Novo Espaço – Matemática A 11.º ano

Proposta de teste de avaliação [outubro – 2018]

Nome: ____

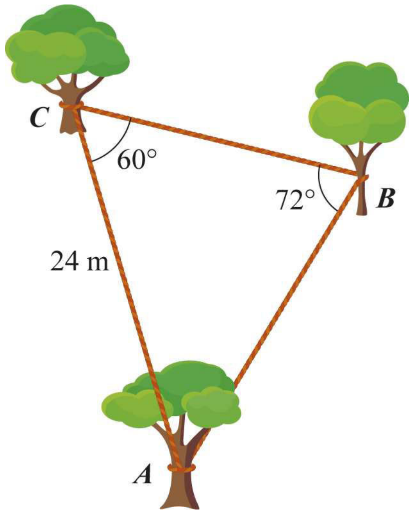
Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ - ____ - ___

- Não é permitido o uso de corretor. Deves riscar aquilo que pretendes que não seja classificado.
- A prova inclui um formulário.
- As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

CADERNO 1
(É permitido o uso de calculadora gráfica.)

1. Pretende-se ligar três árvores existentes no quintal do Tomás através de uma corda, como ilustra a figura.

Sejam A, B e C pontos marcados um em cada tronco das árvores, todos à mesma altura do solo.



Sabe-se que:

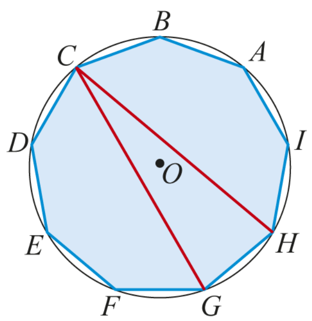
- $A\hat{C}B = 60^{\circ}$
- $C\hat{B}A = 72^{\circ}$
- $\overline{AC} = 24\text{ m}$

O Tomás pretende escolher uma corda que permita ligar as árvores com o menor desperdício possível.

Qual é o comprimento da corda que o Tomás deve escolher, sabendo que tem ao seu dispor cordas com os comprimentos seguintes:

(A) 60 m **(B)** 64 m **(C)** 66 m **(D)** 72 m

2. Na figura está representado um eneágono regular inscrito numa circunferência de centro O.



2.1. Ao ponto A foi aplicada uma rotação de centro O e amplitude -2000°.

Identifica a imagem do ponto A.

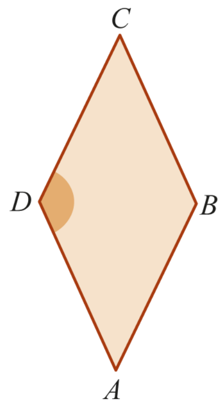
(A) Ponto B **(B)** Ponto F

(C) Ponto E **(D)** Ponto C

2.2. Determina o perímetro do eneágono, sabendo que $\overline{CG} = \overline{CH} = 8\,\text{cm}$.

Apresenta o resultado em centímetros, arredondado às centésimas.

3. Na figura está representado o losango $[ABCD]$.



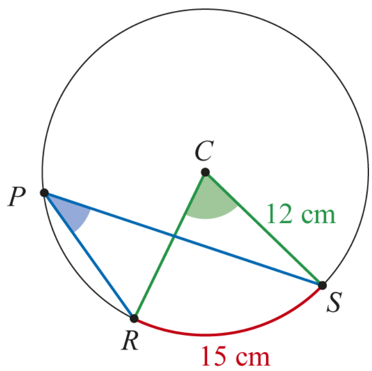
Sabe-se que:

- $A\hat{D}C = 130^\circ$
- $\overline{AD} = 4$

Qual dos seguintes valores corresponde à medida da área do losango arredondada às centésimas?

