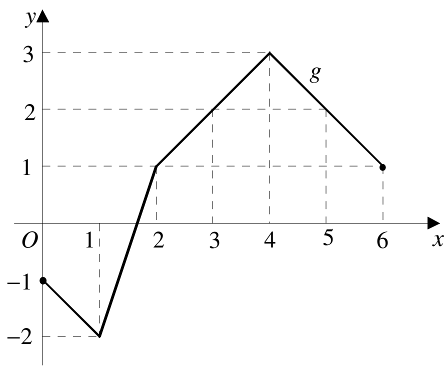


Sabe-se que:

- A é o ponto do gráfico de g cuja ordenada é o mínimo absoluto desta função;
- B é o ponto de interseção dos gráficos de f e de g;
- C é o ponto do gráfico de g com abcissa negativa e ordenada igual à do ponto B.

Determine a medida da área do triângulo [*ABC*].

3. Considere a função f definida por $f(x)=\sqrt{2-x}$ e a função g representada graficamente na figura seguinte.



3.1. Indique o domínio de cada uma das funções.

3.2. Determine o conjunto-solução da equação $\left[g(x)-2\right]\times f(x)=0$.

3.3. Determine o domínio da função $f+g$ e calcule $(f+g)(1)$.

3.4. Determine o domínio da função $f\circ g$ e calcule $(f\circ g)(1)$ e $(f\circ g)(5)$.

4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = a(x-h)^2 + k$, em que a, h e k designam números reais.

4.1. Determine a, h e k sabendo que $a \neq 0$, $f(0) = 2$, $f(2) = 1$ e que o contradomínio da função f é o intervalo $[1, +\infty[$.

4.2. Demonstre por contrarrecíproco que:

$$\exists x \in \mathbb{R}: f(x) < 0 \Rightarrow (a \leq 0 \vee k < 0)$$

FIM

COTAÇÕES

Grupo I

1	2	3	4	5	Total
10	10	10	10	10	**50**

Grupo II

1.1.	1.2.	1.3.	2.1.	2.2.	2.3.	3.1.	3.2.	3.3.	3.4.	4.1.	4.2.	Total
10	15	15	10	15	15	10	10	10	15	10	15	**150**

Proposta de resolução

Grupo I

1. A condição $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ define uma esfera de centro na origem e raio 3.

A condição $z = 0 \wedge y = 3$ define uma reta paralela ao eixo Ox que passa no ponto $(0,3,0)$.

Assim, a interseção da reta com a esfera é o ponto de coordenadas $(0,3,0)$.

Resposta: (A)

2. $2f^{-1}(x-2)-6=4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2f^{-1}(x-2)=10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f^{-1}(x-2)=5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-2=f(5) \Leftrightarrow$

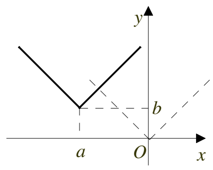
$\Leftrightarrow x-2=7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=9$

Resposta: (D)

3. O gráfico da função f é o transformado do gráfico da função g definida por $g(x)=|x|$ pela translação de vetor (a,b).

Como $a<0 \wedge b>0$, o gráfico pedido apresenta-se na opção (D).



Resposta: (D)

4. Se $D_f = [a,\, b]$ e $g(x)=1+f(2x)$, então:

$D_g = \{x \in \mathbb{R} : a \leq 2x \leq b\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{a}{2} \leq x \leq \frac{b}{2}\right\} = \left[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right]$

O gráfico da função g é a imagem do gráfico da função f por uma contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{2}$.

Resposta: (C)

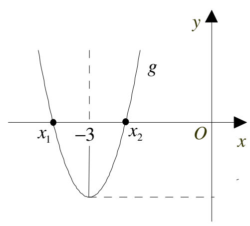
5. $f(x)=x^2$ e $g(x)=(x+3)^2-k$

$(f \times g)(x)=0 \Leftrightarrow f(x) \times g(x)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)=0 \vee g(x)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2=0 \vee (x+3)^2-k=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \vee (x+3)^2=k$



Um dos zeros de $f \times g$ é 0. Logo, fica excluída a opção (A).

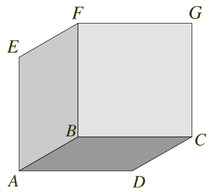
No eixo Ox, os pontos correspondentes aos zeros de g são imagem um do outro numa reflexão de eixo $x=-3$.

Logo:

- se $-5=-3-2$ é um zero de g, então $-3+2=-1$ também é zero de g (ficam excluídas as opções (B) e (D));
- se $-6=-3-3$ é um zero de g, então $-3+3=0$ também é zero de g (opção (C)).