(A) 13,52 **(B)** 6,76 **(C)** 7,25 **(D)** 12,26

4. Na figura está representada a circunferência de centro C e raio 12 cm.



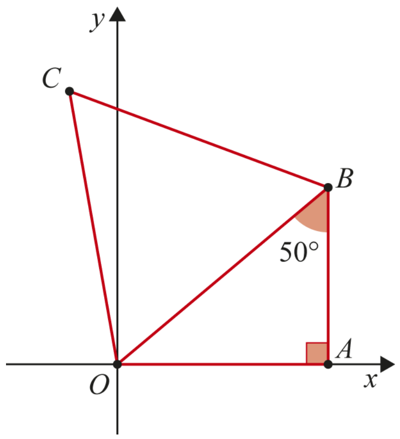
Os pontos P, R e S pertencem à circunferência.

Sabe-se que o comprimento do arco RS é de 15 cm.

Um valor arredondado às unidades da amplitude do ângulo RPS, em graus, é:

(A) 36º **(B)** 30º **(C)** 72º **(D)** 24º

5. Na figura estão representados, num referencial ortonormado Oxy, dois triângulos, $[OAB]$ e $[OBC]$.



Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(4, 0)$;
- o triângulo $[OAB]$ é retângulo em A;
- o triângulo $[OBC]$ é equilátero;
- $O\hat{B}A = 50^\circ$

Determina valores arredondados às centésimas das coordenadas do ponto C.

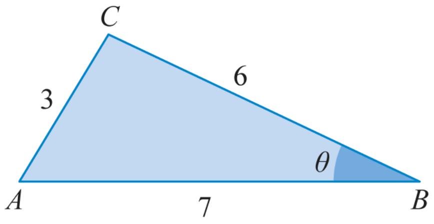
Sempre que nos cálculos intermédios procederes a arredondamentos, conserva, no mínimo, três casas decimais.

FIM (Caderno 1)

Cotações							Total
Questões – Caderno 1	**1.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.**	**4.**	**5.**	
Pontos	10	10	20	10	10	20	**80**

CADERNO 2
(Não é permitido o uso de calculadora.)

1. Na figura está representado o triângulo $[ABC]$, tal que, fixada uma unidade, $\overline{AB}=7$, $\overline{BC}=6$ e $\overline{AC}=3$.



O valor de $\cos\theta$ é:

(A) $-\frac{1}{9}$

(B) $\frac{19}{21}$

(C) $\frac{11}{21}$

(D) $\frac{6}{7}$

2. Determina o valor exato de $\sin\frac{7\pi}{3}+3\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)-\tan\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$.

3. De um ângulo de amplitude α, sabe-se que $\sin(90^\circ+\alpha)=-\frac{2}{5}$ e $180^\circ<\alpha<360^\circ$.

Calcula o valor da expressão $\sin(180^\circ+\alpha)-\sin(450^\circ-\alpha)+\tan(180^\circ+\alpha)$.

4. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) $\forall x\in\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right[,\ \sin(2x)\cos x<0$

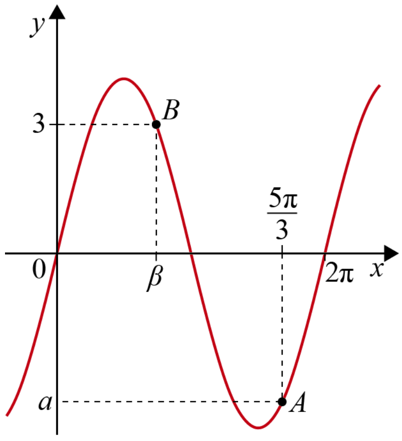
(B) $\exists x\in\left]\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right[:\ \sin x<\frac{\sqrt{2}}{2}$

(C) $\forall x\in\left]\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right[,\ \cos(2x)-\sin x<0$

(D) $\exists x\in\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[:\ \cos x>0$

5. Na figura está representada graficamente parte da função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = 4\sin x$. Sabe-se que:

- os pontos A e B pertencem ao gráfico de g;
- o ponto A tem abcissa $\frac{5\pi}{3}$ e ordenada a;
- o ponto B tem ordenada 3 e abcissa β.