Resposta: (C)

Grupo II



1. $A(1,-6,2)$, $B(3,0,5)$ e $C(-3,3,3)$

1.1 $D=A+\overrightarrow{AD}=A+\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BC}=C-B=(-3,3,3)-(3,0,5)=(-3-3,3-0,3-5)=(-6,3,-2)$

$D=A+\overrightarrow{BC}=(1,-6,2)+(-6,3,-2)=(-5,-3,0)$

Logo, D tem coordenadas $(-5,-3,0)$.

1.2. ACG é o plano mediador de $[BD]$. Logo, a origem O do referencial pertence ao plano ACG se e somente se $\overline{OB}=\overline{OD}$.

$O(0,0,0)$, $B(3,0,5)$ e $D(-5,-3,0)$

$\overline{OB}=\sqrt{(3-0)^2+(0-0)^2+(5-0)^2}=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$

$\overline{OD}=\sqrt{(-5-0)^2+(-3-0)^2+(0-0)^2}=\sqrt{25+9}=\sqrt{34}$

Como $\overline{OB}=\overline{OD}$, a origem do referencial pertence ao plano ACG.

1.3. $A(1,-6,2)$ e $C(-3,3,3)$

$\overrightarrow{AC}=C-A=(-3,3,3)-(1,-6,2)=(-4,9,1)$

$AC:\ (x,y,z)=(1,-6,2)+k(-4,9,1),\ k\in\mathbb{R}$

$$AC:\ \begin{cases} x=1-4k \\ y=-6+9k \\ z=2+k \end{cases},\ k\in\mathbb{R}$$

Todo o ponto da reta AC é da forma $(1-4k,-6+9k,2+k)$, $k\in\mathbb{R}$.

Portanto, o ponto da reta AC que pertence ao plano $xOy: z=0$ obtém-se para o valor de $k\in\mathbb{R}$ tal que:

$2+k=0 \Leftrightarrow k=-2$

Para $k=-2$:

$(1-4k,-6+9k,2+k)=(1+8,-6-18,2-2)=(9,-24,0)$

A reta AC interseta o plano xOy no ponto de coordenadas $(9,-24,0)$.

2. $f(x)=\sqrt{x-3}+1$ e $g(x)=|x-1|-3$

2.1. $D_f=\{x\in\mathbb{R}: x-3\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}: x\geq 3\}=[3,+\infty[$

O contradomínio da função definida em $\mathbb{R}_0^+$ por $y=\sqrt{x}$ é $[0,+\infty[$.

Como o gráfico da função f é o transformado do gráfico da função definida por $y=\sqrt{x}$ pela translação de vetor $(3,1)$, o contradomínio da função f é $[1,+\infty[$.

Ou

$x\in D_f \Leftrightarrow x\geq 3 \Leftrightarrow x-3\geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-3}\geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-3}+1\geq 1$

Logo, $D'_f=[1,+\infty[$.

2.2. $D_f=[3,+\infty[$ e $D'_f=[1,+\infty[$

$f(x)=y \Leftrightarrow \sqrt{x-3}+1=y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-3}=y-1$

Como $\sqrt{x-3}\geq 0$ e $y-1\geq 0$ porque $y\geq 1$, temos:

$\sqrt{x-3}=y-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-3=(y-1)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=(y-1)^2+3 \Leftrightarrow$

$f^{-1}:[1,+\infty[\to[3,+\infty[$ com $f^{-1}(x)=(x-1)^2+3$.

2.3. O gráfico da função g definida por $g(x)=|x-1|-3$ é o transformado do gráfico da função definida por $y=|x|$ pela translação de vetor $(1,-3)$. Portanto, o ponto A tem ordenada -3.

Coordenadas do ponto B:

$f(x)=g(x) \Leftrightarrow \sqrt{x-3}+1=|x-1|-3 \wedge x\geq 3 \Leftrightarrow$

Se $x\geq 3$,
$|x-1|=x-1$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-3}+1=(x-1)-3 \wedge x\geq 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-3}=x-1-3-1 \wedge x\geq 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-3}=x-5 \wedge x\geq 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x-3=(x-5)^2 \wedge x\geq 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-3=x^2-10x+25 \wedge x\geq 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-11x+28=0 \wedge x\geq 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x=4 \vee x=7) \wedge x\geq 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=4 \vee x=7$

Cálculo auxiliar

$x^2-11x+28=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{11\pm\sqrt{11^2-4\times 28}}{2}$

$\Leftrightarrow x=\frac{11\pm\sqrt{121-112}}{2}$

$\Leftrightarrow x=\frac{11\pm\sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{11\pm 3}{2}$

$\Leftrightarrow x=4 \vee x=7$

Verificação:

$x=4:\ \sqrt{4-3}=4-5 \Leftrightarrow 1=-1$ (Falso)