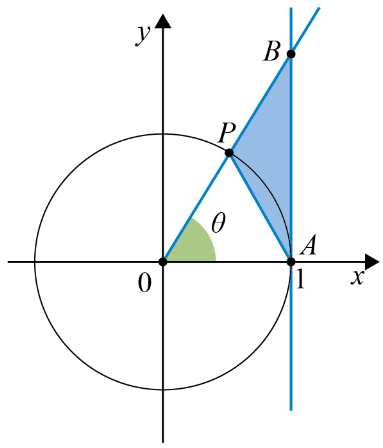
5.1. Determina o valor de a.

5.2. Atendendo às coordenadas do ponto B, calcula o valor de $g\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)$.

6. No referencial ortonormado da figura está representada a circunferência trigonométrica, à qual pertencem os pontos A e P.

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas (1, 0);
- $A\hat{O}P = \theta$ rad, sendo $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$;
- o ponto B é o ponto de interseção da reta OP e da reta definida pela equação $x = 1$.



6.1. A medida da área do triângulo [ABP] é dada, em função de θ, pela expressão:

(A) $\dfrac{\tan\theta - \sin\theta}{2}$ **(B)** $\dfrac{\tan\theta\cos\theta}{2}$

(C) $\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{2}$ **(D)** $\dfrac{\tan\theta}{2}$

6.2. Determina a medida da área do triângulo [ABP] no caso do ponto P ter ordenada $\frac{4}{5}$.

FIM (Caderno 2)

Cotações

Caderno 1 (com calculadora)

Questões	1.	2.1.	2.2.	3.	4.	5.		
Pontos	10	10	20	10	10	20	Total	80

Caderno 2 (sem calculadora)

Questões	1.	2.	3.	4.	5.1.	5.2.	6.1.	6.2.		
Pontos	10	20	20	10	10	20	10	20	Total	120

Total	200

FORMULÁRIO

GEOMETRIA

Comprimento de um arco de circunferência: αr
(α : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;
r : raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Área de um setor circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$

(α : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r : raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$

(r : raio da base; g : geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$

(r : *raio*)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r : raio)

PROGRESSÕES

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

TRIGONOMETRIA

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

COMPLEXOS

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

$(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

PROBABILIDADES

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

LIMITES NOTÁVEIS

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

CADERNO 1
(É permitido o uso de calculadora gráfica.)

1. $B\hat{A}C = 180° - 60° - 72° = 48°$

Atendendo à lei dos senos: $\frac{\sin 72°}{24} = \frac{\sin 60°}{\overline{AB}} = \frac{\sin 48°}{\overline{BC}}$

$\overline{AB} = \frac{24 \sin 60°}{\sin 72°} \approx 21,854$

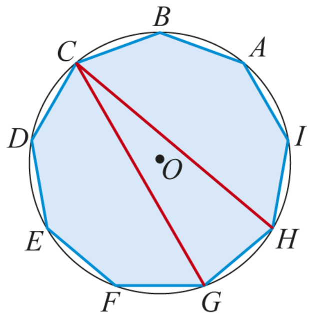
$\overline{BC} = \frac{24 \sin 48°}{\sin 72°} \approx 18,753$

$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} \approx 64,6$. Como $64 < \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} < 66$, deve ser escolhida a corda com 66 m de comprimento.

Resposta: A opção correta é a (**C**).

2.

2.1. $G\hat{O}H = \frac{360°}{9} = 40°$



Sabe-se que $-2000° = -200° - 5 \times 360°$

$R_{(O,-200°)}(A) = E$

Resposta: A opção correta é a (**C**).

2.2. Como o ângulo GCH é inscrito na circunferência, $G\hat{C}H = \frac{G\hat{O}H}{2} = 20°$.

Aplicando a lei dos cossenos (Teorema de Carnot) relativamente ao triângulo [GHC], tem-se:

$\overline{GH}^2 = 8^2 + 8^2 - 2 \times 8 \times 8 \cos 20° \Leftrightarrow \overline{GH}^2 = 128 - 128 \cos 20°$

Então, $\overline{GH} \approx 2,778\ 37$.

Designando por P a medida do perímetro do eneágono, $P = 9 \times \overline{GH} \approx 25,01$.

Resposta: O perímetro do eneágono é, aproximadamente, 25,01 cm.

3. $A\hat{D}C = C\hat{B}A = 130^\circ$

$$D\hat{C}B = \frac{360^\circ - 2\times 130^\circ}{2} = 50^\circ$$

Pela lei dos cossenos aplicada ao triângulo [*ACD*], tem-se

$\overline{AC} = \sqrt{4^2 + 4^2 - 32\cos 130^\circ}$, pelo que $\overline{AC} \approx 7,250\ 46$.

Pela lei dos cossenos aplicada ao triângulo [*DBC*], tem-se:

$\overline{DB} = \sqrt{4^2 + 4^2 - 32\cos 50^\circ}$, pelo que $\overline{DB} \approx 3,380\ 95$.

$$A_{[ABCD]} = \frac{\overline{AC}\times\overline{DB}}{2} \approx 12,26$$

Resposta: A opção correta é a **(D)**.

4. A razão entre as medidas do comprimento do arco *RS* e do raio é $\frac{15}{12}$, ou seja, 1,25.

Então, $R\hat{C}S = 1,25$ rad .

Seja x a amplitude, em graus, do ângulo *RCS*.

Como π rad corresponde a 180°, então: $x = \frac{1,25\times 180}{\pi} \approx 71,62^\circ$.

Assim, $R\hat{P}S = \frac{R\hat{C}S}{2} \approx 36^\circ$.

Resposta: A opção correta é **(A)**.

5. $A\hat{O}B = 40^\circ$; $B\hat{O}C = 60^\circ$; $A\hat{O}C = 100^\circ$

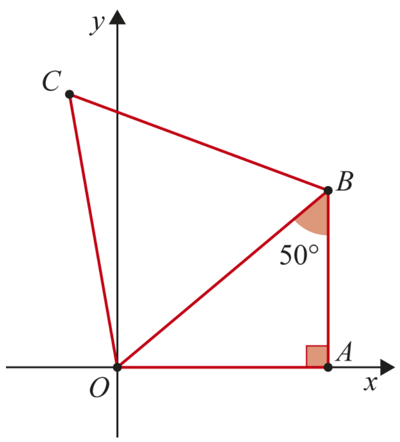
$\sin 50^\circ = \frac{4}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \overline{OB} = \frac{4}{\sin 50^\circ}$, logo $\overline{OB} \approx 5,2216$.

Sendo *C*(*x*, *y*), sabe-se que:

$x = \overline{OC}\cos 100^\circ$ e $y = \overline{OC}\sin 100^\circ$

Assim: $x \approx -0,91$ e $y \approx 5,14$.

Resposta: O ponto *C* tem coordenadas, aproximadamente, $(-0,91\ ;\ 5,14)$.



FIM (Caderno 1)

Cotações							Total
Questões – Caderno 1	**1.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.**	**4.**	**5.**	
Pontos	10	10	20	10	10	20	**80**

CADERNO 2

(Não é permitido o uso de calculadora.)

1. $9=36+49-84\cos\theta \;\Leftrightarrow\; \cos\theta=\frac{76}{84} \;\Leftrightarrow\; \cos\theta=\frac{19}{21}$

Resposta: A opção correta é a **(B).**

2. $\sin\frac{7\pi}{3}+3\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)-\tan\left(-\frac{7\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+3\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) =$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}+3\frac{\sqrt{3}}{2}-1 = 2\sqrt{3}-1$

Resposta: O valor exato da expressão é $2\sqrt{3}-1$.

3. $\sin(180^\circ+\alpha)-\sin(450^\circ-\alpha)+\tan(180^\circ+\alpha) = -\sin\alpha-\sin(90^\circ-\alpha)+\tan\alpha =$

$=-\sin\alpha-\cos\alpha+\tan\alpha$

Sabe-se que:

$\sin(90^\circ+\alpha)=-\frac{2}{5} \;\wedge\; 180^\circ<\alpha<360^\circ \;\Leftrightarrow\; \cos\alpha=-\frac{2}{5} \;\wedge\; 180^\circ<\alpha<360^\circ$

Conclui-se que $\alpha\in 3.^\text{o}\,\text{Q}$.