$x=7:\ \sqrt{7-3}=7-5 \Leftrightarrow 2=2$ (Verdadeiro)

$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x=7$

$f(7)=\sqrt{7-3}+1=2+1=3$

$B(7, 3)$

Coordenadas do ponto C:

$g(x)=3 \wedge x<0 \Leftrightarrow |x-1|-3=3 \wedge x<0 \Leftrightarrow$

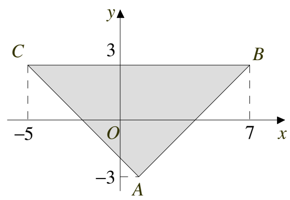
$\Leftrightarrow |x-1|=6 \wedge x<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1=6 \vee x-1=-6) \wedge x<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x=7 \vee x=-5) \wedge x<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-5$

$C(-5, 3)$



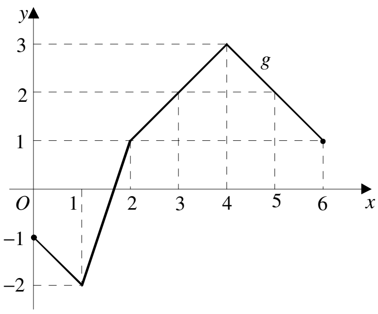
$\overline{BC}=|7-(-5)|=12$

Medida da altura do triângulo relativa ao vértice A:

$h=|\text{ordenada de } B-\text{ordenada de } A|=|3-(-3)|=6$

Medida da área do triângulo $[ABC]=\frac{\overline{BC}\times h}{2}=\frac{12\times 6}{2}=36$

3. $f(x)=\sqrt{2-x}$



3.1. $D_f=\{x\in\mathbb{R}: 2-x\geq 0\}=$

$=\{x\in\mathbb{R}: x\leq 2\}=]-\infty, 2]$

$D_g=[0, 6]$

3.2. $[g(x)-2]\times f(x)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g(x)-2=0 \vee f(x)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g(x)=2 \vee \sqrt{2-x}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=3 \vee x=5 \vee 2-x=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=2 \vee x=3 \vee x=5$

$S=\{2, 3, 5\}$

3.3. $D_{f+g}=D_f\cap D_g=]-\infty, 2]\cap[0, 6]=[0, 2]$

$(f+g)(1)=f(1)+g(1)=$

$=\sqrt{2-1}+(-2)=1-2=-1$

3.4. $D_{f\circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} =$

$= [0, 3] \cup [5, 6]$

dado que:

$x \in D_g \wedge g(x) \in D_f \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 6 \wedge g(x) \leq 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \leq x \leq 6 \wedge (0 \leq x \leq 3 \vee 5 \leq x \leq 6) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \leq x \leq 3 \vee 5 \leq x \leq 6$

$(f \circ g)(1) = f[g(1)] = f(-2) = \sqrt{2-(-2)} = \sqrt{4} = 2$

$(f \circ g)(5) = f[g(5)] = f(2) = \sqrt{2-2} = \sqrt{0} = 0$

4. $f(x) = a(x-h)^2 + k$

4.1. Se o contradomínio da função f é o intervalo $[1, +\infty[$ temos $a > 0$ e $k = 1$.

$f(x) = a(x-h)^2 + 1$

$$\begin{cases} f(2) = 1 \\ f(0) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(2-h)^2 + 1 = 1 \\ a(0-h)^2 + 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(2-h)^2 = 0 \\ ah^2 = 1 \end{cases} \overset{a>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-h = 0 \\ ah^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = 2 \\ a \times 2^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = 2 \\ a = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$a = \frac{1}{4}$, $h = 2$ e $k = 1$

4.2. A contrarrecíproca de $\exists x \in \mathbb{R}: f(x) < 0 \Rightarrow (a \leq 0 \vee k < 0)$ é:

$\sim(a \leq 0 \vee k < 0) \Rightarrow \sim[\exists x \in \mathbb{R}: f(x) < 0]$

o que é equivalente a:

$(a > 0 \wedge k \geq 0) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$

Sabemos que a soma e o produto de números reais não negativos são um número real não negativo.

Assim, como $\forall x \in \mathbb{R}, (x-h)^2 \geq 0$, podemos concluir que, se $a > 0 \wedge k \geq 0$,

$\forall x \in \mathbb{R}, a(x-h)^2 + k \geq 0$, ou seja, se $a > 0 \wedge k \geq 0$, então $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$.

Portanto, ficou provado que $(a > 0 \wedge k \geq 0) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$. Logo, podemos concluir a contrarrecíproca:

$\exists x \in \mathbb{R}: f(x) < 0 \Rightarrow (a \leq 0 \vee k < 0)$