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \;\Leftrightarrow\; \sin^2\alpha+\frac{4}{25}=1 \;\Leftrightarrow\; \sin^2\alpha=\frac{21}{25} \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\alpha=\frac{\sqrt{21}}{5} \;\vee\; \sin\alpha=-\frac{\sqrt{21}}{5}$

Como $\alpha\in 3.^\text{o}\,\text{Q}$, então $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{21}}{5}$, pelo que $\tan\alpha=\frac{-\frac{\sqrt{21}}{5}}{-\frac{2}{5}}=\frac{\sqrt{21}}{2}$.

Assim, $-\sin\alpha-\cos\alpha+\tan\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}+\frac{2}{5}+\frac{\sqrt{21}}{2} = \frac{2\sqrt{21}+5\sqrt{21}}{10}+\frac{2}{5}=\frac{4+7\sqrt{21}}{10}$.

4. Atendendo a que $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < 2x < \frac{3\pi}{2}$, conclui-se que $\cos(2x) < 0$ e $\sin x > 0$.

Então, $\forall x \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$, $\cos(2x) - \sin x < 0$.

Resposta: A opção correta é **(C)**.

5.

5.1. $a = g\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 4\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 4\times\left(-\sin\frac{\pi}{3}\right) = -4\frac{\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3}$

Resposta: O valor de a é $-2\sqrt{3}$.

5.2. $g\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right) = 4\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right) = 4\cos\beta$

Sabe-se que $g(\beta) = 3 \wedge \beta \in 2.^{\text{o}}\text{Q}$.

$4\sin\beta = 3 \Leftrightarrow \sin\beta = \frac{3}{4}$

$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1 \Leftrightarrow \frac{9}{16} + \cos^2\beta = 1 \Leftrightarrow \cos^2\beta = \frac{7}{16} \Leftrightarrow$

$\cos\beta = \frac{\sqrt{7}}{4} \vee \cos\beta = -\frac{\sqrt{7}}{4}$

Como $\beta \in 2.^{\text{o}}\text{Q}$, conclui-se que $\cos\beta = -\frac{\sqrt{7}}{4}$.

$g\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right) = 4\cos\beta = 4\times\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = -\sqrt{7}$

6.

6.1. Seja R a projeção ortogonal de P sobre a reta AB.

$A_{[ABP]} = \frac{\overline{AB}\times\overline{PR}}{2} = \frac{\tan\theta\times(1-\cos\theta)}{2} = \frac{\tan\theta - \tan\theta\cos\theta}{2} = \frac{\tan\theta - \sin\theta}{2}$

Resposta: A opção correta é **(A)**.

6.2. Se a ordenada de P é $\frac{4}{5}$, então $\sin\theta = \frac{4}{5}$.

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Leftrightarrow \frac{16}{25} + \cos^2\theta = 1 \Leftrightarrow \cos^2\theta = 1 - \frac{16}{25} \Leftrightarrow \cos^2\theta = \frac{9}{25} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta = \frac{3}{5} \vee \cos\theta = -\frac{3}{5}$$

Como $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, conclui-se que $\cos\theta = \frac{3}{5}$.

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

Assim, $A_{[ABP]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{PR}}{2} = \frac{\frac{4}{3} - \frac{4}{5}}{2} = \frac{4}{15}$.

Resposta: A medida da área do triângulo $[ABP]$ é $\frac{4}{15}$.

FIM (Caderno 2)

Cotações										
	Caderno 1 (com calculadora)									
Questões	**1.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.**	**4.**	**5.**				
Pontos	10	10	20	10	10	20			**Total**	**80**
	Caderno 2 (sem calculadora)									
Questões	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.1.**	**5.2.**	**6.1**	**6.2.**		
Pontos	10	20	20	10	10	20	10	20	**Total**	**120**
Total										**200**